Zad.1

Sprawdź, czy wektory $\vec{X}_i$ są liniowo niezależne:

a1) $\vec{X}_1 = [1,1,2],\ \vec{X}_2 = [-1,-1,-2],\ \vec{X}_3 = [1,2,3]$;

a2) $\vec{X}_1 = [1,1,0],\ \vec{X}_2 = [1,1,-1],\ \vec{X}_3 = [0,0,1]$;

a3) $\vec{X}_1 = [1,1,0,1],\ \vec{X}_2 = [0,-1,-1,0],\ \vec{X}_3 = [0,0,1,1],\ \vec{X}_4 = [1,0,0,1]$.

Zad.2

Sprawdź, czy wektor $\vec{X}$ jest kombinacją liniową wektorów $\vec{X}_i$:

b1) $\vec{X} = [-1,-2,1],\quad \vec{X}_1 = [-1,-1,0],\ \vec{X}_2 = [1,0,-1],\ \vec{X}_3 = [0,-1,1]$;

b2) $\vec{X} = [2,0,4],\quad \vec{X}_1 = [1,2,-1],\ \vec{X}_2 = [-2,1,1],\ \vec{X}_3 = [3,-1,2]$;

b3) $\vec{X} = [-2,1,0],\quad \vec{X}_1 = [1,2,-1],\ \vec{X}_2 = [-2,-4,2],\ \vec{X}_3 = [3,6,-1]$;

b4) $\vec{X} = [4,-1,3],\quad \vec{X}_1 = [-1,2,3],\ \vec{X}_2 = [2,-1,-2],\ \vec{X}_3 = [1,1,1]$;

b5) $\vec{X} = [-1,0,1],\quad \vec{X}_1 = [0,1,1],\ \vec{X}_2 = [1,2,3],\ \vec{X}_3 = [1,1,1]$.

Zad.3

Dane są wektory $\vec{a} = [-1,3,2]$, $\vec{b} = [1,2,-5]$, $\vec{c} = [5,-1,3]$. Wyznacz:

c1) $(3\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{c}$; c2) $(\vec{a} \circ \vec{c})(\vec{a} \times \vec{c})$; c3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{b}$;

c4) $|\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})|$; c5) $\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c}$; c6) $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{b}| + |\vec{c}|$.

Zad.4

Dane są punkty $A(1,-1,3)$, $B(3,2,-1)$, $C(5,1,3)$, $D(-3,2,5)$. Wyznacz:

d1) $\vec{AB} \times \vec{AD}$;

d2) $\vec{BC} \circ \vec{BD}$;

d3) długość wektora $\vec{AC}$

d4) pole powierzchni trójkąta o wierzchołkach A, B, C ;

d5) tangens kąta pomiędzy wektorami $\vec{AB}$, $\vec{AC}$;

d6) objętość czworościanu o wierzchołkach A, B, C, D .

Zad.5

Sparwdź, czy punkty $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ są współpłaszczyznowe.

Zad.6

Sparwdź, czy trójkąt $A(2,-1,3)$, $B(1,1,1)$, $C(0,0,5)$ jest prostokątny.

Zad.7

Wyznacz długość wektora $\vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$, jeżeli $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 5$, a kąt między wektorami $\vec{b}$ i $\vec{c}$

wynosi $\frac{2}{3}\pi$.

Zad.8

Dany jest wektor $\vec{a} = 3\vec{b} + 2\vec{c}$, jeżeli $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, a kąt między wektorami $\vec{b}$ i $\vec{c}$ wynosi $\frac{2}{3}\pi$. Wyznacz kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Zad.9

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(-1,3,1)$ i prostopadłej do prostej $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z+3}{3}$.

Zad.10

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(-2,1,4)$ i równoległej do wektorów $\vec{a} = [1,-3,-2]$, $\vec{b} = [3,2,5]$.

Zad.11

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P(0,0,2)$, $P_2(3,0,5)$, $P_3(1,1,0)$.

Zad.12

Dane są punkty $P_1(2,1,4)$, $P_2(-4,3,2)$. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, równo oddalonych od punktów P_1 i P_2.

Zad.13

Oblicz kąt między płąszczyznami $x - \sqrt{2}\,y + z - 7 = 0$, $x + \sqrt{2}\,y - z + 5 = 0$.

Zad.14

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do płaszczyzn $x - 2y + 5z - 7 = 0$, $2x + y - z + 8 = 0$.

Zad.15

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P_1(2,-1,4)$, $P_2(1,-1,5)$ i prostopadłej do płaszczyzny $x - 2y + z - 1 = 0$.

Zad.16

Napisz równanie płaszczyzny, na której leżą prosta $\frac{x-2}{3} = y = z + 1$ oraz punkt $P(0, 2, 3)$.

Zad.17

Dane są wierzchołki czworościanu $P_1(0, 0, 2)$, $P_2(3, 0, 5)$, $P_3(1, 1, 0)$, $P_4(4, 1, 2)$. Wyznacz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka P_4.

Zad.18

Dla jakich wartości parametru k płaszczyzny $7x - 2y - z = 0$, $kx + 6y + z - 3 = 0$ są:

e1) równoległe ; e2) prostopadłe .

Zad.19

Wyznacz odległość między prostymi:

f1) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}$, $\frac{x}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$; f2) $\begin{cases} x - 5y + 6z - 3 = 0 \\ 2x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 13x + y + 1 = 0 \\ 11x + z - 1 = 0 \end{cases}$;

f3) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{-2}$, $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$; f4) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = z$;

f5) $\begin{cases} 3x + 4y + z - 5 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -7 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ $t \in R$.

Zad.20

Sprawdź, czy proste l_1 i l_2 leżą na jednej płaszczyźnie. Jeśli tak, to wyznacz jej równanie.

g1) $l_1 : \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$, $l_2 : \frac{x}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{6}$;

g2) $l_1 : \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$, $l_2 : \begin{cases} x + 2y - z + 3 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$.

Zad.21

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(1, 1, 0)$ oraz prostopadłej do prostych $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{4} = z$ i $l_2 : \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

Wskazówki i odpowiedzi

Zad.6 Jest to trójkąt prostokątny o kątach $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$.

Zad.7 $10\sqrt{7}$.

Zad.8 $\frac{\pi}{3}$.

Zad.10 $x + y - z + 5 = 0$.

Zad.11 $x - 3y - z - 2 = 0$.

Zad.12 $3x - y + z + 2 = 0$.

Zad.13 $\frac{\pi}{3}$.

Zad.14 $-3x + 11y + 5z = 0$.

Zad.15 $x + y + z - 5 = 0$.

Zad.16 $x - 7y + 4z + 2 = 0$.

Zad.19 f2) $\sqrt{\frac{458}{97}}$, f4) $\frac{2}{113}\sqrt{339}$, f5) $\frac{207}{130}\sqrt{26}$.

Zad.20 g1) $5x - 14y - 10z - 6 = 0$, g2) proste są skośne.

Zad.21 $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in R.$