

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE BERNOULLIEGO

Równaniem różniczkowym Bernoulliego nazywamy równanie postaci:

$$y' + p(x)y + q(x)y^s = 0,$$

gdzie funkcje $p(x)$ i $q(x)$ są ciągłe w pewnym przedziale I a s jest dowolną liczbą rzeczywistą. Zauważmy, że dla $s = 1$ równanie powyższe jest równaniem liniowym jednorodnym a dla $s = 0$ równaniem liniowym niejednorodnym. Założymy zatem, że $s \neq 0$ i $s \neq 1$. Wówczas poprzez podstawienie:

$$y^{1-s} = u$$

równanie Bernoulliego sprowadzimy do równania liniowego.

Przykład Wyznaczyć całkę ogólną równania:

$$y' + xy = xy^3.$$

Rozwiązanie: Jest to równanie Bernoulliego dla $s = 3$. Robimy więc podstawienie $u = y^{-2}$. Wówczas $u' = -2y^{-3}y'$. Dla prostoty przekształceń równanie mnożymy obustronnie przez $-2y^{-3}$:

$$-2y^{-3}y' - 2xy^{-2} = -2x$$

i po podstawieniu otrzymujemy:

$$u' - 2xu = -2x.$$

Jest to równanie liniowe niejednorodne. Całka ogólna tego równania ma postać: $u = 1 + Ce^{x^2}$. Stąd całka ogólna równania Bernoulliego w postaci uwikłanej dana jest równaniem:

$$1 = y^2(1 + Ce^{x^2}).$$

Przykład Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego:

$$y' - \frac{xy}{2(x^2 - 1)} = \frac{x}{2y}, \quad y(0) = 1.$$

Rozwiązanie: Jest to równanie Bernoulliego dla $s = -1$. Robimy więc podstawienie $u = y^2$. Wówczas $u' = 2yy'$. Dla prostoty przekształceń równanie mnożymy obustronnie przez $2y$:

$$2yy' - \frac{x}{x^2 - 1}y^2 = x$$

i po podstawieniu otrzymujemy:

$$u' - \frac{x}{x^2 - 1} u = x$$

Jest to równanie liniowe niejednorodne, które ze względu na warunek początkowy rozwiązujemy w przedziale $x \in (-1, 1)$. Całka ogólna tego równania ma postać: $u = C \sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1$. Stąd całka ogólna równania Bernoulliego w postaci uwikłanej dana jest równaniem:

$$y^2 = C \sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1,$$

a całka szczególna spełniająca zadany warunek początkowy ma postać:

$$y^2 = 2 \sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1.$$

Ćwiczenia Wyznaczyć całkę ogólną równania:

- | | |
|-------------------------|-------------------------------------|
| 1. $y' + 2xy = 2x^3y^3$ | 2. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$ |
| 3. $xy' + y = y^2$ | 4. $y' = xy^4 - y$ |
| 5. $y' + y = xy^{-6}$ | 6. $y' - 2\sqrt{x}y = 2x^2\sqrt{y}$ |