Wydział: WILiŚ, Budownictwo, sem.2
dr Jolanta Dymkowska

Uogólnione współrzędne walcowe

Niech a i b będą stałymi dodatnimi. Współrzędne (r, φ, z) , dla których związki ze współrzędnymi kartezjańskimi (x, y, z) są dane wzorami:

$$\begin{cases} x = a\,r\,\cos\varphi & r \in [0, +\infty) \\ y = b\,r\,\sin\varphi & \varphi \in [0, 2\pi] \\ z = z & z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

nazywamy *uogólnionymi współrzędnymi walcowymi.*

Przekształcenie

$$(r, \varphi, z) \longrightarrow (\,x\,,\,y\,,z\,)$$

gdzie

$$x = a\,r\,\cos\varphi \qquad y = b\,r\,\sin\varphi \qquad z = z$$

nazywamy *uogólnionym przekształceniem walcowym.*
Jakobian uogólnionego przekształcenia walcowego jest równy:

$$\mathcal{J}(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,\cos\varphi & -\,a\,r\,\sin\varphi & 0 \\ b\,\sin\varphi & b\,r\,\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a\,\cos\varphi & -\,a\,r\,\sin\varphi \\ b\,\sin\varphi & b\,r\,\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\,r\,\cos^2\varphi \;+\; ab\,r\,\sin^2\varphi \;=\; ab\,r.$$

Całka potrójna w uogólnionych współrzędnych walcowych

<u>Twierdzenie</u> Niech obszar $\mathcal{V}_0$ dany w uogólnionych współrzędnych walcowych (ze stałymi a i b) będzie regularny oraz niech funkcja $f(x, y, z)$ będzie ciagła na obszarze $\mathcal{V}$ będącym obrazem $\mathcal{V}_0$ w uogólnionym przekształceniu walcowym. Wówczas

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\mathcal{V}_0} f(\,a\,r\,\cos\varphi\,,\,b\,r\,\sin\varphi\,,\,z\,)\,\cdot\,ab\,r\,drd\varphi dz.$$

<u>Przykład</u> Znaleźć współrzędne środka ciężkości jednorodnej bryły ograniczonej paraboloidą $x^2 + 2y^2 = 4z$ i płaszczyzną $z = 2$.
<u>Rozwiązanie:</u> Bryła $\mathcal{V}$ jest obszarem w przestrzeni normalnym względem płaszczyzny OXY, tj.

$$\mathcal{V} \;:\; \begin{cases} (x, y) \;\in\; \mathcal{D} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \;\leqslant\; z \;\leqslant\; 2 \end{cases}$$

gdzie obszar płaski $\mathcal{D}$ jest ograniczony krzywą, będącą rzutem na płaszczyznę OXY krzywej powstałej z przecięcia paraboloidy $x^2+2y^2=4z$ z płaszczyzną $z=2$, tj. elipsą o równaniu:

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4} \;=\; 1.$$

Obliczając zatem poszczególne całki potrójne, wprowadzimy uogólnione współrzędne walcowe dane wzorami:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\,r\,\cos\varphi & r\in[0,+\infty) \\ y = 2\,r\,\sin\varphi & \varphi\in[0,2\pi] \\ z=z & z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Jakobian, odpowiadający takiej zamianie zmiennych, jest równy: $\mathcal{J}=4\sqrt{2}r$, a obszar $\mathcal{V}_0$, którego obrazem w uogólnionym przekształceniu walcowym jest obszar $\mathcal{V}$, opisze się w nastepujacy sposób:

$$\mathcal{V}_0 \;:\; \begin{cases} 0\leqslant\ \varphi\ \leqslant\ 2\pi \\ 0\leqslant\ r\ \leqslant\ 1 \\ 2r^2\ \leqslant\ z\ \leqslant\ 2 \end{cases}$$

Przystępujemy do obliczania poszczególnych całek potrójnych:

- Masa bryły (jednorodnej, przyjmujemy więc, że gęstość masy jest stała równa 1) $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{M} \;=\; \iiint\limits_{\mathcal{V}} dxdydz \;=\; \iiint\limits_{\mathcal{V}_0} 4\sqrt{2}r\ drd\varphi dz \;=\; 4\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{2r^2}^{2} r\ dz \;=$$

$$=\; 4\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr\ \ r\ z\Big|_{z=2r^2}^{z=2} \;=\; 8\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (r-r^3)\ dr \;=\; 8\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ \left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} \;=$$

$$=\; 2\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \;=\; 4\sqrt{2}\,\pi$$

- Moment statyczny względem płaszczyzny OXY:

$$\mathcal{M}_{XY} \;=\; \iiint\limits_{\mathcal{V}} z\ dxdydz \;=\; \iiint\limits_{\mathcal{V}_0} 4\sqrt{2}r\ z\ drd\varphi dz \;=\; 4\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{2r^2}^{2} r\ z\ dz \;=$$

$$=\; 4\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr\ \ r\ \frac{z^2}{2}\Bigg|_{z=2r^2}^{z=2} \;=\; 8\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (r-r^5)\ dr \;=\; 8\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ \left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} \;=$$

$$=\; \frac{8}{3}\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \;=\; \frac{16}{3}\sqrt{2}\,\pi$$

- Moment statyczny względem płaszczyzny OXZ:

$$\mathcal{M}_{XZ} \;=\; \iiint\limits_{\mathcal{V}} y\ dxdydz \;=\; \iiint\limits_{\mathcal{V}_0} 4\sqrt{2}r\ 2\,r\ \sin\varphi\ drd\varphi dz \;=\; 8\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{2r^2}^{2} r^2\ \sin\varphi\ dz \;=$$

$$= 8\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr\;\; r^2 \sin\varphi\, z\Big|_{z=2r^2}^{z=2} \;=\; 16\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sin\varphi\,(r^2 - r^4)\, dr \;=$$

$$= 16\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\;\; \sin\varphi\;\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} \;=\; \frac{32}{15}\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi\;\; d\varphi \;=\; 0$$

- Analogicznie moment statyczny względem płaszczyzny OYZ: $\mathcal{M}_{YZ} = 0$.
- Współrzędne środka ciężkości:

$$x_c \;=\; \frac{\mathcal{M}_{YZ}}{\mathcal{M}} \;=\; 0 \qquad y_c \;=\; \frac{\mathcal{M}_{XZ}}{\mathcal{M}} \;=\; 0 \qquad z_c \;=\; \frac{\mathcal{M}_{XY}}{\mathcal{M}} \;=\; \frac{\frac{16}{3}\sqrt{2}\,\pi}{4\sqrt{2}\,\pi} \;=\; \frac{4}{3}$$

Uogólnione współrzędne sferyczne

Niech a, b i c będą stałymi dodatnimi. Współrzędne (r, φ, ψ), dla których związki ze współrzędnymi kartezjańskimi (x, y, z) są dane wzorami:

$$\begin{cases} x \;=\; a\, r\, \cos\varphi\, \cos\psi \\ y \;=\; b\, r\, \sin\varphi\, \cos\psi \\ z \;=\; c\, r\, \sin\psi \end{cases}$$

nazywamy *uogólnionymi współrzędnymi sferycznymi.*

Przykład Równanie elipsoidy o półosiach a, b i c:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \;=\; 1$$

zapisać w uogólnionych współrzędnych sferycznych.

Rozwiązanie: Do równania elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ wstawiamy zależności $x = a\,r\,\cos\varphi\,\cos\psi$, $y = b\,r\,\sin\varphi\,\cos\psi$ i $z = c\,r\,\sin\psi$:

$$\frac{a^2\, r^2\, \cos^2\varphi\, \cos^2\psi}{a^2} + \frac{b^2\, r^2\, \sin^2\varphi\, \cos^2\psi}{b^2} + \frac{c^2\, r^2\, \sin^2\psi}{c^2} \;=\; 1$$

$$r^2\, \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\, \cos^2\psi \;+\; r^2\, \sin^2\psi \;=\; 1$$

$$r^2\, \left(\cos^2\psi + \sin^2\psi\right) \;=\; 1$$

$$r^2 \;=\; 1.$$

Zatem równanie elipsoidy o półosiach a, b i c w uogólnionych współrzędnych sferycznych (ze stałymi a, b i c) ma postać: $r = 1$ dla $\varphi \in [0, 2\pi)$ i $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Przekształcenie

$$(r, \varphi, \psi) \;\longrightarrow\; (\,x\,,\; y\,, z\,)$$

gdzie

$$x \;=\; a\, r\, \cos\varphi\, \cos\psi \qquad y \;=\; b\, r\, \sin\varphi\, \cos\psi \qquad z \;=\; c\, r\, \sin\psi$$

nazywamy *uogólnionym przekształceniem sferycznym.*
Jakobian uogólnionego przekształcenia sferycznego jest równy:

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi\cos\psi & -a\,r\,\sin\varphi\cos\psi & -a\,r\,\cos\varphi\sin\psi \\ b\sin\varphi\cos\psi & b\,r\,\cos\varphi\cos\psi & -b\,r\,\sin\varphi\sin\psi \\ c\sin\psi & 0 & c\,r\,\cos\psi \end{vmatrix} = abc\,r^2\cos\psi$$

Całka potrójna w uogólnionych współrzędnych sferycznych

Twierdzenie Niech obszar $\mathcal{V}_0$ dany w uogólnionych współrzędnych sferycznych (ze stałymi a, b i c) będzie regularny oraz niech funkcja $f(x,y,z)$ będzie ciagła na obszarze $\mathcal{V}$ będącym obrazem $\mathcal{V}_0$ w uogólnionym przekształceniu sferycznych. Wówczas

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\mathcal{V}_0} f(\,a\,r\,\cos\varphi\cos\psi\,,\,b\,r\,\sin\varphi\cos\psi\,,\,c\,r\,\sin\psi\,)\cdot abc\,r^2\cos\psi\;drd\varphi d\psi.$$

Przykład Stosując uogólnione współrzędne sferyczne oblicz objetość bryły ograniczonej elipsoidą o półosiach a, b i c .

Rozwiązanie: Z poprzedniego przykładu wiemy, że elipsoida o półosiach a, b i c ma w uogólnionych współrzędnych sferycznych (ze stałymi a, b i c) równanie $r = 1$ dla $\varphi \in [0, 2\pi)$ i $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Stąd wprowadzając uogólnione przekształcenie sferyczne mamy:

$$\mathcal{V} \longleftarrow \mathcal{V}_0 : \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$$

Zatem objętość bryły $\mathcal{V}$ ograniczonej elipsoidą o półosiach a, b i c jest równa:

$$|\mathcal{V}| = \iiint\limits_{\mathcal{V}} dxdydz = \iiint\limits_{\mathcal{V}_0} abc\,r^2\cos\psi\;drd\varphi d\psi =$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\;d\psi\right)\cdot\left(\int\limits_0^{1} abc\,r^2\;dr\right) =$$

$$2\pi\cdot\sin\psi\,\Big|_{\psi=-\frac{\pi}{2}}^{\psi=\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{abc}{3}\,r^3\,\Bigg|_{r=0}^{r=1} = \frac{4}{3}\,abc\,\pi.$$