Wydział: WILiŚ, Budownictwo i Transport, sem.2
dr Jolanta Dymkowska

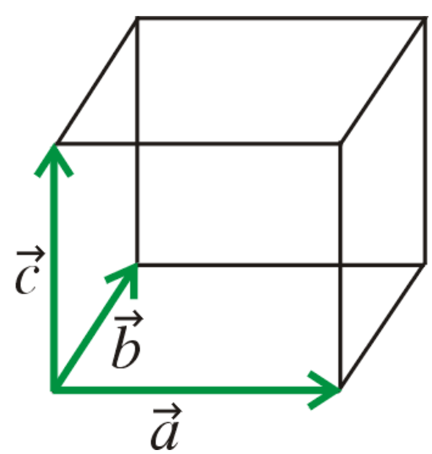
Iloczyn mieszany wektorów

Definicja *Iloczynem mieszanym* trójki wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nazywamy liczbę

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}.$$

Uwaga Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \neq 0$. Zatem, jeżeli $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = 0$, to wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ są liniowo zależne. Trójka wektorów liniowo zależnych (w $\mathbb{R}^3$) leży w jednej płaszczyźnie, zatem wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ są wówczas współpłaszczyznowe.
(Uwaga powyższa pozwala w szybki i prosty sposób sprawdzać liniową niezależność trójki wektorów w $\mathbb{R}^3$, a tym samym ich współpłaszczyznowość).

Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego



- Rozważmy równoległościan zbudowany na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (rys.). Wówczas objętość takiego równoległościanu wyraża się wzorem:

$$V_r = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$

  tj. objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jest równa wartości bezwzględnej z iloczynu mieszanego tych wektorów.

- Objętość czworościanu zbudowanego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ wyraża się wzorem:

$$V_{cz} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$

Własności *(iloczynu mieszanego wektorów)*

- $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} \;=\; -(\vec{b}\times\vec{a})\circ\vec{c}$
- $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} \;=\; -(\vec{a}\times\vec{c})\circ\vec{b}$
- $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} \;=\; (\vec{c}\times\vec{a})\circ\vec{b} \;=\; (\vec{b}\times\vec{c})\circ\vec{a}$

Twierdzenie Jeżeli $\vec{a}=[a_1,a_2,a_3]$, $\vec{b}=[b_1,b_2,b_3]$ i $\vec{c}=[c_1,c_2,c_3]$, to

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} \;=\; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Przykład Oblicz objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{a}=[1,1,1]$, $\vec{b}=[1,1,-3]$ i $\vec{c}=[2,-1,-1]$.

Rozwiązanie

Objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jest równa

$$V_r \;=\; |(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$$

Zatem obliczmy najpierw iloczyn mieszany wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, korzystając z powyższego twierdzenia:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \;=\; -1-6-1-2-3+1 \;=\; -12$$

Stąd

$$V_r \;=\; |(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}| \;=\; |-12| \;=\; 12$$

Odpowiedź Objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jest równa 12.