Metoda redukcji rzędu modelu w schematach różnicowych elektrodynamiki obliczeniowej

mgr inż. Łukasz Kulas

Rozprawa Doktorska

Politechnika Gdańska Wydział Elektroniki Telekomunikacji i Informatyki



promotor: prof. dr hab. inż. Michał Mrozowski, prof. zw. PG

Gdańsk2006

Per aspera ad astra

Mojej Izuni

Spis treści

1	Wst	Wstęp					
2	Wp	Wprowadzenie do metody różnic skończonych					
	2.1	Dyskre	etyzacja równań <i>Maxwella</i> w przestrzeni jednowymiarowej	14			
		2.1.1	Siatka Yee dla przypadku jednowymiarowego	15			
		2.1.2	Dyskretyzacja równań <i>Maxwella</i> na jednowymiarowej siatce Yee	16			
	2.2	Sformu 2.2.1	formułowanie metody różnic skończonych w dziedzinie czasu i częstotliwośc .2.1 Sformułowanie metody różnic skończonych w dziedzinie czasu – kla-				
			syczny iteracyjny algorytm <i>FDTD</i>	17			
		2.2.2	Sformułowanie metody różnic skończonych w dziedzinie częstotliwo-				
			ści – algorytm <i>FDFD</i>	21			
2.3 Związki pomiedzy metoda różnic skończonych sformułowana w							
		często	tliwości i czasu	28			
		2.3.1	Klasyczna i macierzowa implementacja schematu <i>FDTD</i>	28			
		2.3.2	Ujednolicony operatorowy zapis schematów różnicowych	29			
		2.3.3	Własności klasycznych i macierzowych schematów różnicowych	32			
	2.4	Dwu-	i trójwymiarowe algorytmy różnicowe	35			
		2.4.1	Trójwymiarowa siatka Yee	36			
		2.4.2	Trójwymiarowy schemat różnicowy	41			
		2.4.3	Dwuwymiarowy algorytm różnicowy	43			
3	Wy	dzielar	nie podprzestrzeni	47			
	3.1	Przypa	adek podstawowy: wydzielenie pojedynczego obszaru bez zagnieżdżenia	48			
		3.1.1	Konstrukcja operatorów dyskretnych dla zmniejszonej przestrzeni ob-				
			liczeniowej	49			
		3.1.2	Konstrukcja operatorów dla wydzielonej podprzestrzeni	50			
		3.1.3	Konstrukcja macierzy sprzężeń	51			
		3.1.4	Operator globalny przestrzeni obliczeniowej z wydzieloną podprze-				
	3.2	Wydzi	strzenią	54			
		zagnie	zdzenia podprzestrzeni	55			

3.2.1553.2.2Wydzielanie wielu podprzestrzeni 584 Metody sprzegania podprzestrzeni pokrytych siatkami o różnej gestości 62Stabilny algorytm interpolacji na granicy pomiędzy podprzestrzeniami . . . 4.163 4.1.1Stabilność schematów iteracyjnych wykorzystujących wyodrębnione 63 4.1.2Interpolacja liniowa w dwuwymiarowym algorytmie różnicowym . . 67 Interpolacja liniowa w trójwymiarowym algorytmie różnicowym . . 4.1.3744.2Niskoodbiciowy algorytm interpolacji pomiędzy podprzestrzeniami 794.2.1Interpolacja liniowa w dwuwymiarowym algorytmie różnicowym . . 794.2.2Interpolacja liniowa w trójwymiarowym algorytmie różnicowym . . 84 4.2.3Stabilność niskoodbiciowego schematu interpolującego 85 4.3Stabilny algorytm interpolacji o zwiększonej dokładności 86 4.3.1Interpolacja liniowa w dwuwymiarowym algorytmie różnicowym . . 86 4.3.2Interpolacja liniowa w trójwymiarowym algorytmie różnicowym . . 92Porównanie wprowadzonych metod sprzęgania podprzestrzeni 954.4 Włączanie makromodeli 97 $\mathbf{5}$ 5.1Tworzenie funkcji przejścia dla wyodrębnionej podprzestrzeni 985.1.1Opis wydzielonej poddziedziny za pomocą wektorów granicznych . . 985.1.2Konstrukcja elektromagnetycznej funkcji przejścia wydzielonej pod-1005.2Redukcja elektromagnetycznej funkcji przejścia $\mathbf{H}(s)$ 101 5.2.1Wybór odpowiedniej techniki redukcji rzędu dla problemów różnico-101Redukcja elektromagnetycznej funkcji przejścia algorytmem ENOR 5.2.2102Opis elektromagnetyczny przestrzeni z wydzieloną poddziedziną przy użyciu 5.31035.3.1Włączanie funkcji przejścia makromodelu do operatora globalnego . 1035.3.2Włączanie *makromodelu* poprzez projekcję operatora globalnego . . 1045.41065.4.1Zagnieżdżanie *makromodeli* poprzez hierarchiczną projekcję 107 5.4.2Zwielokrotnianie *makromodeli* w przestrzeni obliczeniowej 1105.5114 5.5.1Symetryzowanie funkcji przejścia 1155.5.2Włączanie symetryzowanego makromodelu do operatora globalnego 1166 Makromodele w analizie FDTD i FDFD 118 6.1118 6.1.1119Problem deterministyczny 6.1.2120

3

	6.26.3	6.1.3Pełne rozwiązanie w dziedzinie częstotliwości	121 121 122 123 124 125 129 130 133
7	Test	v numervczne 1	134
•	7.1	Porównanie schematów sprzegania poddziedzin	134
		7.1.1 Dwuwymiarowy algorytm różnicowy - polaryzacja TE	135
		7.1.2 Dwuwymiarowy algorytm różnicowy - polaryzacja TM	137
		7.1.3 Trójwymiarowy algorytm różnicowy	138
	7.2	Analiza dwuwymiarowych struktur elektromagnetycznych przy wykorzysta-	
		niu makromodeli	142
		7.2.1 Rezonator z pojedynczą cienką przesłoną metalową 	143
		7.2.2 Poprawienie dokładności metody <i>FDFD</i> poprzez lokalne zagęszczenie	
		siatki	146
		7.2.3 Analiza <i>FDFD</i> wykorzystująca <i>makromodele</i>	147
	7.3	Dwuwymiarowy schemat różnicowy wykorzystujący makromodele zagnież-	
		dzone	150
		7.3.1 Rezonator z cienkimi metalowymi przesłonami	150
		7.3.2 Struktura filtrująca z cienkimi metalowymi przesłonami	152
		7.3.3 Wysokorozdzielcza analiza <i>FDTD</i> rezonatora z pojedynczą cieliką	15/
	74	Tráinamiarowa struktury elektromagnetyczne	154
	1.4	7.4.1 Analiza filtru z cjenkimi metalowymi przesłonami umieszczonymi sy-	100
		metrycznie w płaszczyźnie E	155
		7.4.2 Analiza filtru z metalowymi przesłonami rezonansowymi umieszczo-	100
		nymi w płaszczyźnie H	161
8	Pod	sumowanie 1	165
Α	Alg	prytmy redukcji rzędu modelu 1	168

Spis oznaczeń

Oznaczenia ogólne

a	_	wektor
A	_	macierz
$(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$	_	i-terozwiązanie problemu własnego (wartość własna i wektor wła-
		sny)
.*	_	operator mnożenia wektorów lub macierzy element po elemencie
$\mathbf{a}(i_1:i_2)$	_	wektor utworzony z elementów wektora a o pozycjach od i_1 do i_2
$\mathbf{A}(i_1,i_2)$	—	element macierzy ${\bf A}$ znajdujący się w i_1 wierszu i i_2 kolumnie

Oznaczenia v	w prob	olemach ciągłych
\vec{E}	_	wektor natężenia pola elektrycznego
\vec{H}	_	wektor natężenia pola magnetycznego
E_{ξ}	_	składowa wektora natężenia pola elektrycznego ($\xi = x, y, z$)
H_{ξ}	—	składowa wektora natężenia pola magnetycznego $(\xi=x,y,z)$
$\nabla \times$	_	operator rotacji
μ	—	przenikalność magnetyczna
ε	—	przenikalność elektryczna
μ_0	—	przenikalność magnetyczna próżni
ε_0	—	przenikalność elektryczna próżni
μ_r	—	względna przenikalność magnetyczna
ε_r	—	względna przenikalność elektryczna
v_0	—	prędkość fali elektromagnetycznej w próżni
v	—	prędkość fali elektromagnetycznej
t	—	czas
f	—	częstotliwość
ω	—	częstotliwość kątowa
s	—	zmienna przestrzeni spektralnej (<i>Laplace</i> 'a)

Oznaczenia w	prob	olemach dyskretnych
Ω	—	dyskretna przestrzeń obliczeniowa
Δ	—	krok dyskretyzacji przestrzeni obliczeniowej
Δ_t	—	krok dyskretyzacji osi czasu
$E_{\xi}(k)$	—	próbka składowej pola \vec{E} w węźle k jednowymiarowej siatki Yee
$H_{\xi}(k+0.5)$	—	próbka składowej pola \vec{H} w węźle $k+0.5$ jednowymiarowej siatki Yee
au	—	dyskretna chwila czasu
$E_{\xi}^{\tau}(k)$	_	próbka składowej pola \vec{E} w węźle k jednowymiarowej siatki Yee i w chwili czas u τ
$H_{\xi}^{\tau+0.5}(k+0.5)$	_	próbka składowej pola \vec{H} w węźl e $k+0.5$ jednowymiarowej siatki Yee i w chwili czas u $\tau+0.5$
$\varepsilon_r(k)$	_	zdyskretyzowana w węźle k jednowymiarowej siatki Ye e wartość względnej przenikalności elektrycznej
$\mu_r(k+0.5)$	_	zdyskretyzowana w węźle $k+0.5$ jednowymiarowej siatki Ye e wartość względnej przenikalności magnetycznej
e	_	wektor próbek natężenia pola elektrycznego
h	—	wektor próbek natężenia pola magnetycznego
$\mathbf{e}^{ au}$	—	wektor próbek pola elektrycznego w chwili τ
$\mathbf{h}^{ au+0.5}$	—	wektor próbek pola magnetycznego w chwili $\tau+0.5$
$\mathbf{e}_b,\mathbf{h}_b$	—	wektory brzegowe zawierające wartości brzegowych próbek pola
\mathbf{R}_{E}	-	macierz będąca dyskretnym operatorem rotacji pola elektrycznego
\mathbf{R}_{H}	—	macierz będąca dyskretnym operatorem rotacji pola magnetycznego
$\mathbf{D}_{\mu},\mathbf{D}_{arepsilon}$	_	macierze materiałowe zawierające zdyskrety zowane wartości μ i ε
$\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z$	_	wektory spróbkowanych wartości składowych x,y,z natężenia pola elektrycznego
$\mathbf{h}_x,\mathbf{h}_y,\mathbf{h}_z$	—	wektory spróbkowanych wartości składowych x,y,z natężenia pola magnetycznego
$\mathbf{R}_x,\mathbf{R}_y,\mathbf{R}_z$	—	macierz będąca dyskretnym operatorem cząstkowym w kierunku $x, \ y, \ z$
$\mathbf{D}_{\mu:x}, \mathbf{D}_{\mu:y}, \mathbf{D}_{\mu:z}$	—	macierze materiałowe zawierające zdyskretyzowane wartości μ dla próbek H_r , H_u , H_z
$\mathbf{D}_{\varepsilon:x}, \mathbf{D}_{\varepsilon:y}, \mathbf{D}_{\varepsilon:z}$	—	macierze materiałowe zawierające zdyskretyzowane wartości ε dla próbek E_x , E_y , E_z
Ν	_	liczba węzłów siatki pola elektrycznego (magnetycznego) w siatce Yee
Δ^{Ω}	—	krok dyskretyzacji przestrzeni dla dziedziny Ω

$\begin{array}{llllllllllllllllllllllllllllllllllll$	edzinie
--	---------

Rozdział 1

Wstep

Symulatory obwodowe układów mikrofalowych, takie jak Advanced Design System (ADS) [1], Microwave Office [53] umożliwiają projektowanie układów stosowanych w zakresie bardzo wysokich częstotliwości wykorzystując teorię linii długich i obwodowe schematy zastępcze używanych nieciągłości mikrofalowych [9,93]. Ze względu na szybki postęp nauki i techniki rosną wymagania stawiane współczesnym systemom mikrofalowym, co sprawia, że układy stają się coraz bardziej skomplikowane. Wzrastająca złożoność układów mikrofalowych stała się głównym ograniczeniem stosowalności symulatorów obwodowych w pracach projektowych. Zbyt proste modele zastępcze są przyczyną rozbieżności wyników uzyskiwanych podczas analizy z rezultatami eksperymentalnymi.

Ograniczenie możliwości projektowych wynikające z niedokładności analizy nie występuje podczas analizy pełnofalowej opartej na numerycznym rozwiązywaniu równań *Maxwella*. Spośród wielu istniejących technik na specjalną uwagę zasługuje metoda różnic skończonych (ang. *Finite Difference (FD)*) [49,74,79]. Jest ona bardzo elastyczna, gdyż nie narzuca ograniczeń na kształt analizowanego układu, a przy tym pozwala osiągnąć wystarczająco dokładne wyniki. Ponieważ specyfiką metody różnic skończonych jest dyskretyzacja równań *Maxwella* na siatce ortogonalnej, dla uzyskania wysokiej dokładności konieczne jest dobranie odpowiednio małego kroku dyskretyzacji przestrzeni. W przypadku analizy struktur zawierających detale o znacznie różniących się wymiarach prowadzi to do dużej liczby zmiennych i długich czasów symulacji.

O dużej popularności metod różnicowych (ang. *Finite Differences (FD)*) zadecydowała niewątpliwie możliwość analizy trójwymiarowych struktur o niemalże dowolnej geometrii pod kątem ich własności elektromagnetycznych, przy stosunkowo łatwej implementacji w postaci programu komputerowego. Dodatkowo, metody FD mogą być sformułowane zarówno w dziedzinie częstotliwości, jak i czasu, co pozwala łatwo dobrać najefektywniejszy sposób rozwiązania w zależności od specyfiki problemu.

Metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu (ang. *Finite Differences Time Domain* (*FDTD*)) prowadzi do iteracyjnego schematu otwartego (ang. *explicit*), w którym rozwiąza-

nie uzyskuje się poprzez cykliczne przeprowadzanie operacji matematycznych bazujących na równaniach różnicowych. Dzięki takiemu sposobowi rozwiązywania zagadnienia różnicowego, możliwa jest analiza problemów elektromagnetycznych opisanych milionami zmiennych stanu. Sformułowanie zagadnienia różnicowego w dziedzinie częstotliwości prowadzi z kolei do metody różnic skończonych w dziedzinie częstotliwości znanej jako *FDFD* (ang. *Finite Differences Frequency Domain*), w której zmienne stanu zagadnienia różnicowego tworzą problem własny lub układ równań liniowych. W tym przypadku koszt numeryczny uzyskania rozwiązania w szerokim pasmie jest zwykle dużo wyższy niż w metodzie *FDTD*. Z tego względu algorytmy *FDFD* wykorzystywane są w analizie struktur wykazujących rezonansowy charakter [12]. Dla układów o dużej dobroci analiza algorytmem iteracyjnym takim jak *FDTD* prowadzi bowiem do długich czasów obliczeń.

Jak wspomniano wcześniej, metoda różnic skończonych w dziedzinie częstotliwości badź czasu teoretycznie pozwala na analizę dowolnie skomplikowanego problemu elektromagnetycznego. W rzeczywistości jednak uniwersalność ta jest trudno realizowalna w przypadku analizy dużych struktur zawierających elementy powodujące silną zmienność pól elektromagnetycznych lub obiekty o małych wymiarach. W takiej sytuacji liczba zmiennych stanu, które muszą zostać przetworzone może być zbyt duża lub zbieżność algorytmu może być zbyt wolna, aby otrzymać wyniki w akceptowalnym czasie. Dotychczasowe próby przezwyciężenia tego ograniczenia opierają się na stosowaniu siatek niejednorodnych [79], schematów lokalnych [7,25,26,51,66] lub lokalnie zageszczanych siatek (ang. subgridding) [45,58,80]. Wszystkie rozwiązania przyczyniają się do zasadniczego przyśpieszenia symulacji i stosowane są w komercyjnych programach analizy pełnofalowej, takich jak Quickwave-3D [69], XFDTD [89] czy CST Microwave Studio [11]. Schematy lokalne [7,15,25,26,51,66,67,70,79] polegają na włączaniu do analizy *FDTD* modeli analitycznych (często quasistatycznych) opracowanych dla pewnej klasy nieciągłości. Są to rozwiązania proste, lecz mające ograniczone zastosowanie i trudne do implementacji w praktycznym przypadku trójwymiarowym (3D). Siatki niejednorodne, nieortogonalne i o nieokreślonej strukturze tworzone lokalnie w obszarach, gdzie geometryczny kształt struktury jest niedokładnie opisany przez jednorodna siatkę ortogonalną [49], podnoszą dokładność dyskretyzacji kosztem wydłużenia czasu obliczeń. Dodatkowo, mogą występować kłopoty związane z generacją siatki, trudnościami implementacji w 3D, pogorszeniem zbieżności metody FDFD i stabilności FDTD. Z tego powodu stosuje się lokalne zagęszczanie siatki (tzw. subgridding) polegające na tworzeniu gestych siatek dla obszarów wymagających małego kroku dyskretyzacji [45,58,80], co pozwala na analizę struktur o arbitralnym kształcie. Lokalne zagęszczenie siatki w dużym obszarze znacznie zwieksza jednak liczbe zmiennych, która w 3D rośnie z trzecia potega współczynnika zagęszczenia siatki (stosunek kroków dyskretyzacji przestrzeni w siatce rzadkiej i gestej). Wysoka dokładność analizy wymagająca niejednokrotnie wysokorozdzielczych siatek jest więc ograniczona maksymalną liczbą zmiennych algorytmu FD, a dodatkowo krok czasowy w FDTD i zbieżność w FDFD sa zależne od najmniejszego kroku dyskretyzacji przestrzeni. W efekcie technika siatek lokalnych wiąże się z długim czasem analizy



Rysunek 1.1: Zastosowanie metody redukcji rzędu modelu w analizie obwodowej. Przykładowy obwód RLC opisany została za pomocą macierzowej transmitancji $\mathbf{Z}(s)$ wiążącej prądy i napięcia we wrotach układu. Wykorzystując techniki MORprzeprowadza się projekcję ortogonalną macierzy tworzących $\mathbf{Z}(s)$ doprowadzając do znacznej redukcji liczby zmiennych. Zredukowana transmitancja $\mathbf{Z}_m(s)$ aproksymuje $\mathbf{Z}(s)$ z dużą dokładnością w wybranym pasmie częstotliowści.

problemów elektromagnetycznych.

Istotą niniejszej rozprawy doktorskiej jest opracowanie nowej metody pozwalającej osiągnąć wysoką rozdzielczość i dokładność metod różnicowych elektrodynamiki obliczeniowej przy zachowaniu dobrej zbieżności algorytmów i krótkich czasach obliczeń. Podstawowy cel zostanie osiągnięty poprzez połączenie techniki lokalnego zagęszczania siatki i metod redukcji rzędu modelu (ang. *Model Order Reduction (MOR)*).

Redukcja rzędu modelu [17, 19, 27, 57, 59, 76] jest to technika stosowana w analizie układów dynamicznych opisywanych wieloma równaniami różniczkowymi (względem czasu) pozwalająca na znalezienie funkcji przejścia obwodu za pomocą znacznie mniejszej liczby zmiennych stanu. Techniki redukcji wprowadzone zostały po raz pierwszy w automatyce na początku lat osiemdziesiątych [59]. Ze względu na wysoką wartość praktyczną zostały one szybko zaadaptowane na potrzeby technik CAD wykorzystywanych w symulatorach obwodowych układów elektronicznych do projektowania układów VLSI (np. programy Cadence i TPA 4.0) [18]. Poglądowy schemat sposobu wykorzystania redukcji rzędu modelu w analizie obwodowej przedstawiono na rys. 1.1 na przykładzie analizy funkcji przenoszenia układu RLC dla p-wrotnika.

Przy wykorzystaniu obwodowych praw *Kirchoffa* można zdefiniować postać macierzową transmitancji $\mathbf{Z}(s)$, w której macierz \mathbf{G} związana jest z elementami reaktancyjnymi i połączeniami istniejącymi w układzie, macierz \mathbf{C} z elementami rezystywnymi, zaś macierze \mathbf{L} i \mathbf{B} z wyborem wrót użytych podczas określania funkcji $\mathbf{Z}(s)$ – macierzy o wymiarach $p \times p$. Ponieważ problem opisany jest za pomocą zmiennych stanu reprezentujących napięcia węzłowe i prądy gałęziowe, rozmiar N macierzy \mathbf{G} i \mathbf{C} może być znaczny. Oznacza to, że aby otrzymać $\mathbf{Z}(s)$, należy rozwiązać układ równań na każdej z rozpatrywanych częstotliwości.

Zastosowanie redukcji rzędu modelu pozwala, poprzez projekcję ortonormalną za pomocą macierzy V, stworzyć zredukowane macierze $\mathbf{L}_m = \mathbf{V}^T \mathbf{L}, \mathbf{B}_m = \mathbf{V}^T \mathbf{B}, \mathbf{G}_m = \mathbf{V}^T \mathbf{G} \mathbf{V}$ i $\mathbf{C}_m = \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}$ tworzące zredukowaną transmitancję $\mathbf{Z}_m(s)$. Macierzowa funkcja $\mathbf{Z}_m(s)$ aproksymuje $\mathbf{Z}(s)$ z dużą dokładnością w wybranym pasmie częstotliwości przy użyciu znacznie mniejszej liczby zmiennych stanu *m*. Dzięki redukcji liczby zmiennych rozwiązanie układu równań, pozwalającego określić $\mathbf{Z}_m(s)$, można przeprowadzić w nieporównywanie krótszym czasie, w efekcie czego szybko uzyskuje się dokładną charakterystykę badanego układu w szerokim pasmie częstotliwości.

W połowie lat dziewiećdziesiatych metody redukcji zaczęto wykorzystywać w problemach brzegowych elektrodynamiki obliczeniowej, w których system do redukcji tworzony jest na podstawie opisu zjawiska za pomocą równań Maxwella, a wejścia i wyjścia systemu stanowią pola elektryczne i magnetyczne lub amplitudy modów [4,63,71,94,100]. Jednym ze stosunkowo nowych sposobów użycia technik MOR w analizie problemów elektromagnetycznych metodami siatkowymi (FEM, TLM, FDFD, FDTD) jest redukcja układu liniowego stworzonego poprzez dyskretyzację równań Maxwella w przestrzeni obliczeniowej, który traktowany jest jako system o dużej liczbie zmiennych odpowiadających nieznanym wartościom pól (FDFD, FDTD) [6, 32, 88], amplitudom fal (TLM) [50] lub współczynnikom rozwinięcia funkcji bazowych (FEM) [98]. System jest przetwarzany na jednej częstotliwości metodą redukcji rzędu modelu, a powstały w wyniku system zredukowany, o małej liczbie zmiennych, używany jest do uzyskania przybliżonych wyników w określonym pasmie częstotliwości. Ponieważ techniki MOR wymagają faktoryzacji macierzy, liczba zmiennych stanu przed redukcją nie może być zbyt duża (mniejsza niż 100000-200000), co w naturalny sposób ogranicza stosowalność tej metody. Pomimo to technika MOR stosowana jest od niedawna w komercyjnym pakiecie analizy metodą elementów skończonych [75] HFSS [24] pod nazwa Fast Frequency Sweep (FSS) [63]. Alternatywna technika, która rozwineła się m.in. w rezultacie badań prowadzonych przez autora niniejszej pracy [13, 34, 97], wykorzystuje



Rysunek 1.2: Ilustracja procesu włączania makromodelu do analizy FD. Z równań różnicowych opisujących przestrzeń obliczeniową Ω wydzielono podprzestrzeń $\hat{\Omega}$, której siatka została następnie zagęszczona. Wykorzystując techniki MOR zastosowane do elektromagnetycznej funkcji przejścia poddziedziny $\hat{\Omega}$ tworzony jest makromodel, którego równania włączane są do poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$.

makromodele, które powstają poprzez redukcję rzędu modelu równań stanu zapisanych dla fragmentu przestrzeni obliczeniowej, a następnie są włączane do standardowego algorytmu siatkowego. Sposób włączania *makromodelu* do równań różnicowych przestrzeni obliczeniowej naszkicowano na rys. 1.2.

Tezy pracy

W niniejszej pracy rozważane będzie użycie techniki redukcji rzędu modelu do redukcji liczby zmiennych opisujących własności falowe fragmentu przestrzeni obliczeniowej w metodach różnicowych. *Makromodele* są szczególnie atrakcyjne w analizie problemów zawierających małe elementy o skomplikowanej geometrii lub takich, w których obserwuje się silną nieliniowość przestrzenną pól, co wymaga dużej gęstości siatki (małego kroku dyskretyzacji). Redukcja rzędu modelu zastosowana do równań zapisanych dla fragmentu obszaru o lokalnie zmniejszonym kroku dyskretyzacji usuwa większość wewnętrznych zmiennych stanu. Zatem, odmiennie niż w przypadku *subgriddingu*, włączanie *makromodelu* dostarcza bardzo dokładne rezultaty przy niskim koszcie numerycznym i wymaganiach pamięciowych komputera [14]. Dodatkowo w FDTD krok czasowy, z jakim działają *makromodele* zmienia się nieznacznie w stosunku do kroku czasowego siatki podstawowej [14,34,37,39,43], natomiast w sformułowaniu w dziedzinie częstotliwości nie obserwuje się pogorszenia zbieżności procedur iteracyjnego rozwiązywania problemów macierzowych [2]. Z powyższych obserwacji można wyciągnąć następujące wnioski:

- liczba zmiennych w analizie metodą różnic skończonych jest nadmiarowa i można ją zmniejszyć przez zastosowanie metod redukcji rzędu modelu bez utraty dokładności obliczeń,
- *makromodele* mogą być używane zarówno w metodzie *FDTD* jak i *FDFD*, i mogą z powodzeniem zastąpić metody poprawiania dokładności w schematach różnicowych polegające na lokalnym zagęszczaniu siatki,
- makromodele umożliwiają budowę wysokorozdzielczych schematów różnicowych.

Wnioski te stanowią równocześnie tezy rozprawy doktorskiej.

Zakres pracy

Celem niniejszej rozprawy doktorskiej jest utworzenie podstaw teoretycznych, a następnie zbadanie potencjału techniki redukcji rzędu modelu w zakresie tworzenia wysokorozdzielczych algorytmów *FDTD* i *FDFD*, w oparciu o koncepcję *makromodelu*.

Pracę rozpoczyna rozdział stanowiący wprowadzenie do schematów różnicowych. Przedstawione w nim metody bazują zarówno na sformułowaniu macierzowym, jak i jawnym zapisie różnicowych operatorów rotacji znanym z klasycznego zapisu stosowanego w metodzie *FDTD*. Formalizm macierzowy umożliwia znalezienie licznych związków pomiędzy schematami *FDTD* i *FDFD* i stanowi podstawowe narzędzie generacji i włączania *makromodeli* do analizy numerycznej.

Kolejne dwa rozdziały opisują metodologię tworzenia operatorów globalnych dla zdyskretyzowanych przestrzeni obliczeniowych z wydzielonymi poddziedzinami. Wprowadzony zapis pozwala na swobodne wielokrotne wydzielanie poddziedzin pokrytych siatkami różnej gęstości oraz sprzęganie pól granicznych przy wykorzystaniu schematów interpolacyjnych.

W rozdziałach piątym i szóstym opisane zostały zasady tworzenia *makromodeli* i ich użycia w algorytmach *FDTD* i *FDFD*. Przedstawione techniki pozwalają w łatwy sposób zwielokrotniać i zagnieżdżać *makromodele*, co umożliwia znaczne zwiększenie efektywności i rozdzielczości schematów różnicowych.

Ostatni rozdział zawiera testy numeryczne, które obrazują sposoby generacji i użycia makromodeli w rzeczywistych strukturach mikrofalowych. Zawarte przykłady pozwalają zweryfikować stosowalność przedstawionej w rozprawie techniki, zwłaszcza w kontekście jej użyteczności w analizie złożonych trójwymiarowych struktur elektromagnetycznych.

Rozprawę kończy podsumowanie i dodatek przedstawiający dwa algorytmy redukcji rzędu modelu wykorzystujące projekcję.

Rozdział 2

Wprowadzenie do metody różnic skończonych

Algorytmy rozważane w niniejszej rozprawie doczekały się bogatej literatury, tym niemniej konieczne jest przypomnienie podstawowych zależności w celu łatwiejszego zrozumienia prezentowanych w niniejszej rozprawie technik przyspieszania metod FDTD i FDTD za pomocą technik redukcji rzędu modelu (ang. *Model Order Reduction (MOR)*) zwłaszcza pod kątem ich wzajemnych relacji i powiązań. Istotne jest to przede wszystkim dla uzyskania dużej ogólności i przejrzystości prezentowanych algorytmów oraz zapewnienia ich zgodności z innymi metodami pozwalajacymi na zwiększenie dokładności i przyśpieszenie schematów FDTD i FDFD.

2.1 Dyskretyzacja równań *Maxwella* w przestrzeni jednowymiarowej

Rozważmy obszar (nieograniczony lub ograniczony) wypełniony bezstratnym izotropowym ośrodkiem o parametrach μ i ε . Pole elektromagnetyczne w takiej przestrzeni może zostać opisane równaniami *Maxwella* o następującej postaci:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$
(2.1)

Powyższe zależności opisują problem elektromagnetyczny wykorzystując wszystkie składowe pól, a więc w przestrzeni trójwymiarowej.

Znaczne uproszczenie uzyskuje się zakładając, że pola \vec{E} , \vec{H} są jednorodne w kierunkach x i y. Dzięki temu zagadnienie (2.1) może zostać opisane w dziedzinie jednowymiarowej, a równania *Maxwella* można przekształcić do postaci wykorzystującej jedną składową pola



elektrycznego i magnetycznego:

$$-\frac{\partial}{\partial z}H_y = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial}{\partial t}E_x$$
$$\frac{\partial}{\partial z}E_x = -\mu_0\mu_r\frac{\partial}{\partial t}H_y \qquad (2.2)$$

Zredukowanie trójwymiarowego problemu elektromagnetycznego (2.1) do zagadnienia jednowymiarowego (2.2) znakomicie upraszcza rozważania dotyczące metod *FDTD* i *FDFD*, a zwłaszcza ułatwia ich zrozumienie na etapie budowania siatki Yee i dyskretyzacji pól przy jej wykorzystaniu.

2.1.1 Siatka Yee dla przypadku jednowymiarowego

Zapisanie równań różnicowych dla problemu opisanego równaniami (2.2) wymaga dyskretyzacji składowych pól E_x i H_y na siatce. Siatka definiuje zbiór punktów, w których określa się wartości pól w metodach różnicowych. W najprostszym przypadku odległość pomiędzy próbkami pola elektrycznego oraz pomiędzy próbkami pola magnetycznego jest stała i wynosi Δ . Od wartości zmiennej Δ , która jest krokiem dyskretyzacji przestrzeni, zależy dokładność uzyskanego rozwiązania. Przyjmuje się, że graniczna wartość Δ , przy której wyniki analizy mogą być przydatne, określona jest zależnością [79]:

$$\Delta \leqslant \frac{\lambda}{10} \tag{2.3}$$

gdzie λ to minimalna rozważana długość fali w analizowanej strukturze. W praktyce wiarygodne rezultaty otrzymuje się dla kroków dyskretyzacji powyżej $\frac{\lambda}{20}$ [79, 101].

W analizie pól elektromagnetycznych najwygodniej jest posługiwać się siatką Yee [79, 91]. Najważniejszym założeniem poczynionym przez Yee w 1966 roku [91], które przyczyniło się do ogromnego sukcesu metody różnic skończonych w elektrodynamice obliczeniowej jest przesunięcie względem siebie węzłów siatki określających pozycję próbek pól elektrycznych

(tzw. siatka pola \vec{E}) oraz magnetycznych (tzw. siatka pola \vec{H}) o odległość $\frac{\Delta}{2}$ (patrz rys. 2.1). Pozwala to przybliżyć pochodne przestrzenne za pomocą tzw. różnic centralnych [79], co znacząco zwiększa dokładność metod różnicowych w stosunku do sformułowania, w którym siatka pola \vec{E} (in. siatka główna problemu) i siatka pola \vec{H} (in. siatka dualna problemu) nie są przesunięte [79].

Pozycja każdej z próbek pól w siatce Yee jest ściśle związana z pozycją przestrzenną odpowiedniej próbki pola w przestrzeni ciągłej. Próbka pola elektrycznego o indeksie k, dla $k \in N$ zmieniającego się od 1 do K reprezentuje próbkę pola elektrycznego położoną w punkcie z_k . Ponieważ, zgodnie z rys. 2.1, próbka $E_x(1)$ położona w pierwszym węźle siatki głównej reprezentuje próbkę pola elektrycznego położoną w punkcie $z_1 = 0$ przestrzeni ciągłej, prawdziwa jest następująca zależność wiążąca indeks próbki z jej przestrzennym położeniem:

$$z_k = (k-1)\Delta\tag{2.4}$$

Podobnie otrzymuje się pozycję próbek pola magnetycznego związanych z siatką dualną. W tym przypadku indeksy równe k + 0.5 uwzględniają przesunięcie pomiędzy siatkami (patrz rys. 2.1), więc pozycja przestrzenna próbki $H_y(k + 0.5)$ wynosi:

$$z_{k+0.5} = (k - 0.5)\Delta \tag{2.5}$$

2.1.2 Dyskretyzacja równań *Maxwella* na jednowymiarowej siatce Yee

Problem elektromagnetyczny w jednowymiarowej przestrzeni ciągłej opisany jest równaniami *Maxwella* o postaci (2.2). Jego zdyskretyzowanym odpowiednikiem jest zestaw równań różnicowych przedstawiający zależności między próbkami pola \vec{E} i \vec{H} dla dyskretnej przestrzeni obliczeniowej Ω zdefiniowanej przez dwie siatki (*podstawową* i *dualną*) tworzące siatkę Yee.

Przybliżenie pochodnych przestrzennych występujących w (2.2) za pomocą *różnic centralnych* [79] prowadzi do dyskretnego odpowiednika jednowymiarowych równań *Maxwella* (2.2) zapisanego przy pomocy próbek składowych pól:

$$-\frac{H_y(k+0.5) - H_y(k-0.5)}{\Delta} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(k) \frac{\partial}{\partial t} E_x(k)$$
(2.6)

$$\frac{E_x(k+1) - E_x(k)}{\Delta} = -\mu_0 \mu_r(k+0.5) \frac{\partial}{\partial t} H_y(k+0.5)$$
(2.7)

gdzie indeks $k \in \langle 1, K \rangle$, a $\varepsilon_r(k)$ i $\mu_r(k + 0.5)$ są zdyskretyzowanymi wartościami względnej przenikalności elektrycznej i magnetycznej. Warto zwrócić uwagę na charakter operacji przeprowadzanych w powyższych równaniach, który w pełni zgodny jest z fizyczną interpretacją równań *Maxwella* – zgodnie z równaniem (2.6) pochodna czasowa próbek pola elektrycznego w węźle k aproksymowana jest przy wykorzystaniu różnic centralnych W celu uzyskania rozwiązania równań różnicowych (2.6) i (2.7), konieczne jest odpowiednie zakończenie przestrzeni dyskretnej, czyli zapewnienie takich warunków na jej brzegach (poprzez określenie wartości odpowiednich próbek pól), aby problem dyskretny równoważny był oryginalnemu problemowi ciągłemu. Jeśli np. przestrzeń ciągła ograniczona jest ścianką elektryczną będącą nieskończenie rozległą płaszczyzną przecinającą oś z w punktach $z_1 = 0$ oraz $z_K = (K - 1)\Delta$, próbki pola elektrycznego $E_x(1)$ i $E_x(K)$ przyjmą stałą wartość 0, zaś zakresy zmienności indeksów w równaniach (2.6) i (2.7) przyjmą wartości odpowiednio k = 2..(K - 1) w równaniu (2.7) i k = 1..K w równaniu (2.6). Próbka pola $H_y(K+0.5)$ nie będzie więc uwzględniana w zdyskretyzowanych równaniach Maxwella. Inne warunki brzegowe, a zwłaszcza warunek wolnej przestrzeni poza węzłami skrajnymi siatki Yee mogą być również włączone do dyskretnych równań Maxwella [21,49,56,79], choć zwykle dokonuje się tego już po sformułowaniu równań różnicowych w dziedzinie częstotliwości lub czasu.

2.2 Sformułowanie metody różnic skończonych w dziedzinie czasu i częstotliwości

Dyskretyzacja przestrzeni ciągłej prowadzi do zamiany równań *Maxwella* na układ równań różniczkowych pierwszego stopnia względem czasu. Można ten układ uważać za zestaw równań ze zmiennymi stanu odpowiadającymi próbkom składowych pola \vec{E} i \vec{H} . Liczba zmiennych stanu równa jest zatem proporcjonalna do sumy liczby węzłów *siatki podstawowej* i *dualnej*. Zgodnie z [79] należy uwzględnić co najmniej 10 węzłów na długość fali, więc w praktyce mamy do czynienia z równaniami stanu o bardzo dużej liczbie zmiennych.

Niezbędne jest takie postawienie problemu różnicowego, aby możliwe było jego numeryczne rozwiązanie. Uzyskuje się je poprzez sformułowanie równań (2.6) i (2.7) dla próbek pól w stanie przejściowym lub ustalonym. W rezultacie otrzymuje się metodę różnic skończonych w dziedzinie czasu (*ang. Finite Difference Time Domain (FDTD)*) oraz metodę różnic skończonych w dziedzinie częstotliwości (*ang. Finite Difference Frequency Domain* (*FDFD*)).

2.2.1 Sformułowanie metody różnic skończonych w dziedzinie czasu – klasyczny iteracyjny algorytm *FDTD*

Metoda *FDTD* jest najpopularniejszym sformułowaniem metody różnic skończonych. Postawienie problemu różnicowego w dziedzinie czasu prowadzi do zagadnienia relaksacyjnego. Rozwiązanie otrzymywane jest w wyniku pobudzenia struktury impulsem, a następnie wykonaniu kolejnych iteracji, które trwają do czasu osiągnięcia stanu ustalonego. Koszt obliczenia jednej iteracji jest proporcjonalny do liczby zmiennych stanu. W rezultacie analiza przeprowadzona przy wykorzystaniu metody *FDTD* umożliwia znalezienie rozwiązania nawet dla bardzo dużych problemów zawierających miliony zmiennych stanu.

Dyskretyzacja osi czasu

Przekształcenie równań (2.6) i (2.7) do postaci zagadnienia relaksacyjnego wymaga zdyskretyzowania osi czasu z krokiem Δ_t (patrz rys. 2.2). Podobnie jak w przypadku dyskretyzacji przestrzeni, zdyskretyzowane próbki pól E_x i H_y będą przesunięte względem siebie w czasie o $\frac{\Delta_t}{2}$. Związane jest to z możliwością zastosowania *różnic centralnych* w celu aproksymacji pochodnej czasowej w równaniach różnicowych (2.6), (2.7).

Po dyskretyzacji osi czasu próbki pola elektrycznego będą istniały wyłącznie w chwilach czasowych $\tau \in N$, a więc próbka $E_x^{\tau}(k)$ jest zdyskretyzowaną wartością składowej E_x w pozycji przestrzennej określonej indeksem k, w czasie określanym indeksem τ , który związany jest z krokiem dyskretyzacji osi czasu za pomocą relacji:

$$t = \tau \Delta_t \tag{2.8}$$

Analogicznie, dla próbek pola \vec{H} istniejących jedynie w chwilach $\tau + 0.5$ ($\tau \in N$) próbka $H_{y}^{\tau+0.5}(k+0.5)$ oznacza zdyskretyzowaną wartość H_{y} w węźle k+0.5 w chwili $\tau+0.5$, przy



Rysunek 2.2: Graficzne przedstawienie dyskretyzacji przestrzeni i czasu w analizie FDTD dla przypadku jednowymiarowego próbki E_x i H_y istnieją naprzemiennie w chwilach czasu τ i $\tau + 0.5$.

czym t i τ łączy następujący związek:

$$t = (\tau + 0.5)\,\Delta_t\tag{2.9}$$

Konstrukcja iteracyjnego schematu FDTD

Przeprowadzenie dyskretyzacji osi czasu z krokiem Δ_t pozwala zapisać równania algorytmu *FDTD* dla zdyskretyzowanej przestrzeni jednowymiarowej. Stosując różnice centralne do (2.6) i (2.7) otrzymuje się następujące zależności:

$$-\frac{H_y^{\tau+0.5}(k+0.5) - H_y^{\tau+0.5}(k-0.5)}{\Delta} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(k) \frac{E_x^{\tau+1}(k) - E_x^{\tau}(k)}{\Delta_t}$$
(2.10)

$$\frac{E_x^{\tau}(k+1) - E_x^{\tau}(k)}{\Delta} = -\mu_0 \mu_r(k+0.5) \frac{H_y^{\tau+0.5}(k+0.5) - H_y^{\tau-0.5}(k+0.5)}{\Delta_t}$$
(2.11)

Przekształcając (2.10) i (2.11) do postaci umożliwiającej otrzymanie próbek $H_y^{\tau+0.5}(k+0.5)$ oraz $E_x^{\tau}(k)$ na podstawie próbek w chwilach poprzednich można łatwo otrzymać iteracyjne równania algorytmu *FDTD*. Schemat pozwalający na cykliczne obliczanie próbek pola elektromagnetycznego w kolejnych chwilach czasu przyjmie więc formę otwartą (ang. *explicit*):

$$H_y^{\tau+0.5}(k+0.5) = H_y^{\tau-0.5}(k+0.5) - \frac{\Delta_t}{\mu_0\mu_r(k+0.5)\Delta} \left[E_x^{\tau}(k+1) - E_x^{\tau}(k) \right] \quad (2.12)$$

$$E_x^{\tau+1}(k) = E_x^{\tau}(k) - \frac{\Delta_t}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(k) \Delta} \left[H_y^{\tau+0.5}(k+0.5) - H_y^{\tau+0.5}(k-0.5) \right]$$
(2.13)

Zgodnie z powyższymi równaniami, na podstawie próbek pola elektrycznego istniejących we wszystkich węzłach siatki podstawowej w chwili czasu τ i próbek pola magnetycznego ze wszystkich węzłów siatki dualnej w chwili czasu $\tau - 0.5$ uzyskuje się wartości próbek pola \vec{H} w bieżącej chwili czasu, tj. $\tau + 0.5$. Podobnie, próbki $E_x^{\tau+1}(k)$ wylicza się na podstawie próbek $H_y^{\tau+0.5}(k \pm 0.5)$ oraz $E_x^{\tau}(k)$ dla k zmieniajacego się po wszystkich węzłach siatki Yee, w których istnieją próbki pól \vec{E} i \vec{H} .

Aby algorytm iteracyjny FDTD mógł być użyty w analizie problemu elektromagnetycznego, równania (2.12) i (2.13) muszą być uzupełnione o dodatkowe elementy:

- warunki brzegowe określające sposób zakończenia zdyskretyzowanej przestrzeni obliczeniowej,
- sposób odwzorowania parametrów materiałowych przestrzeni ciągłej w dyskretnej siatce Yee,
- pobudzenie,
- algorytm ekstrakcji wyników analizy na podstawie przeprowadzonych iteracji.

Pierwsze dwa elementy sprawiają, że algorytm iteracyjny FDTD użyty do opisu dynamicznego procesu kształtowania się pól elektromagnetycznych w przestrzeni dyskretnej będzie wiernie modelował przestrzeń ciągłą i rozkłady pól w niej występujące, zaś dwa ostatnie umożliwiają przeprowadzenie analizy metodą FDTD w taki sposób, aby możliwe było uzyskanie pożądanych informacji ilościowych, takich jak częstotliwości rezonansowe, rozkłady pól czy też parametry macierzy rozproszenia. Wskazówki umożliwiające poprawną implementację w pełni funkcjonalnego algorytmu FDTD można znaleźć w książce Taflove'a [79] oraz w licznych publikacjach naukowych [21, 23, 28–30, 56, 65, 86, 90].

Stabilność algorytmu FDTD

Jednym z kluczowych zagadnień metody FDTD jest zagadnienie stabilności schematu iteracyjnego danego równaniami (2.12) i (2.13). Algorytm FDTD jest stabilny, jeżeli dla każdego ograniczonego pobudzenia wartości wszystkich próbek pól będą ograniczone dla każdej chwili czasu.

Dokładna analiza równań FDTD przeprowadzona w [79] dla przestrzeni obliczeniowej o parametrach materiałowych μ_0 , ε_0 pozwala stwierdzić, że jednowymiarowy algorytm FDTDjest stabilny, gdy krok dyskretyzacji osi czasu spełnia następujące zależności:

$$\Delta_t \leqslant \frac{\Delta}{c}$$
 lub inaczej $S = \frac{c\Delta_t}{\Delta} \leqslant 1$ (2.14)

gdzie c jest prędkością fali elektromagnetycznej w próżni, parametr S nazywany jest liczbą Couranta, zaś równanie (2.14) warunkiem Couranta.

Postać warunków (2.14) związana jest ściśle z fizyczną interpretacją dynamicznych procesów czasowych modelowanych za pomocą algorytmu iteracyjnego opartego na dyskretyzacji przestrzeni i czasu. Ponieważ $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ jest prędkością grupową fali elektromagnetycznej rozchodzacej się w próżni, równanie (2.14) zapisane w formie:

$$\Delta \geqslant c \cdot \Delta_t$$

oznacza, że warunek Couranta zapewnia taki krok czasowy, dla którego droga jaką przebędzie fala elektromagnetyczna w czasie Δ_t nie będzie dłuższa od odlegości pomiędzy sąsiednimi węzłami. W przypadku, gdy Δ_t przyjmuje wartość graniczną $\frac{\Delta}{c}$ po czasie Δ_t , fala elektromagnetyczna przebędzie drogę równą Δ .

Zgodnie z powyższą interpretacją, gdy analizowana przestrzeń wypełniona jest ośrodkiem innym niż próżnia, zamiast c w równaniu (2.14) należy podstawić maksymalną prędkość grupową w analizowanym ośrodku. W ogólności *warunek Couranta* przyjmie więc następującą postać¹:

$$\Delta_t \leqslant \frac{\Delta}{v\Big|_{max}}$$
 lub $S = v\Big|_{max} \cdot \frac{\Delta_t}{\Delta} \leqslant 1$ (2.15)

¹W przypadku schematów *FDTD* wykorzystujących dwu- i trójwymiarowe siatki Ye
e zapewnienie stabilności wymagać będzie dalszego zmniejszenia wartości
 Δ_t .

W praktyce do algorytmu *FDTD* wprowadza się modyfikacje mające na celu zwiększenie jego dokładności lub efektywności. Każda modyfikacja algorytmu *FDTD* powinna zachować jego stabilność. Badanie stabilności zmodyfikowanych algorytmów jest trudne i dlatego często dowód teoretyczny zastępowany jest testem numerycznym. Należy podkreślić, że dowodzenie stabilności algorytmów zmodyfikowanych może być znacznie uproszczone, jeżeli wykorzysta się operatorową reprezentację schematu [55]. To podejście zostanie wykorzystane w dalszej części pracy.

Podział iteracyjnych schematów różnicowych na stabilne i niestabilne zwykle stanowi jednocześnie podział na metody przydatne, czyli takie, które umożliwiają uzyskanie rozwiązania, i na nieprzydatne. Badanie stabilności modyfikacji algorytmu *FDTD* jest więc częstym testem, który zwykle polega na przeprowadzeniu długiego ciągu iteracji schematu *FDTD* [43,80,81]. Istnieje jednak pewna klasa modyfikacji prowadzących do niestabilnego algorytmu *FDTD*, w których stabilność tracona jest dopiero po stosunkowo długim okresie czasu (np. po tysiącach czy setkach tysięcy iteracji). Umożliwia to uzyskanie rozwiązania, pomimo, że w końcu pojawia się niestabilność powodująca nieskończony wzrost wartości próbek pola. Efekt ten nazywany jest *niestabilnością długookresową* (ang. *long time instability*), zaś algorytmy, w których on występuje [39,43,45,58], są często używane, zwłaszcza dla struktur o niskiej dobroci, mimo że zalicza się je do grupy schematów niestabilnych. Wytłumaczyć to można faktem, że w praktyce straty energii sygnału spowodowane np. promieniowaniem lub absorpcją kompensują efekt długookresowej niestabilności.

2.2.2 Sformułowanie metody różnic skończonych w dziedzinie częstotliwości – algorytm *FDFD*

Alternatywna, w stosunku do FDTD, metoda rozwiązania zagadnienia różnicowego polega na sformułowaniu równań (2.6) oraz (2.7) w dziedzinie częstotliwości. Zakładając harmoniczną zmienność pól \vec{E} i \vec{H} , równania *Maxwella* opisujące problem jednowymiarowy (2.16) zapisać można w następującej postaci:

$$-\frac{\partial}{\partial z}H_y = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_x$$

$$\frac{\partial}{\partial z}E_x = -j\omega\mu_0\mu_r H_y \qquad (2.16)$$

Stąd, powyższe równania zdyskretyzowane na siatce Yee przyjmą postać równań różnicowych (siatkowych) (2.6), (2.7), w których pochodna czasowa zostanie zastąpiona czynnikiem $j\omega$:

$$-\frac{H_y(k+0.5) - H_y(k-0.5)}{\Delta} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(k)E_x(k)$$
(2.17)

$$\frac{E_x(k+1) - E_x(k)}{\Delta} = -j\omega\mu_0\mu_r(k+0.5)H_y(k+0.5)$$
(2.18)

gdzie, podobnie jak w zależnościach (2.6) i (2.7), k określa węzeł siatki i w ogólności zmienia się² w zakresie od 1 do K. Wymnażając zależności (2.17) i (2.18) obustronnie przez Δ i zapisując je dla wszystkich węzłów siatki otrzymuje się następujące układy równań:

$$-[H_y(1+0.5) - \mathbf{H}_y(1-0.5)] = j\omega\Delta\varepsilon_0\varepsilon_r(1)E_x(1)$$

$$-[H_y(2+0.5) - H_y(2-0.5)] = j\omega\Delta\varepsilon_0\varepsilon_r(2)E_x(2)$$

$$:$$

$$-[H_y(k+0.5) - H_y(k-0.5)] = j\omega\Delta\varepsilon_0\varepsilon_r(k)E_x(k)$$

$$:$$

$$-[H_y(K+0.5) - H_y(K-0.5)] = j\omega\Delta\varepsilon_0\varepsilon_r(K)E_x(K)$$
(2.19)

$$\begin{bmatrix} E_x(2) - E_x(1) \end{bmatrix} = -j\omega\Delta\mu_0\mu_r(1+0.5)H_y(1+0.5) \\ \begin{bmatrix} E_x(3) - E_x(2) \end{bmatrix} = -j\omega\Delta\mu_0\mu_r(2+0.5)H_y(2+0.5) \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} E_x(k+1) - E_x(k) \end{bmatrix} = -j\omega\Delta\mu_0\mu_r(k+0.5)H_y(k+0.5) \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} E_x(K) - E_x(K-1) \end{bmatrix} = -j\omega\Delta\mu_0\mu_r(K-0.5)H_y(K-0.5) \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_x(K+1) - E_x(K) \end{bmatrix} = -j\omega\Delta\mu_0\mu_r(K+0.5)H_y(K+0.5) \quad (2.20)$$

Występujące w powyższych równaniach wyróżnione tłustym drukiem próbki pól $H_y(1-0.5)$ oraz $E_x(K+1)$ reprezentują zdyskretyzowane pola odpowiednio z pozycji $-\frac{\Delta}{2}$ i $K \cdot \Delta$, a więc nie występujące w oryginalnym problemie (patrz rys. 2.3). Ich obecność w powyższych równanich ukazuje potrzebę sformułowania *warunków brzegowych*, których obecność jest niezbędna do wyliczenia pozostałych próbek pól siatki Yee.



Rysunek 2.3: Dyskretyzacja przestrzeni dla problemu *FDFD* uwzględniająca warunki brzegowe na krańcach siatki.

 $^{^2}$ Możliwa zmienność indeksu k determinowana jest istnieniem odpowiednich próbek pól, co widoczne jest na rys. 2.1.

Aby zestaw rówanań (2.19), (2.20) można było rozwiązać w dziedzinie częstotliwości, zdefiniowane zostaną dyskretne wektory pól \mathbf{e} i \mathbf{h} będące wektorami, których elementy na pozycjach 1...K zawierają odpowiednio: próbki pól elektrycznych z węzłów od 1 do K siatki podstawowej oraz próbki pól magnetycznych z węzłów od 1.5 do K + 0.5 siatki dualnej. Wykorzystując tak sformułowane wektory próbek pól równania (2.19) i (2.20) można zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} H_y(0.5) \\ 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_y(1.5) \\ H_y(2.5) \\ \vdots \\ H_y(K-0.5) \\ H_y(K+0.5) \end{bmatrix} =$$
(2.21)
$$j\omega\Delta\varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_r(1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r(2) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \varepsilon_r(K-1) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_r(K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(1) \\ E_x(2) \\ \vdots \\ E_x(K-1) \\ E_x(K) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\\vdots\\E_{x}(K+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\\vdots\\\vdots & \ddots & \ddots & -1 & 1\\0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x}(1)\\E_{x}(2)\\\vdots\\E_{x}(K-1)\\E_{x}(K) \end{bmatrix} =$$
(2.22)
$$\begin{bmatrix} \mu_{r}(1+0.5) & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & \mu_{r}(2+0.5) & \ddots & 0 & 0\\\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \ddots & \mu_{r}(K-0.5) & 0\\0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{r}(K+0.5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{y}(1.5)\\H_{y}(2.5)\\\vdots\\H_{y}(K-0.5)\\H_{y}(K+0.5) \end{bmatrix}$$

Wprowadzając dyskretne macierze rotacji \mathbf{R}_E , \mathbf{R}_H , dyskretne macierze materiałowe \mathbf{D}_{ε} , \mathbf{D}_{μ} oraz wektory \mathbf{h}_b i \mathbf{e}_b zawierające warunki brzegowe w postaci próbek $H_y(0.5)$ i $E_x(K+1)$ powyższe równania zapisać można jako:

$$\mathbf{h}_b + \mathbf{R}_H \mathbf{h} = j \omega \mathbf{D}_{\varepsilon} \mathbf{e} \tag{2.23}$$

$$\mathbf{e}_b + \mathbf{R}_E \mathbf{e} = -j\omega \mathbf{D}_\mu \mathbf{h} \tag{2.24}$$

gdzie:

$$\mathbf{R}_{H} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(2.25)
$$\mathbf{R}_{E} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
(2.26)

$$\mathbf{D}_{\mu} = \Delta \mu_{0} \begin{bmatrix} \mu_{r}(1+0.5) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{r}(2+0.5) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \mu_{r}(K-0.5) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{r}(K+0.5) \end{bmatrix}$$
(2.27)
$$\mathbf{D}_{\varepsilon} = \Delta \varepsilon_{0} \begin{bmatrix} \varepsilon_{r}(1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{r}(2) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{r}(K-1) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{r}(K) \end{bmatrix}$$
(2.28)

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} H_y(1.5) \\ H_y(2.5) \\ \vdots \\ H_y(K - 0.5) \\ H_y(K + 0.5) \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} E_x(1) \\ E_x(2) \\ \vdots \\ E_x(K - 1) \\ E_x(K) \end{bmatrix}$$
(2.29)
$$\mathbf{h}_b = \begin{bmatrix} H_y(0.5) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ E_x(K + 1) \end{bmatrix}$$
(2.30)

Dyskretne operatory rotacji \mathbf{R}_E oraz $\mathbf{R}_H = \mathbf{R}_E^T$ są odpowiednikami operatora rotacji dla równań Maxwella w przestrzeni ciągłej (2.1). Macierze materiałowe \mathbf{D}_{ε} oraz \mathbf{D}_{μ} zawierają spróbkowane wzdłuż osi z wartości parametrów ośrodka wypełniającego przestrzeń ciągłą. Wraz z wektorami \mathbf{e}_b i \mathbf{h}_b zapewniającymi warunki brzegowe dla problemu dyskretnego opisanego zależnościami (2.24) oraz (2.23), operatory \mathbf{R}_E i \mathbf{R}_H oraz macierze \mathbf{D}_{ε} i \mathbf{D}_{μ} umożliwiają rozwiązanie równań Maxwella zapisanych na siatce Yee – tzw. dyskretnych lub siatkowych równań Maxwella.

Aby rozwiązać zdefiniowany w dziedzinie częstotliwości dla przestrzeni Ω problem dyskretny, opisany zależnościami (2.23) oraz (2.24), należy określić wartości wektorów \mathbf{e}_b i \mathbf{h}_b tak, aby zdefiniowane w oparciu o nie *dyskretne równania Maxwella* jak najlepiej odwzorowywały odpowiadający im problem ciągły. Warunek brzegowy można sformułować biorąc pod uwagę zachowanie się pola na brzegu dziedziny obliczeniowej (np. ścianki elektryczne, magnetyczne) lub warunek wypromieniowania modelujący otwartą przestrzeń.

Poszukiwanie częstotliwości rezonansowych i rozkładów pól

Jedno z możliwych sformułowań równań FDFD zakłada, że rozważana struktura nie jest pobudzana sygnałem zewnętrznym. Rozwiązanie problemu określa drgania swobodne systemu. Załóżmy, że w przestrzeni ciągłej znajdują się idealne ścianki magnetyczna i elektryczna będące płaszczyznami ustawionymi odpowiednio w $z = -\frac{\Delta}{2}$ i $z = K\Delta$ (rys. 2.4). W ten sposób utworzony został jednowymiarowy rezonator, którego jeden koniec jest zwarty, a drugi rozwarty. Uwzględnienie obecności obu ścianek w *dyskretnych równaniach Maxwella* sprowadza się do wyzerowania próbek $H_y(0.5)$ i $E_x(K+1)$ w zależnościach (2.21) oraz (2.22), co pozwala zapisać je w następującej postaci:

$$\mathbf{R}_H \mathbf{h} = j \omega \mathbf{D}_{\varepsilon} \mathbf{e} \tag{2.31}$$

$$\mathbf{R}_E \mathbf{e} = -j\omega \mathbf{D}_{\mu} \mathbf{h} \tag{2.32}$$



Rysunek 2.4: Siatka Yee problemu jednowymiarowego zakończonego ścianką magnetyczną i elektryczną (opis w tekście).

Przeprowadzając proste przekształcenia algebraiczne i zapisując powyższe równania w postaci systemu pierwszego $rzedu^3$ uzyskuje się następującą zależność macierzową:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-1}\mathbf{R}_{H} \\ -\mathbf{D}_{\mu}^{-1}\mathbf{R}_{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}$$
(2.33)

Powyższy układ równań tworzy problem własny o ogólnej postaci:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{2.34}$$

gdzie $\lambda = j\omega$ jest wartością własną, a $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^T & \mathbf{h}^T \end{bmatrix}^T$ odpowiadającym jej wektorem własnym. Rozwiązaniem problemu własnego jest zbiór wartości i wektorów własnych (λ_i, \mathbf{x}_i), gdzie indeks *i* oznacza *i*-te rozwiązanie, spełniających zależność (2.34), przy czym liczba możliwych rozwiązań równa jest *liczbie zmiennych stanu* zagadnienia własnego (2.33), a więc rozmiarowi macierzy **A**. Pary (λ_i, \mathbf{x}_i) otrzymać można rozwiązując problem własny (2.34) metodą bezpośrednią, która jest dokładna i pozwala otrzymać wszystkie wartości i wektory własne, lecz niepraktyczna ze względu na wysoki koszt numeryczny, porównywalny z kosztem odwracania macierzy **A**. Ponieważ w metodzie różnic skończonych problemy opisane są zwykle dużą liczbą zmiennych, znacznie częściej stosuje się algorytmy iteracyjne [2, 18, 52, 72] pozwalające uzyskać kilka wybranych wartości i wektorów własnych przy dużo niższym koszcie numerycznym.

W przypadku rozważanego rezonatora opisanego równaniami (2.33) pary $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$ reprezentują pulsacje rezonansowe ω_i wraz z odpowiadającymi im rozkładami pól \vec{E} i \vec{H} w postaci wektorów \mathbf{e}_i oraz \mathbf{h}_i . Ponieważ koszt numeryczny rozwiązania problemu (2.34) rośnie wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy \mathbf{A} , znacznie częściej używa się równań (2.31), (2.32) prowadzących do postaci systemu drugiego rzędu:

$$\mathbf{D}\varepsilon^{-1}\mathbf{R}_H\mathbf{D}_\mu^{-1}\mathbf{R}_E\cdot\mathbf{e} = \omega^2\mathbf{e} \tag{2.35}$$

W powyższym problemie własnym *liczba zmiennych stanu*, którymi w (2.35) są próbki pola \vec{H} , jest dwukrotnie mniejsza niż w problemie (2.33), gdzie zmiennymi stanu są próbki pól \vec{E} i \vec{H} . W konsekwencji rozmiar macierzy **A** jest dwukrotnie mniejszy, niż w przypadku zapisania równań (2.31) i (2.32) jako system pierwszego rzędu, co znacznie obniża koszt numeryczny związany z otrzymaniem par rozwiązań (ω_i^2, \mathbf{e}_i). Warto przy tym zaznaczyć, że wektor \mathbf{h}_i , który jest niezbędny dla kompletności rozwiązania, związany z rozkładem próbek pola elektrycznego \mathbf{e}_i , można łatwo uzyskać przekształcając (2.32) do następującej zależności:

$$\mathbf{h}_{i} = -\frac{1}{j\omega_{i}} \mathbf{D}_{\mu}^{-1} \mathbf{R}_{E} \cdot \mathbf{e}_{i}$$
(2.36)

 $^{^3}Systemem pierwszego rzędu określa się układ równań różnicowych, w którym zmienna (w tym przypadku częstotliwość) występuje w pierwszej potędze.$

Problem deterministyczny

Alternatywne sformułowanie metody FDFD uzyskuje się dla stanu ustalonego z wymuszonym pobudzeniem.

Załóżmy, że w przestrzeni obliczeniowej Ω , której siatka Yee przedstawiona została na rys. 2.1, znajduje się nieskończenie rozległa ścianka magnetyczna przecinająca oś z w punkcie $z = -\frac{\Delta}{2}$, a struktura została pobudzona falą płaską w płaszczyźnie $z = K\Delta$ co można zapisać ustalając ją jako określoną wartość, np. 1. Dyskretne równania Maxwella zapisane w dziedzinie częstotliwości dla tak zdefiniowanej struktury przyjmują formę daną równaniami (2.23) oraz (2.24), w której $H_y(0.5) = 0$, zaś $E_x(K+1) = 1$. W rezultacie równania te można zapisać jako:

$$\mathbf{R}_H \mathbf{h} = j \omega \mathbf{D}_{\varepsilon} \mathbf{e} \tag{2.37}$$

$$\mathbf{e}_b + \mathbf{R}_E \mathbf{e} = -j\omega \mathbf{D}_\mu \mathbf{h} \tag{2.38}$$

gdzie wektor \mathbf{e}_b zawierający próbkę pola elektrycznego reprezentującego pole \vec{E} w płaszczyźnie $z = K\Delta$ przyjmuje formę:

$$\mathbf{e}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

Podobnie jak w przypadku zagadnienia własnego, z zależności (2.37) oraz (2.38) można utworzyć zarówno system pierwszego, jak i drugiego rzędu, przy czym problem drugiego rzędu zapisany jest za pomocą mniejszej liczby zmiennych. Proste podstawienia pozwalają z równań (2.37) i (2.38) sformułować system drugiego rzędu o postaci:

$$\left(-\frac{1}{j\omega}\mathbf{R}_E\mathbf{D}_{\varepsilon}^{-1}\mathbf{R}_H - j\omega\mathbf{D}_{\mu}\right)\mathbf{h} = \mathbf{e}_b$$
(2.40)

którego rozwiązanie dla określonej częstotliwości $f (\omega = 2\pi f)$, np. metodą eliminacji *Gaussa*, pozwoli uzyskać próbki pola \vec{H} , a z nich próbki pola elektrycznego za pomocą zależności (2.37) przekształconej do postaci:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{j\omega} \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-1} \mathbf{R}_{H} \mathbf{h}$$
(2.41)

Rozwiązanie układu równań (2.40) przy wykorzystaniu zależności (2.37) pozwala otrzymać próbki pól \vec{E} i \vec{H} w każdym z węzłów siatki Yee. Próbki te, zawarte w wektorach e oraz h, wyznaczają rozkład pola elektromagnetycznego spełniającego założone warunki brzegowe na określonej częstotliwości, który w najogólniejszym przypadku jest sumą fal padającej i odbitej. Wykorzystując wektory e i h można łatwo wyznaczyć interesujące z technicznego punktu widzenia parametry ilościowe analizowanej struktury, takie jak współczynniki odbicia w dowolnym przekroju czy też macierze rozproszenia fragmentu struktury [23].

2.3 Związki pomiędzy metodą różnic skończonych sformułowaną w dziedzinie częstotliwości i czasu

Choć na pierwszy rzut oka sformułowania FDTD (2.12), (2.13) i FDFD (2.35), (2.40) znacznie się różnią, występują pomiędzy nimi silne związki i zależności. Ich wspólnym mianownikiem jest, przeprowadzana w obu przypadkach, dyskretyzacja równań *Maxwella* na siatce Yee (2.6), (2.7). W efekcie tej dyskretyzacji powstanie ujednolicony zapis schematu różnicowego stanowiący punkt wyjścia do metody FDFD oraz schematu FDTD zapisanego za pomocą macierzy. Dzięki takiemu zabiegowi możliwe jest łatwe dodawanie do obu sformułowań algorytmu różnicowego FD takich elementów, które powiększają ich funkcjonalność i efektywność.

2.3.1 Klasyczna i macierzowa implementacja schematu FDTD

Najpopularniejsza implementacja metody FDTD [49,79] operuje bezpośrednio na próbkach pola \vec{E} i \vec{H} (patrz zależności (2.12) i (2.13)) zapisanych w postaci wektorów. W przypadku równań dla problemu jednowymiarowego przedstawionego na rys. 2.4, wektory te składają się z próbek pól w punktach siatki Yee w konkretnej chwili czasu, co można zapisać w postaci podobnej do (2.29) jako:

$$\mathbf{h}_{td}^{\tau+0.5} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{h}^{\tau+0.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ H_y^{\tau+0.5}(2.5) \\ H_y^{\tau+0.5}(2.5) \\ \vdots \\ H_y^{\tau+0.5}(K-0.5) \\ H_y^{\tau+0.5}(K+0.5) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_{td}^{\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\tau} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x^{\tau}(1) \\ E_x^{\tau}(2) \\ \vdots \\ E_x^{\tau}(K-1) \\ E_x^{\tau}(K) \\ 0 \end{bmatrix}$$
(2.42)

Różnice pomiędzy wektorami $\mathbf{h}_{td}^{\tau+0.5}$ i $\mathbf{h}^{\tau+0.5}$ sprowadzają się do uwzględnienia próbki $H_y(0.5)$, która dla wszystkich chwil czasu $\tau + 0.5$ przyjmuje wartość 0, zaś pomiędzy \mathbf{e}_{td}^{τ} i \mathbf{e}^{τ} do uwzględnienia $E_x(K+1)$ równej zero dla wszystkich τ . Dzięki temu zabiegowi w analizie *FDTD* uwzględnione zostaną warunki brzegowe, które w powyższym przypadku stanowi idealna ścianka magnetyczna i elektryczna umieszczone na brzegach dziedziny.

Alternatywna postać równań (2.12) i (2.13) przyjmuje formę:

$$\mathbf{h}_{td}^{\tau+0.5}(2:K+1) = \mathbf{h}_{td}^{\tau-0.5}(2:K+1) - \mathbf{d}_{\mu} \cdot * \left[\mathbf{e}_{td}^{\tau}(2:K+1) - \mathbf{e}_{td}^{\tau}(1:K)\right] (2.43)$$

$$\mathbf{e}_{td}^{\tau+1}(1:K) = \mathbf{e}_{td}^{\tau}(1:K) - \mathbf{d}_{\varepsilon} \cdot * \left[\mathbf{h}_{td}^{\tau+0.5}(2:K+1) - \mathbf{h}_{td}^{\tau+0.5}(1:K)\right] (2.44)$$

gdzie operator .* oznacza operację mnożenia element po elemencie, a $\mathbf{e}_{td}^{\tau+1}(1:K)$ jest wektorem utworzonym z elementów od 1 do K wektora $\mathbf{e}_{td}^{\tau+1}$. Wykorzystane w równaniach (2.43), (2.44) wektory \mathbf{d}_{ε} i \mathbf{d}_{μ} zawierają parametry materiałowe oraz kroki dyskretyzacji Δ, Δ_t przestrzeni Ω i zdefiniowane są następująco:

$$\mathbf{d}_{\mu} = \frac{\Delta_t}{\mu_0 \Delta} \begin{bmatrix} \mu_r^{-1}(1.5) \\ \mu_r^{-1}(2.5) \\ \vdots \\ \mu_r^{-1}(K+0.5) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d}_{\varepsilon} = \frac{\Delta_t}{\varepsilon_0 \Delta} \begin{bmatrix} \varepsilon_r^{-1}(1) \\ \varepsilon_r^{-1}(2) \\ \vdots \\ \varepsilon_r^{-1}(K) \end{bmatrix}$$
(2.45)

Algorytm FDTD zapisany za pomocą wektorów \mathbf{e}_{td} i \mathbf{h}_{td} sprowadza się do operacji odejmowania i mnożenia element po elemencie wektorów występujących w równaniach (2.43) i (2.44). Taka postać algorytmu w dalszej części pracy nazywać będziemy postacią klasyczną lub jawną.

Schemat *FDTD* można zapisać również wykorzystując zdefiniowane wcześniej macierzowe operatory różnicowe: dyskretne operatory rotacji \mathbf{R}_E , \mathbf{R}_H oraz dyskretne macierze materiałowe \mathbf{D}_{ε} , \mathbf{D}_{μ} . Zapisując zależności (2.43) i (2.44) za pomocą macierzy \mathbf{D}_{ε} i \mathbf{D}_{μ} otrzymuje się:

$$\mathbf{h}_{td}^{\tau+0.5}(2:K+1) = \mathbf{h}_{td}^{\tau-0.5}(2:K+1) - \Delta_t \mathbf{D}_{\mu}^{-1} \left[\mathbf{e}_{td}^{\tau}(2:K+1) - \mathbf{e}_{td}^{\tau}(1:K) \right] (2.46)$$
$$\mathbf{e}_{td}^{\tau+1}(1:K) = \mathbf{e}_{td}^{\tau}(1:K) - \Delta_t \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-1} \left[\mathbf{h}_{td}^{\tau+0.5}(2:K+1) - \mathbf{h}_{td}^{\tau+0.5}(1:K) \right] (2.47)$$

Dodatkowo, ponieważ zachodzą związki:

$$\mathbf{e}_{td}^{\tau}(2:K+1) - \mathbf{e}_{td}^{\tau}(1:K) = \mathbf{R}_{E}\mathbf{e}^{\tau}$$

$$\mathbf{h}_{td}^{\tau+0.5}(1:K) - \mathbf{h}_{td}^{\tau+0.5}(2:K+1) = \mathbf{R}_{H}\mathbf{h}^{\tau+0.5}$$
(2.48)

iteracyjne równania *FDTD* sprowadzają się do postaci:

$$\mathbf{h}^{\tau+0.5} = \mathbf{h}^{\tau-0.5} \quad -\Delta_t \mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{R}_E \mathbf{e}^{\tau} \tag{2.49}$$

$$\mathbf{e}^{\tau+1} = \mathbf{e}^{\tau} + \Delta_t \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-1} \mathbf{R}_H \mathbf{h}^{\tau+0.5}$$
(2.50)

Efektem przekształceń równań różnicowych algorytmu *FDTD* jest ich zapis, który wykorzystuje operatory różnicowe zdefiniowane dla problemu częstotliwościowego (2.25)-(2.28). Oznacza to, że schemat otwarty *FDTD* opisany zależnościami (2.12) oraz (2.13) wykorzystuje operatory różnicowe, choć w niejawnej postaci. Taką formę algorytmu *FDTD* nazywać będziemy w dalszej części macierzową lub operatorową.

2.3.2 Ujednolicony operatorowy zapis schematów różnicowych

Zależności (2.49) i (2.50) stanowiące sformułowanie macierzowe (operatorowe) algorytmu *FDTD* wyprowadzone ze sformułowania otwartego (patrz (2.12) oraz (2.13)) mają postać zbliżoną do równań opisujących to samo zagadnienie w dziedzinie częstotliwości (2.31),

(2.32). Prowadzi to do ścisłych zależności pomiędzy schematami różnicowymi w dziedzinie częstotliwości i czasu. Zapisując zdyskretyzowane równania *Maxwella* jako:

$$\mathbf{R}_H \mathbf{h} = \mathbf{D}_{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e} = \mathbf{D}_{\varepsilon} \dot{\mathbf{e}}$$
(2.51)

$$\mathbf{R}_{E}\mathbf{e} = -\mathbf{D}_{\mu}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{h} = -\mathbf{D}_{\mu}\dot{\mathbf{h}}$$
(2.52)

uzyskuje się równania stanowiące punkt wyjściowy metod *FDTD* i *FDFD*. Przejście do dziedziny częstotliwości, w której zakłada się harmoniczną zmienność pól, realizowane jest przy wykorzystaniu własności:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e} = j\omega\mathbf{e} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{h} = j\omega\mathbf{h} \tag{2.53}$$

W wyniku podstawienia powyższych zależności określających pochodną cząstkową próbek pól do (2.51) oraz (2.52), natychmiast uzyskuje się równania algorytmu *FDFD* (patrz (2.31) i (2.32)).

Z drugiej strony, przeprowadzając dyskretyzację osi czasu z krokiem Δ_t i wprowadzając wektory próbek pól istniejących w kolejnych chwilach, pochodną czasową w (2.51), (2.52) można aproksymować za pomocą *różnic centralnych* przyjmujących w tym przypadku następującą formę:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}^{\tau+1} - \mathbf{e}^{\tau}}{\Delta_t} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{h} = \frac{\mathbf{h}^{\tau+0.5} - \mathbf{h}^{\tau-0.5}}{\Delta_t}$$
(2.54)

Wykorzystując powyższe równania bez większego kłopotu uzyskuje się odpowiednik równań (2.51) oraz (2.52) zapisany w dziedzinie czasu, który może zostać łatwo przekształcony do postaci danej równaniami (2.49) i (2.50). Podstawiając (2.54) do (2.51) oraz (2.52) uzyskuje się:

$$\mathbf{R}_{H}\mathbf{h}^{\tau+0.5} = \mathbf{D}_{\varepsilon} \frac{\mathbf{e}^{\tau+1} - \mathbf{e}^{\tau}}{\Delta_{t}}$$
(2.55)

$$\mathbf{R}_{E}\mathbf{e}^{\tau} = -\mathbf{D}_{\mu}\frac{\mathbf{h}^{\tau+0.5} - \mathbf{h}^{\tau-0.5}}{\Delta_{t}}$$
(2.56)

Warto zauważyć, że tak jak klasyczny iteracyjny schemat FDTD ma swój macierzowy odpowiednik, równania FDFD (np. (2.31) i (2.32)) można zapisać w jawnej postaci, w której związki między próbkami są sumą ważoną sąsiadujących elementów wektorów pól.

Symetryzacja w problemach różnicowych

Zdyskretyzowane równania *Maxwella* o postaci danej zależnościami (2.51) i (2.52) mogą być zapisane zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości. Przydanym przekształceniem poprawiającym efektywność analizy metodami różnicowymi jest symetryzacja, która pozwala przekształcić (2.51) oraz (2.52) do symetrycznej postaci postaci wykorzystującej mniejszą liczbę *operatorów macierzowych*.

Rozważmy znormalizowane wektory zawierające próbki pól \vec{E} i \vec{H} o postaci:

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{D}_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \mathbf{e} \tag{2.57}$$

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{D}_{\mu}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h} \tag{2.58}$$

Podstawiając do (2.51), (2.52) wyznaczone z powyższych równań wektory **e** oraz **h** uzyskuje się następujące zalezności:

$$\mathbf{R}_H \mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{D}_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{e}}$$
(2.59)

$$\mathbf{R}_{E} \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{e}} = -\mathbf{D}_{\mu}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{h}}$$
(2.60)

Wymnażając (2.59) oraz (2.60) lewostronnie przez odpowiednio $\mathbf{D}_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}$ oraz $\mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}$ otrzymuje się zsymetryzowaną postać dyskretnych równań *Maxwella*:

$$\tilde{\mathbf{R}}_H \tilde{\mathbf{h}} = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{e}}$$
(2.61)

$$\tilde{\mathbf{R}}_{E}\tilde{\mathbf{e}} = -\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{h}}$$
(2.62)

gdzie $\tilde{\mathbf{R}}_{H} = \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_{H} \mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}$ i $\tilde{\mathbf{R}}_{E} = \tilde{\mathbf{R}}_{H}^{T} \mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_{E} \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}$ są zsymetryzowanymi dyskretnymi operatorami rotacji.

Symetryczna postać siatkowych równań Maxwella zapisana jest wyłącznie za pomocą macierzy $\tilde{\mathbf{R}}_E$ i $\tilde{\mathbf{R}}_H$ oraz znormalizowanych wektorów $\tilde{\mathbf{e}}$ i $\tilde{\mathbf{h}}$. W efekcie przekształcenie (2.61), (2.62) do problemu numerycznego sformułowanego w dziedzinie częstotliwości lub czasu wymagać będzie mniejszej liczby operacji numerycznych. Co więcej, elementy wektorów $\tilde{\mathbf{e}}$ i $\tilde{\mathbf{h}}$ reprezentujące znormalizowane wartości próbek pól \vec{E} i \vec{H} będą miały wartości podobnego rzędu.

Sformułowanie uwzględniające straty materiałowe

W praktycznych zagadnieniach elektrodynamiki obliczeniowej, obok takich parametrów materiałowych jak przenikalność elektryczna i magnetyczna, bardzo często pojawiają się straty reprezentowane przez przewodność elektryczną σ . Dyskretne równania Maxwella przyjmą wtedy postać:

$$\mathbf{R}_{H}\mathbf{h} = \mathbf{D}_{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e} + \mathbf{D}_{\sigma}\mathbf{e}$$
(2.63)

$$\mathbf{R}_{E}\mathbf{e} = -\mathbf{D}_{\mu}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{h}$$
(2.64)

gdzie macierz przewodności elektrycznej \mathbf{D}_{σ} zawiera spróbkowane w węzłach siatki Yee wartości σ wraz z krokiem dyskretyzacji przestrzeni Δ .

O ile sformułowanie w dziedzinie częstoliwości wykorzystujące powyższe równania nie nastręcza trudności, to przejście do dziedziny czasu wymaga odpowiedniej staranności. Przeprowadzając dyskretyzację osi czasu z krokiem Δ_t dla zależności (2.63), (2.64) otrzymuje się:

$$\mathbf{R}_{H}\mathbf{h}^{\tau+0.5} = \mathbf{D}_{\varepsilon}\frac{\mathbf{e}^{\tau+1} - \mathbf{e}^{\tau}}{\Delta_{t}} + \mathbf{D}_{\sigma}\frac{\mathbf{e}^{\tau+1} + \mathbf{e}^{\tau}}{2}$$
(2.65)

$$\mathbf{R}_{E}\mathbf{e}^{\tau} = -\mathbf{D}_{\mu}\frac{\mathbf{h}^{\tau+0.5} - \mathbf{h}^{\tau-0.5}}{\Delta_{t}}$$
(2.66)

Wyrażenie $\mathbf{D}_{\sigma}\mathbf{e}$ z (2.63) po przejściu do dziedziny czasu (2.65) zapisane zostało za pomocą średniej wartości próbek pól. Jest to związane z koniecznością posługiwania się we wszystkich składnikach tą samą chwilą czasu, która jak łatwo zauważyć wynosi $\tau + 0.5$. Dla zachowania synchronizmu czasowego ostatni składnik w (2.65) powinien wynosić:

$$\mathbf{D}_{\sigma}\mathbf{e}^{\tau+0.5} = \mathbf{D}_{\sigma}\frac{\mathbf{e}^{\tau+1} + \mathbf{e}^{\tau}}{2}$$

Iteracyjny schemat *FDTD* dla przypadku stratnego przedstawia się więc następująco:

$$\mathbf{e}^{\tau+1} = \left(\frac{\mathbf{D}_{\varepsilon}}{\Delta_t} + \frac{\mathbf{D}_{\sigma}}{2}\right)^{-1} \left(\frac{\mathbf{D}_{\varepsilon}}{\Delta_t} - \frac{\mathbf{D}_{\sigma}}{2}\right) \mathbf{e}^{\tau} + \left(\frac{\mathbf{D}_{\varepsilon}}{\Delta_t} + \frac{\mathbf{D}_{\sigma}}{2}\right)^{-1} \mathbf{R}_H \mathbf{h}^{\tau+0.5}$$
(2.67)

$$\mathbf{h}^{\tau+0.5} = \mathbf{h}^{\tau-0.5} - \Delta_t \mathbf{D}_{\mu}^{-1} \mathbf{R}_E \mathbf{e}^{\tau}$$
(2.68)

2.3.3 Własności klasycznych i macierzowych schematów różnicowych

Zależności istniejące pomiędzy algorytmami *FDTD* i *FDFD* pozwalają na zamienne stosowanie ich jawnych (klasycznych) i macierzowych (operatorowych) sformułowań bez utraty dokładności czy ogólności analizy. Zarówno jawne jak i macierzowe sformułowanie algorytmów różnicowych charakteryzują się jednak określonymi własnościami, które ułatwiają opis mechanizmów występujących w metodach *FDTD* i *FDFD* oraz efektywną implementację schematów różnicowych w postaci programów komputerowych.

Złożoność obliczeniowa

Jednym z ważniejszych parametrów praktycznych metod numerycznych jest szybkość z jaką uzyskuje się rozwiązanie. Z tego punktu widzenia różnice pomiędzy schematami klasycznym i macierzowym są znaczne.

W schemacie otwartym opisanym równaniami (2.43) i (2.44) w każdej iteracji przeprowadzanych jest 4K operacji dodawania (odejmowania) i 2K mnożeń. W sformułowaniu macierzowym zaś każda iteracja wymaga w przybliżeniu 4K i 6K operacji odpowiednio dodawania i mnożenia. Zwiększona liczba mnożeń związana jest z zamianą operacji odejmowania dwóch wektorów na mnożenie macierz razy wektor (2.48).

Różnice te oznaczają, że jawny schemat *FDTD* jest bardziej efektywny numerycznie, niż jego macierzowy odpowiednik, przy czym przewaga ta dodatkowo wzrasta w przypadku algorytmów dwu- i trójwymiarowych. Z tego względu w komercyjnych i naukowych implementacjach *FDTD* przeważa sformułowanie jawne. Z drugiej strony, zapis macierzowy jest bardziej uniwersalny i umożliwia pogłębioną analizę teoretyczną. Należy podkreślić, że niższa efektywność zapisu operatorowego nie jest przeszkodą, bo każdy schemat macierzowy można zamienić na schemat jawny.

Stabilność algorytmu FDTD w ujęciu operatorowym

Użyteczność zapisu macierzowego i jego przewagę nad sformułowaniem klasycznym w analizie teoretycznej pokazana zostanie na przykładzie badania stabilności schematu otwartego. Zagadnienie stabilności sformułowania iteracyjnego FDTD, omówione w części 2.2.1 niniejszej pracy, opisuje zasadę dobierania odpowiedniego kroku czasowego w oparciu o krok dyskretyzacji siatki (2.43) oraz parametry materiałowe analizowanej struktury. Podejście takie, choć pozwala określić maksymalny krok Δ_t , nie umożliwia określenia maksymalnego kroku w przypadku złożonych modyfikacji algorytmu FDTD. W tej sytuacji stabilność schematu bardzo często potwierdza się drogą eksperymentu numerycznego, czego nie można uznać za w pełni satysfakcjonujący dowód.

Wspomniane powyżej ograniczenia można łatwo pokonać wykorzystując sformułowanie operatorowe metody FDTD oraz teorię stabilności schematów FDTD przedstawioną w [55]. Zgodnie z nią, iteracyjny algorytm FDTD jest stabilny, jeżeli operator **L** systemu drugiego rzędu, który uzyskuje się z równań różnicowych tworzących sformułowanie operatorowe schematu FDTD, o postaci:

$$\mathbf{L}\mathbf{h} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{h} = 0 \tag{2.69}$$

jest symetryczny i dodatnio półokreślony, a krok Δ_t spełnia zależność [55]:

$$\Delta_t \leqslant \frac{2}{\sqrt{||\mathbf{L}||}} \tag{2.70}$$

Aby uzyskać równanie o postaci (2.69) należy zależności (2.51) oraz (2.52) przekształcić do problemu różnicowego drugiego rzedu. Wykorzystując proste podstawienia uzyskuje się następujące równanie:

$$\mathbf{R}_E \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-1} \mathbf{R}_H \mathbf{h} + \mathbf{D}_{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{h} = 0$$
(2.71)

Podstawiając $\mathbf{h} = \mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{h}}$ oraz wymnażając równanie (2.71) lewostronnie przez $\mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}$ otrzy-

muje się:

$$\underbrace{\mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{R}_{E}\mathbf{D}_{\varepsilon}^{-1}\mathbf{R}_{H}\mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}}_{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{h}} + \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\tilde{\mathbf{h}} = 0$$
(2.72)

Analizując operator **L**, który w przypadku macierzowego sformułowania *FDTD* bez modyfikacji wynosi $\mathbf{L} = \mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_E \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-1} \mathbf{R}_H \mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}$, natychmiast potwierdzić można stabilność algorytmu *FDTD*, jako, że symetria i dodatnia półokreśloność **L** zagwarantowana jest, gdy $\mathbf{R}_E = \mathbf{R}_H^T$ [55,81]. W takim przypadku bowiem $\mathbf{L} = (\mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_E \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}) (\mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_E \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}})^T$. Z algebry liniowej [52] wiadomo, że iloczyn dwóch macierzy, z których jedna jest transpozycją drugiej, jest macierzą symetryczną o nieujemnych wartościach własnych.

W klasycznym algorytmie FDTD warunek ograniczający krok dyskretyzacji osi czasu Δ_t w oparciu o normę operatora **L** może być stosowany zamiennie z warunkiem Couranta (2.14). Jednak w rzeczywistości warunek (2.70) jest dużo bardziej ogólny, gdyż umożliwia dodatkowo obliczenie Δ_t zapewniającego stabilność w przypadku modyfikacji schematu FDTD, takich jak schematy lokalne [7, 15, 22, 25, 66, 70, 79] czy techniki prezentowane w niniejszej pracy [31, 43, 60, 81].

Możliwości zwiększania efektywności schematów różnicowych

Za operatorowym sformułowaniem metod różnicowych przemawiają duże możliwości rozbudowywania i ulepszania technik poprawiających ich funkcjonalność i efektywność. Dzięki własnościom macierzowych algorytmów FDTD i FDFD możliwa jest pełna kontrola nad stabilnością algorytmu, a w przypadku, gdy dana modyfikacja równań różnicowych powoduje lokalną niestabilność – wymuszenie stabilności poprzez zapewnienie symetrii w operatorze **L** w równaniu (2.71). Proces symetryzacji może odbywać się zarówno poprzez zmiany w modyfikacji równań różnicowych powodującej niestabilne działanie algorytmu, jak i poprzez przeprowadzenie symetryzacji wymuszonej, tj. wykonaniu działania:

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{L} + \mathbf{L}^T}{2} \tag{2.73}$$

Metoda ta z powodzeniem może być zastosowana podczas ulepszania zarówno schematów lokalnych [66,67] jak i lokalnego zmieniania gęstości lub układu współrzędnych siatki Yee⁴ [60,78].

Inne możliwości zwiększenia efektywności analizy wiążą się z macierzowymi przekształceniami, takimi jak projekcja ortonormalna. Najprostsze jej zastosowanie pozwala za pomocą podstawowych przekształceń algebraicznych na łatwą implementację metod różnicowych [83], swobodne usuwanie próbek pól, które nie biorą udziału w obliczeniech, czy też łączenie ze soba różnych siatek Yee w jednej analizie (patrz rozdział 3).

 $^{^{4}}$ Zwykle, z powodu wysokich kosztów numerycznych, nie przeprowadza się symetryzacji całego problemu różnicowego, lecz jedynie tego fragmentu macierzy **L**, który zawiera modyfikację powodującą niestabilność.

Zaawansowane techniki projekcji ortonormalnej wykorzystują cząstkowe rozwiązania problemów różnicowych w dziedzinie częstotliwości (np. rozkłady pól) w celu znacznego zmniejszenia liczby zmiennych w schematach *FDTD* i *FDFD* [39, 42, 54, 86, 87]. Techniki te stanowią również jedno z głównych narzędzi wykorzystanych w niniejszej rozprawie doktorskiej.

2.4 Dwu- i trójwymiarowe algorytmy różnicowe

Jednowymiarowa analiza metodami *FDTD* i *FDFD*, choć wygodna na etapie prezentacji metod różnicowych, posiada ograniczoną stosowalność w praktycznych zagadnieniach elektrodynamiki obliczeniowej. Powodem tego jest konieczność założenia określonej zmienności pól w dwóch kierunkach, co znacznie ogranicza możliwości analizy struktur. Z tego względu najczęściej używane są dwu- i trójwymiarowe algorytmy różnicowe.

Zapisując równania *Maxwella* dla ciągłej przestrzeni obliczeniowej (2.1) z rozbiciem na składowe pól otrzymujemy następujące zależności:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$$
(2.74)

Dla wygody powyższe równania podaje się często w uporządkowanej postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}$$
(2.76)

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$
(2.77)

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, siatkowe równania *Maxwella* uzyskuje się w wyniku przestrzennej dyskretyzacji równań (2.76) i (2.77) z krokiem Δ w każdym z kierunków⁵. Z uwagi na ograniczenie błędów wynikających z przybliżenia pochodnych

 $^{^{5}}$ Oczywiście możliwe jest także użycie innego kroku dyskretyzacji w każdym kierunku


Rysunek 2.5: Pojedyncza komórka siatki Yee. Miejsca próbkowania każdej ze składowych pól elektrycznych oznaczono czarnymi, zaś pól magnetycznych czerwonymi kropkami. Po prawej stronie to samo oczko siatki Yee zawierające próbki składowych pól reprezentowane za pomocą wektorów.

cząstkowych *różnicami centralnymi* także i w tym przypadku dyskretyzacja odbywa się w punktach przestrzeni tworzących siatkę Yee.

2.4.1 Trójwymiarowa siatka Yee

Pojedyncze oczko siatki Yee w przestrzeni trójwymiarowej przedstawiono na rys. 2.5. Na środku każdej z krawędzi próbkowana jest wartość składowej pola elektrycznego, która jest współliniowa z daną krawędzią. W punktach leżących na środku ścian sześcianu dyskretyzowane są pola magnetyczne, przy czym próbki H_x , H_y i H_z pobierane są na tych ściankach, które są równoległe do płaszczyzn odpowiednio x = 0, y = 0 i z = 0. W celu lepszego zilustrowania wzajemnego ułożenia pól na rys. 2.5 przedstawiono także to samo oczko siatki Yee, w którym spróbkowane składowe wektorów pól reprezentowane są za pomocą wektorów.

Widoczne na rys. 2.5 spróbkowane składowe pól \vec{E} i \vec{H} tworzą linie siatki Yee – siatkę podstawową oraz siatkę dualną. Węzły obu siatek są przesunięte względem siebie o $\frac{\Delta}{2}$ w każdym z kierunków. Zbudowana z wezłów pola elektrycznego i magnetycznego siatka Yee została przedstawiona na rys. 2.6.

Numeracja węzłów siatki Yee

Odpowiednia numeracja węzłów siatki i spróbkowanych składowych pól jest ważnym, z punktu widzenia konstrukcji operatorów dyskretnych, elementem różnic skończonych. Istotne są również późniejsze własności tak skonstruowanych macierzy i dlatego wygodnie jest



Rysunek 2.6: Siatka Yee dla przypadku trójwymiarowego. Węzły siatki pola elektrycznego (*siatka podstawowa*) i magnetycznego (*siatka dualna*) przesunięte są względem siebie o $\Delta/2$ w każdym z kierunków.

przyjąć oznaczenie węzłów wprowadzone w [83].

Węzły siatki podstawowej i dualnej określone są jednoznacznie za pomocą indeksu trójelementowego (i, j, k) lub indeksu liniowego n. Indeksy numerują kolejne węzły siatki w kierunkach x, y i z, a więc węzeł siatki podstawowej i siatki dualnej o indeksie (i, j, k) jest jednocześnie punktem o współrzednych odpowiednio (x_i, y_j, z_k) i $(x_i + \frac{\Delta}{2}, y_j + \frac{\Delta}{2}, z_k + \frac{\Delta}{2})$, przy czym zachodzą zależności:

$$x_i\Big|_{i=1\dots I} = (i-1)\Delta$$
 $y_j\Big|_{j=1\dots J} = (j-1)\Delta$ $z_k\Big|_{k=1\dots K} = (k-1)\Delta$ (2.78)

Alternatywnym okresleniem pozycji węzła jest indeks liniowy n, który związany jest z jego indeksami (i, j, k) poprzez równanie:

$$n = i + (j - 1)I + (k - 1)IJ$$
(2.79)

Ponieważ maksymalne wartości indeksów wynoszą I, J oraz K, numer węzła zmienia się w zakresie od 1 do N = IJK, gdzie N jest liczbą węzłów siatki podstawowej oraz siatki

dualnej. Przykładowe określenie indeksów trójelementowego i liniowego przedstawiono na rys. 2.7.



Rysunek 2.7: Określanie indeksu trójelementowego i liniowego w siatce Yee, w której całkowita liczba węzłów wynosi N = 125 (I = 5, J = 5, K = 5). Na indeks liniowy o indeksie (4,3,5) składa się suma: *i* węzłów w kierunku osi x (4), $(j - 1) \cdot I$ węzłów w kierunku osi y (2 · 5 = 10) oraz $(k - 1) \cdot IJ$ węzłów w kierunku osi z (4 · 25 = 100). Pozycja punktu w przestrzeni odpowiadająca węzłowi 125 siatki podstawowej to $(3\Delta, 2\Delta, 4\Delta)$, a punktu odpowiadającego węzłowi 125 siatki dualnej to $(3\Delta + \frac{\Delta}{2}, 2\Delta + \frac{\Delta}{2}, 4\Delta + \frac{\Delta}{2})$.

Wzajemne ułożenie próbek pól na siatce Yee

Wzajemne ułożenie składowych pól dla pojedynczego węzła siatki Yee widoczne jest na rys. 2.8. Wektory pola elektrycznego przypisane do węzła *n siatki podstawowej* $(E_x(n), E_y(n), E_z(n))$ mają w nim swój początek i są skierowane w kierunku wzrastających indeksów (i, j



Rysunek 2.8: Rozmieszczenie spróbkowanych składowych pól na siatce Yee związanych z węzłem *n siatki podstawowej i dualnej*. Wektory reprezentujące próbki $E_x(n), E_y(n), E_z(n)$ "wychodzą" z węzła *n siatki podstawowej*, podczas gdy wektory próbek $H_x(n), H_y(n), H_z(n)$ "wchodzą" do węzła *n siatki dualnej*.

oraz k). W tę samą stronę skierowane są próbki $H_x(n)$, $H_y(n)$ i $H_z(n)$ pola magnetycznego, dla których węzeł *n siatki dualnej* stanowi ich koniec, a same wektory przecinają pod kątem prostym płaszczyzny styczne do wektorów $E_x(n)$, $E_y(n)$ oraz $E_z(n)$.

Ponieważ wzajemne ułożenie próbek składowych pól i węzłów siatki podstawowej i dualnej jest jednoznaczne, każda z próbek $H_x(n)$, $H_y(n)$ i $H_z(n)$ związana jest również z węzłem n siatki podstawowej (patrz rys. 2.8). Z tego względu do zdefiniowania konkretnej próbki składowej pola elektrycznego lub magnetycznego użyć można wyłącznie węzłów siatki podstawowej.

Interpretacja fizyczna próbek pól w siatce Yee

Siatka Yee wprowadzona oryginalnie w 1966 roku stanowiła początkowo zbiór punktów (patrz rys. 2.5), w których dyskretyzować należy składowe pól \vec{E} i \vec{H} występujące w równaniach *Maxwella* (2.74), (2.75). Jednak już w 1977 roku opublikowana została implementacja metod różnicowych bazująca na sformułowaniu całkowym równań *Maxwella* [83].



Rysunek 2.9: Fragment komórki Yee zawierający węzły *siatki głównej* oraz miejsca próbkowania składowych pól, tu zobrazowanych w postaci wektorów.

Prezentowane w niniejszej pracy techniki wykorzystują zarówno różniczkową, jak i całkową interpretację schematów różnicowych.

Przedstawiony na rys. 2.9 fragment komórki Yee zawiera zarówno węzły *siatki głównej* jak i miejsca próbkowania są składowych pól (patrz rys. 2.5). Biorąc pod uwagę miejsca, w których należy dyskretyzować składowe pola elektrycznego, przeprowadzona zostanie przykładowa dyskretyzacja jednej z zależności(2.74). Wykorzystując równanie o postaci:

$$-\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$
(2.80)

i stosując do niego różnice centralne [79] otrzymamy następujące równanie różnicowe:

$$-\mu_z(i,j,k)\frac{\partial H_z(i,j,k)}{\partial t} = \frac{E_y(i+1,j,k) - E_y(i,j,k)}{\Delta} - \frac{E_x(i,j+1,k) - E_x(i,j,k)}{\Delta} \quad (2.81)$$

gdzie $\mu_z(i, j, k)$ jest zdyskretyzowaną wartością przenikalności magnetycznej próbki $H_z(i, j, k)$.

Podobnie jak w przypadku problemu jednowymiarowego, pochodna czasowa próbki pola magnetycznego w punkcie środkowym związana jest z pochodnymi przestrzennymi pola elektrycznego. Przybliżenie pochodnych przestrzennych odbywa się za pomocą *różnic centralnych* wykorzystujących składowe pola elektrycznego spróbkowane w punktach leżących pomiędzy węzłami *siatki podstawowej* (patrz rys. 2.9).

Alternatywna, interpretacja schematów różnicowych bazuje na całkowej formie równania (2.80):

$$-\iint_{S} \mu \frac{\partial H_{z}}{\partial t} ds = \oint_{l} \vec{E} \cdot d\vec{l} =$$
(2.82)

Jeżeli S będzie powierzchnią, która na rys. 2.9 ograniczona jest węzłami n, n + 1, n + I, n + I + 1 siatki podstawowej, to powyższą zależność można zapisać przy użyciu próbek

składowych pól jako:

$$-\Delta^2 \mu_z(i,j,k) \frac{\partial H_z(i,j,k)}{\partial t} = E_y(i+1,j,k)\Delta - E_y(i,j,k)\Delta - E_x(i,j+1,k)\Delta + E_x(i,j,k)\Delta$$
(2.83)

Interpretacja całkowa schematów różnicowych używana jest w metodzie nazywanej techniką całek skończonych (ang. FIT - Finite Integration Technique) wprowadzonej i promowanej przez grupę Weilanda [60,80,81,83]. Jak łatwo jednak zauważyć, po podzieleniu obu stron przez Δ^2 , otrzymane równanie różnicowe jest identyczne z (2.81), a więc FIT jest tożsama z tradycyjną metodą różnic skończonych.

Różnice w interpretacji próbek składowych pól E i H wiążą się bezpośrednio z postacią równań (2.80), (2.82) stanowiących punkt wyjściowy dyskretyzacji. Z jednej strony dyskretyzacja postaci różniczkowej operuje na próbkach pól i parametrów materiałowych w punktach, a z drugiej podczas dyskretyzacji postaci całkowej zakłada się, że wcześniejsze próbki są średnimi wartościami pól pomiędzy węzłami na drodze Δ (pola elektryczne) lub średnimi strumieniami przechodzącymi przez powierzchnię Δ^2 (pola magnetyczne). Ten swoisty interpretacyjny dualizm nie powoduje różnic w wynikowym sformułowaniu różnicowych, które w obu przypadkach sprowadza się do identycznego wyrażenia. Umożliwia on natomiast przeprowadzenie modyfikacji algorytmów różnicowych, które w prosty sposób poprawiają efektywność i dokładność algorytmów FDTD i FDFD [31,66,67,79]. Do najbardziej znanych należa tzw. schematy lokalne pozwalające na określenie takich wartości zdyskretyzowanych parametrów materiałowych, które uwzględniają nie tylko wartość parametru w punkcie próbkowania, ale także jej zmiany w najbliższym sąsiedztwie [7,26,67].

W kontekście schematów lokalnych warto wspomnieć o interpretacji całkowej równań różnicowych wprowadzonej przez Przybyszewskiego [67], której podstawą jest równość:

$$\frac{1}{L} \int_{A}^{B} \frac{\partial}{\partial z} f(z) dz = \frac{f(B) - f(A)}{L}$$
(2.84)

Wynika z niej, że zależność używana w różnicach skończonych jako przybliżenie pochodnej (prawa strona równania (2.84)), jest równa w rzeczywistości średniej, po drodze L pomiędzy dwoma punktami A i B, wartości pochodnej funkcji f(z) (lewa strona (2.84)). Wartość lewej strony nie zależy od drogi, po której następuje całkowanie. Własność tą można wykorzystać np. do poprawy dokładności analizy poprzez łączenie rozwiązań analitycznych z siatką Yee [66].

2.4.2 Trójwymiarowy schemat różnicowy

Zdyskretyzowane na siatce Yee próbki pól \vec{E} i \vec{H} wykorzystuje się [83] do utworzenia zdyskretyzowanych równań *Maxwella* o postaci (2.51), (2.52). Zapisując równania różnicowe dla wszystkich próbek składowych pól z węzła n (patrz rys. 2.8) w formie, która dla próbek pól z rys. 2.9 przyjmuje postać (2.81), otrzymuje się następujący zestaw równań odpowiadający (2.74) oraz (2.75):

$$\begin{aligned} -\Delta\mu_{x}(i,j,k)\dot{H}_{x}(i,j,k) &= E_{z}(i,j+1,k) - E_{z}(i,j,k) - E_{y}(i,j,k+1) + E_{y}(i,j,k) \\ -\Delta\mu_{y}(i,j,k)\dot{H}_{y}(i,j,k) &= E_{x}(i,j,k+1) - E_{x}(i,j,k) - E_{z}(i+1,j,k) + E_{z}(i,j,k) \\ -\Delta\mu_{z}(i,j,k)\dot{H}_{z}(i,j,k) &= E_{y}(i+1,j,k) - E_{y}(i,j,k) - E_{x}(i,j+1,k) + E_{x}(i,j,k) \\ (2.85) \\ \Delta\varepsilon_{x}(i,j,k)\dot{E}_{x}(i,j,k) &= H_{z}(i,j,k) - H_{z}(i,j-1,k) - H_{y}(i,j,k) + H_{y}(i,j,k-1) \\ \Delta\varepsilon_{y}(i,j,k)\dot{E}_{y}(i,j,k) &= H_{x}(i,j,k) - H_{x}(i,j,k-1) - H_{z}(i,j,k) + H_{z}(i-1,j,k) \\ \Delta\varepsilon_{z}(i,j,k)\dot{E}_{z}(i,j,k) &= H_{y}(i,j,k) - H_{y}(i-1,j,k) - H_{x}(i,j,k) + H_{x}(i,j-1,k) \\ (2.86) \end{aligned}$$

Tworząc wektory próbek pól dla każdej ze składowych jako:

$$\mathbf{h}_{x} = \begin{bmatrix} H_{x}(1,1,1) \\ H_{x}(2,1,1) \\ \vdots \\ H_{x}(I,J,K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{x}(1) \\ H_{x}(2) \\ \vdots \\ H_{x}(N) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{h}_{y} = \begin{bmatrix} H_{y}(1) \\ H_{y}(2) \\ \vdots \\ H_{y}(N) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{h}_{z} = \begin{bmatrix} H_{z}(1) \\ H_{z}(2) \\ \vdots \\ H_{z}(N) \end{bmatrix}$$
(2.87)
$$\mathbf{e}_{x} = \begin{bmatrix} E_{x}(1,1,1) \\ E_{x}(2,1,1) \\ \vdots \\ E_{x}(I,J,K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x}(1) \\ E_{x}(2) \\ \vdots \\ E_{x}(N) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_{y} = \begin{bmatrix} E_{y}(1) \\ E_{y}(2) \\ \vdots \\ E_{y}(N) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_{z} = \begin{bmatrix} E_{z}(1) \\ E_{z}(2) \\ \vdots \\ E_{z}(N) \end{bmatrix}$$
(2.88)

równania (2.85) i (2.86) można zapisać dla wszystkich węzłów siatki Yee. W rezultacie otrzymuje się *dyskretne (siatkowe) równania Maxwella* o następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{R}_{z} & \mathbf{R}_{y} \\ \mathbf{R}_{z} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_{x} \\ -\mathbf{R}_{y} & \mathbf{R}_{x} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x} \\ \mathbf{e}_{y} \\ \mathbf{e}_{z} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\mu:x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\mu:y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\mu:z} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{x} \\ \mathbf{h}_{y} \\ \mathbf{h}_{z} \end{bmatrix}$$
(2.89)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}_{z}^{T} & -\mathbf{R}_{y}^{T} \\ -\mathbf{R}_{z}^{T} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{x}^{T} \\ \mathbf{R}_{y}^{T} & -\mathbf{R}_{x}^{T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{x} \\ \mathbf{h}_{y} \\ \mathbf{h}_{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\varepsilon:x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\varepsilon:y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\varepsilon:z} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x} \\ \mathbf{e}_{y} \\ \mathbf{e}_{z} \end{bmatrix}$$
(2.89)

gdzie macierze $\mathbf{D}_{\mu:x}$, $\mathbf{D}_{\mu:y}$, $\mathbf{D}_{\mu:z}$, $\mathbf{D}_{\varepsilon:x}$, $\mathbf{D}_{\varepsilon:y}$, $\mathbf{D}_{\varepsilon:z}$ zawierające parametry materiałowe dla odpowiednich dyskretnych próbek pól. Macierze \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y i \mathbf{R}_z stanowią dyskretny odpowiednik pochodnych cząstkowych odpowiednio w kierunkach x, y i z. Analizując równania (2.85)-(2.88) dyskretne operatory pochodnych \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y i \mathbf{R}_z będące macierzami $N \times N$ zapisać można określając wartości ich niezerowych elementów:

$$\mathbf{R}_{x} = \mathbf{R}_{x}(a, b) = \begin{cases} -1; & b = a \\ +1; & b = a + 1 \end{cases}$$
(2.91)

$$\mathbf{R}_{y} = \mathbf{R}_{y}(a, b) = \begin{cases} -1; & b = a \\ +1; & b = a + I \end{cases}$$
(2.92)

$$\mathbf{R}_z = \mathbf{R}_z(a, b) = \begin{cases} -1; & b = a \\ +1; & b = a + IJ \end{cases}$$
(2.93)

Dla przykładu macierz \mathbf{R}_x wyglądać będzie następująco:

$$\mathbf{R}_{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
(2.94)

Zapisując równania (2.89) oraz (2.90) w postaci danej zależnościami (2.51),(2.52) będącymi dyskretnym odpowiednikiem równań *Maxwella* uzyskuje się zwarty operatorowy opis przestrzeni zdyskretyzowanej na trójwymiarowej siatce Yee. Warto przy tym zaznaczyć, że dzięki odpowiedniej numeracji węzłów siatki, podobnie jak poprzednio (patrz równania (2.23)-(2.26)), dyskretne operatory rotacji pól \vec{E} i \vec{H} związane są zależnością $\mathbf{R}_E = \mathbf{R}_H^T$.

Rozwiązanie problemu trójwymiarowego uzyskuje się w identyczny sposób, jak w przypadku algorytmów jednowymiarowych. Po włączeniu warunków brzegowych do zależności (2.89), (2.90) można więc użyć albo algorytmu *FDFD* rozwiązując problem własny lub deterministyczny, albo iteracyjnego schematu *FDTD* w postaci macierzowej lub jawnej. Warto przy tym pamiętać, że choć wyniki uzyskanie przy wykorzystaniu obu sformułowań algorytmu *FDTD* są identyczne, schemat z jawnym zapisem operacji różniczkowania jest bardziej efektywny numerycznie, a przez to częściej stosowany⁶.

2.4.3 Dwuwymiarowy algorytm różnicowy

Choć sformułowanie problemu zdyskretyzowanego na trójwymiarowej siatce Yee jest najbardziej ogólne, jego największą wadą jest znaczny wzrost złożoności obliczeniowej przy zwiększaniu rozmiarów analizowanego problemu. Zakładając siatkę Yee o 50 węzłach w każdym z kierunków otrzymujemy problem różnicowy zawierający $50^3 = 125000$ zmiennych dla każdej składowej pola \vec{E} i \vec{H} – w sumie 750000 zmiennych stanu. Z tego powodu, jeżeli jest to tylko możliwe, używa się dwuwymiarowych algorytmów *FDTD* i *FDFD*, a więc opisanych na dwuwymiarowej siatce Yee [61,95].

 $^{^6 \}mathrm{Dokładną}$ implementację jawnego schematu FDTDmożna znaleźć w [79].

Przy założeniu jednorodności pól w kierunku osi z pochodne pól $\frac{\partial}{\partial z}$ w równaniach (2.76) i (2.77) są równe zeru. Otrzymane w efekcie równania *Maxwella* mają postać:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}$$
(2.95)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$
(2.96)

W uzyskanych powyżej zależnościach wydzielić można 2 klasy rozwiązań – mody TE i TM. Aby ustrzec się przed nieprecyzyjnymi odwołaniami, stosowane dalej nazewnictwo związane będzie z wyróżnionym kierunkiem z, w którym założona jest jednorodność pól. Rozwiązania będące modami TE (a dokładniej TE^z) opisane są więc częścią równań (2.95) i (2.96) związaną ze składowymi pól E_x , E_y i H_z o następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} H_z \end{bmatrix}$$
(2.97)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_z \end{bmatrix} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$$
(2.98)

Analogicznie, równania Maxwella dla modu TM opisanego składowymi H_x , H_y , E_z przyjmują formę:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z \end{bmatrix} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}$$
(2.99)

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} E_z \end{bmatrix}$$
(2.100)

Siatka Yee dla problemów dwuwymiarowych opisanych równaniami (2.97) oraz (2.98) ma postać widoczną na rys. 2.10, a dyskretyzacja równań *Maxwella* może zostać przeprowadzona w identyczny sposób jak dla problemu trójwymiarowego. Alternatywnie, dyskretne równania *Maxwella* można otrzymać poprzez modyfikację zależności (2.89) oraz (2.90) w ten sam sposób, jakim z równań (2.76), (2.77) uzyskano (2.97) oraz (2.98). Zakładając, że dyskretny operator pochodnej $\mathbf{R}_z = \mathbf{0}$ oraz dokonując prostych przekształceń algebraicznych dyskretne równania *Maxwella* dla modów *TE* można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{R}_y & \mathbf{R}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\mu:z} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_z \end{bmatrix}$$
(2.101)

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{y}^{T} \\ \mathbf{R}_{x}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\varepsilon:x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\varepsilon:y} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x} \\ \mathbf{e}_{y} \end{bmatrix}$$
(2.102)



Rysunek 2.10: Siatka Yee dla dwuwymiarowego problemu elektromagnetycznego, którego rozwiązaniem są mody TE, zawierająca N = 12 węzłów siatki podstawowej (I = 4, J = 3). Ponieważ dla wszystkich węzłów k = 1, indeks liniowy węzła (3, 2) wynosi 7 $(i + (j - 1)I = 4 + 1 \cdot 3)$.



Rysunek 2.11: Siatka Yee dla dwuwymiarowego problemu elektromagnetycznego opisującego mody TM zawierająca N = 12 węzłów siatki podstawowej (I = 4, J = 3). Ponieważ dla wszystkich węzłów k = 1, numer węzła o indeksach (3,2) wynosi 7 ($i + (j - 1)I = 4 + 1 \cdot 3$).

Podobnie, dyskretyzacja równań Maxwella opisujących mody TM na siatce Yee przedstawionej na rys. 2.11 prowadzi do zależności:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y} \\ -\mathbf{R}_{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{z} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\mu:x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\mu:y} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{x} \\ \mathbf{h}_{y} \end{bmatrix}$$
(2.103)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y}^{T} & -\mathbf{R}_{x}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{x} \\ \mathbf{h}_{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\varepsilon:z} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{z} \end{bmatrix}$$
(2.104)

Uzyskane powyżej dyskretne równania *Maxwella* umożliwiają analizę problemów elektromagnetycznych, w których pola są jednorodne wzdłuż osi z. Na podobnej zasadzie otrzymuje się problemy różnicowe, gdy zostanie określona zmienność funkcyjna w określonym kierunku [67]. Dwuwymiarowe dyskretne równania *Maxwella*, choć mają ograniczoną stosowalność pozwalają analizować czasami także struktury trójwymiarowe przy stosunkowo niskim koszcie numerycznym i są chętnie używane w analizie np. kryształów fotonicznych [16,61,68,82,95].

Rozdział 3

Wydzielanie podprzestrzeni

Przedstawiona we wstępie istota koncepcji *makromodelu* w odniesieniu do metod obliczeniowych elektrodynamiki polega na wydzieleniu fragmentu przestrzeni obliczeniowej, zagęszczeniu siatki i redukcji liczby zmiennych w siatkowych równaniach *Maxwella* opisujących własności falowe wybranej podprzestrzeni. Aby utworzyć *makromodel* niezbędne jest więc opracowanie technik sprawnego wydzielania i łączenia podprzestrzeni opisanych siatkami o różnej gęstości.

W niniejszym rozdziale przedstawiona zostanie metodologia tworzenia operatorów różnicowych dla przestrzeni obliczeniowej, w której wydzielona zostanie pewna podprzestrzeń. W najprostszym przypadku (patrz rys. 3.1) sprowadza się to do przestrzeni obliczeniowej Ω , w której wyodrębniona zostanie podprzestrzeń $\hat{\Omega}$.

Bardziej złożone przypadki przedstawione zostały na rys. 3.2. Dopuszczają one możliwość zagęszczenia siatki pokrywającej podprzestrzeń $\hat{\Omega}$, wydzielenie większej liczby podprzestrzeni w Ω , oraz ich hierarchiczne zagnieżdżanie. Dowolne wydzielanie podprzestrzeni



Rysunek 3.1: W przestrzeni obliczeniowej Ω określona zostaje podprzestrzeń $\widehat{\Omega}$ (po lewej), która następnie zostaje usunięta z Ω . W procesie tym z Ω utworzone zostają podprzestrzenie $\widehat{\Omega}$ i $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ (po prawej).



Rysunek 3.2: Złożony przypadek wydzielania podprzestrzeni. W Ω wydzielono podprzestrzenie $\widehat{\Omega}^1$, $\widehat{\Omega}^2$ i $\widehat{\Omega}^3$, których siatka zostanie zagęszczona. Dodatkowo, w $\widehat{\Omega}^2$ wydzielona została podprzestrzeń zagnieżdżona $\widehat{\widehat{\Omega}}$.

w przestrzeni obliczniowej stanowi punkt wyjścia dla opisywanych w niniejszej rozprawie technik redukcji rzędu modelu stosowanych w metodach różnicowych elektrodynamiki obliczeniowej.

3.1 Przypadek podstawowy: wydzielenie pojedynczego obszaru bez zagnieżdżenia

Zdyskretyzowane równania Maxwella dla przestrzeni obliczeniowej Ω wypełnionej izotropowym materiałem bezstratnym można zapisać w dziedzinie Laplace'a ($s = j\omega$) jako:

$$\mathbf{R}_{E}\mathbf{e} = -s\mathbf{D}_{\mu}\mathbf{h}$$
$$\mathbf{R}_{H}\mathbf{h} = s\mathbf{D}_{\varepsilon}\mathbf{e}$$
(3.1)

gdzie wektory **e** i **h** zawierają spróbkowane wartości składowych pól \vec{E} i \vec{H} będących zmiennymi stanu równania (3.1), macierze \mathbf{R}_E , $\mathbf{R}_H (= \mathbf{R}_E^T)$ są zdyskretyzowanymi operatorami rotacji, a macierze materiałowe \mathbf{D}_{μ} , \mathbf{D}_{ε} zawierają zdyskretyzowane wartości parametrów materiałowych μ i ε przestrzeni obliczeniowej przy zadanym kroku dyskretyzacji siatki Yee. Liczba zmiennych stanu dla pól \vec{E} , \vec{H} , oznaczana za pomocą zmiennych N_e i N_h , równa jest długościom wektorów **e** i **h**.

Proces wydzielania podprzestrzeni z przestrzeni opisywanej równaniem (3.1) można podzielić na cztery fazy:

• określenie fragmentu przestrzeni, który ma zostać wydzielony i usunięcie zmiennych opisujących wydzieloną podprzestrzeń z równań (3.1),

- zbudowanie operatorów dyskretnych dla wydzielonej podprzestrzeni,
- określenie macierzy sprzęgających próbki pola zmodyfikowanej przestrzeni obliczeniowej z próbkami wydzielonej podprzestrzeni,
- stworzenie operatora globalnego dla zmodyfikowanej przestrzeni obliczeniowej wraz z wydzieloną podprzestrzenią.

3.1.1 Konstrukcja operatorów dyskretnych dla zmniejszonej przestrzeni obliczeniowej

Po określeniu obszaru lub objętości w przestrzeni obliczeniowej, która stanowić będzie oddzielny podobszar, z równań (3.1) należy usunąć wszystkie zmienne związane z polami leżącymi wewnątrz wydzielonej podprzestrzeni. Wiąże się to z usunięciem odpowiednich wierszy wektora e, czego można dokonać np. metodą projekcji [87] używając odpowiednio skonstruowanej bazy ortonormalnej. Przykładowo, chcąc usunąć pierwszy element w wektorze e należy skonstruować odpowiednią macierz rzutowania (projekcji) \mathbf{P}_E zbudowaną przy użyciu macierzy jednostkowej o wymiarze N_e (długość wektora e zawierającego próbki wszystkich składowych pola \vec{E} przestrzeni obliczeniowej Ω). Ponieważ każda *i*-ta kolumna macierzy jednostkowej skojarzona jest z odpowiednią pozycją w wektorze e w celu usunięcia pierwszego elementu wektora e, należy usunąć pierwszą kolumnę macierzy jednostkowej, a następnie dokonać projekcji ortonormalnej z wykorzystaniem otrzymanej macierzy \mathbf{P}_E :

$$\mathbf{e}' = \mathbf{P}_E^T \cdot \mathbf{e} \tag{3.2}$$

otrzymując w ten sposób nowy wektor \mathbf{e}' o długości $N_e - 1$.

Zdyskretyzowane wartości pola \vec{E} , leżące wewnątrz obszaru $\hat{\Omega}$, związane są z odpowiednimi pozycjami w wektorze e. Rozszerzenie powyższej procedury tak, aby w równaniu (3.1) można było pozbyć się wszystkich zdyskretyzowanych wartości \vec{E} leżących wewnątrz wydzielonego podobszaru, wymaga usunięcia z macierzy jednostkowej \mathbf{P}_E tych kolumn, które odpowiadają zdyskretyzowanym wartościom pola elektrycznego znajdującym się wewnątrz $\hat{\Omega}$. W identyczny sposób konstruowana jest macierz projekcji \mathbf{P}_H , która umożliwia usunięcie z wektora **h** pozycji odpowiadających próbkom pola magnetycznego znajdującym się wewnątrz wydzielanego podobszaru. Macierze \mathbf{P}_E i \mathbf{P}_H umożliwiają łatwe usunięcie wydzielonej podprzestrzeni ze zdyskretyzowanych równań *Maxwella* dla Ω (3.1) poprzez projekcję ortonormalną wektorów i macierzy występujących w równaniu (3.1):

$$\mathbf{R}'_{E} = \mathbf{P}_{H}^{T} \cdot \mathbf{R}_{E} \cdot \mathbf{P}_{E}
\mathbf{R}'_{H} = \mathbf{P}_{E}^{T} \cdot \mathbf{R}_{H} \cdot \mathbf{P}_{H}
\mathbf{D}'_{\varepsilon} = \mathbf{P}_{E}^{T} \cdot \mathbf{D}_{\varepsilon} \cdot \mathbf{P}_{E}
\mathbf{D}'_{\mu} = \mathbf{P}_{H}^{T} \cdot \mathbf{D}_{\mu} \cdot \mathbf{P}_{H}
\mathbf{e}' = \mathbf{P}_{E}^{T} \cdot \mathbf{e}
\mathbf{h}' = \mathbf{P}_{H}^{T} \cdot \mathbf{h}$$
(3.3)

Zdyskretyzowane równania *Maxwella* dla zmodyfikowanej przestrzeni obliczeniowej $\Omega \setminus \overline{\Omega}$, tj. przestrzeni obliczeniowej Ω z usuniętą podprzestrzenią $\widehat{\Omega}$, przyjmą więc postać:

$$\mathbf{R}'_{E} \mathbf{e}' = -s \mathbf{D}'_{\mu} \mathbf{h}' \mathbf{R}'_{H} \mathbf{h}' = s \mathbf{D}'_{\varepsilon} \mathbf{e}'$$
 (3.4)

przy czym zmniejszona liczba zmienych dla pola elektrycznego i magnetycznego po projekcji wynosi odpowiednio N'_e i N'_h . Warto zaznaczyć, że usunięcie zmiennych z równań (3.1) oznacza wyzerowanie tychże zmiennych, a więc założenie dodatkowych warunków brzegowych w nowopowstałym układzie równań (3.4).

Ze względów praktycznych, związanych z wizualizacją rozwiązań lub potrzebą odnalezienia konkretnych próbek pól w przestrzeni obliczeniowej, wprowadza się przekształcenie odwrotne umożliwiające uzyskanie wektorów pól **e** i **h** znając ich zrzutowane odpowiedniki. Ponieważ macierze \mathbf{P}_E i \mathbf{P}_H są ortonormalne, dokonać tego można za pomocą projekcji odwrotnej:

$$\mathbf{e} = \mathbf{P}_E \cdot \mathbf{e}'$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{P}_H \cdot \mathbf{h}'$$
(3.5)

przy czym usunięte w trakcie projekcji elementy wektorów \mathbf{e} i \mathbf{h} będą równe zeru.

3.1.2 Konstrukcja operatorów dla wydzielonej podprzestrzeni

Usunięcie fragmentu przestrzeni obliczeniowej z operatorów Ω wymaga skonstruowania dodatkowego układu równań dla wydzielonej podprzestrzeni. Zdyskretyzowane równania *Maxwella* dla $\hat{\Omega}$, zapisane przy pomocy operatorów (3.1), mają następujacą postać:

$$\widehat{\mathbf{R}}_{E}\widehat{\mathbf{e}} = -s\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}\widehat{\mathbf{h}}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{h}} = s\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}\widehat{\mathbf{e}}$$
(3.6)

gdzie wektory $\hat{\mathbf{e}}$ i $\hat{\mathbf{h}}$ o długościach odpowiednio \widehat{N}_e i \widehat{N}_h zawierają spróbkowane wartości składowych pól \vec{E} i \vec{H} znajdujących się wewnątrz $\widehat{\Omega}$. Podobnie jak poprzednio macierze $\widehat{\mathbf{R}}_E$,

 $\widehat{\mathbf{R}}_{H}(=\widehat{\mathbf{R}}_{E}^{T}), \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}$ i $\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}$ są odpowiednio zdyskretyzowanymi operatorami rotacji i macierzami materiałowymi, w tym przypadku działającymi w podprzestrzeni obliczeniowej $\widehat{\Omega}$.

Ponieważ równania opisujące zachowanie się pól wewnątrz zmodyfikowanej przestrzeni obliczeniowej $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ (3.4) zawierają zdyskretyzowane pola \vec{E} i \vec{H} leżące na granicy pomiędzy Ω i $\hat{\Omega}$ (z równań (3.1) usunięte zostały jedynie pola leżące wewnątrz $\hat{\Omega}$), równania dla podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ (3.6) powinny dotyczyć wyłącznie próbek pól zawartych wewnątrz $\hat{\Omega}$ tak, aby wektory **e**, **h** oraz $\hat{\mathbf{e}}$, $\hat{\mathbf{h}}$ w sumie zawierały zdyskretyzowane pola \vec{E} i \vec{H} całej przestrzeni obliczeniowej Ω .

3.1.3 Konstrukcja macierzy sprzężeń

Choć równania (3.4) i (3.6) dla $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ wykorzystują wszystkie zmienne stanu występujące w oryginalnych równaniach dla przestrzeni obliczeniowej Ω (3.1), to rozwiązując osobno układ równań złożony z (3.4) i (3.6) nie uzyska się prawidłowego rozwiązania dla przestrzeni obliczeniowej Ω . Powodem tego jest brak warunków brzegowych zapewniających ciągłość pól pomiędzy obydwiema poddziedzinami.

Aby rozwiązanie równań (3.4) i (3.6) pozwoliło uzyskać prawidłowy wynik w przestrzeni obliczeniowej Ω , należy je "skleić" poprzez zapewnienie odpowiednich warunków brzegowych dla obu poddziedzin. Przy założeniu, że granica pomiędzy $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ przebiega wzdłuż linii siatki pola \vec{E} (patrz rys. 3.3), próbki pola elektrycznego z $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ (\mathbf{e}') stanowiące warunek brzegowy dla $\hat{\Omega}$ leżą na granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ i stanowią *pobudzenie* podprzestrzeni $\hat{\Omega}$, zaś próbki pola magnetycznego leżące wewnątrz $\hat{\Omega}$, tuż przy granicy, stanowią jej *odpowiedź.*



Rysunek 3.3: Przestrzeń obliczeniowa Ω pokryta siatką Yee (przypadek 2D, polaryzacja *TE*), w której wydzielona została podprzestrzeń $\hat{\Omega}$. Strzałkami oznaczono próbki składowych pola elektrycznego (E_x i E_y), zaś kropkami próbki składowej pola magnetycznego H_z .

Równanie (3.4) uwzględniające warunki brzegowe będzie miało następującą postać:

$$\mathbf{R}'_{E}\mathbf{e}' = -s\mathbf{D}'_{\mu}\mathbf{h}'$$

$$\mathbf{h}_{b} + \mathbf{R}'_{H}\mathbf{h}' = s\mathbf{D}'_{\varepsilon}\mathbf{e}'$$
(3.7)

gdzie wektor \mathbf{h}_b zawiera wstawione z odpowiednim znakiem spróbkowane wartości pola \vec{H} uzyskane w oparciu o wektor $\hat{\mathbf{h}}$ z podobszaru $\hat{\Omega}$ (*odpowiedź*). Modyfikacja uwzględniająca warunki brzegowe dla równań (3.6) przeprowadzana jest w podobny sposób:

$$\widehat{\mathbf{e}}_{b} + \widehat{\mathbf{R}}_{E} \widehat{\mathbf{e}} = -s \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \widehat{\mathbf{h}}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{H} \widehat{\mathbf{h}} = s \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \widehat{\mathbf{e}}$$
(3.8)

gdzie $\hat{\mathbf{e}}_b$ zawiera wstawione z odpowiednim znakiem spróbkowane pola elektryczne uzyskane z wektora \mathbf{e}' (*pobudzenie*).

Wprowadzone w równaniach (3.7) i (3.8) wektory \mathbf{h}_b i $\hat{\mathbf{e}}_b$ zapewniają odpowiednie warunki brzegowe pomiędzy dziedzinami $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$. Aby uzyskać formę wygodną do implementacji należy dodatkowo określić operatory pozwalające na łatwe obliczenie pól brzegowych w oparciu o zdyskretyzowane wartości pól z przestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$. Niezbędne przekształcenia można zapisać w wygodnej do implementacji formie macierzowej przy wykorzystaniu macierzy sprzegających $\hat{\mathbf{S}}_E$ i \mathbf{S}_H jako:

$$\widehat{\mathbf{e}}_b = \widehat{\mathbf{B}}_E \mathbf{I}_E \mathbf{L}_E \cdot \mathbf{e}' = \widehat{\mathbf{S}}_E \mathbf{e}' \qquad \mathbf{h}_b = \mathbf{B}_H \mathbf{I}_H \widehat{\mathbf{L}}_H \cdot \widehat{\mathbf{h}} = \mathbf{S}_H \widehat{\mathbf{h}}$$
(3.9)

gdzie \mathbf{L}_E , $\hat{\mathbf{L}}_H$ są macierzami wybierającymi próbki z odpowiednich pozycji w wektorach \mathbf{e}' i $\hat{\mathbf{h}}$, \mathbf{I}_E i \mathbf{I}_H są macierzami interpolującymi pozwalającymi na przeliczenie próbek w przypadku różnych kroków dyskretyzacji siatki w $\Omega \setminus \hat{\Omega} \ \hat{\mathbf{S}}'_E$ i \mathbf{S}'_H i $\hat{\Omega}$, zaś $\hat{\mathbf{B}}_E$, \mathbf{B}_H (macierze brzegowe) ustawiają uzyskane próbki na odpowiednich pozycjach w wektorach $\hat{\mathbf{e}}_b$ i \mathbf{h}_b z odpowiednim znakiem.

Zapisanie macierzy sprzęgających za pomocą operatorów składowych (3.9) odpowiada trzem fazom konstrukcji macierzy sprzężeń polegającym na utworzeniu trzech kolejnych macierzy składowych: wybierających ($\mathbf{L}_E, \hat{\mathbf{L}}_H$), interpolujących ($\mathbf{I}_E, \mathbf{I}_H$) i brzegowych ($\hat{\mathbf{B}}_E, \mathbf{B}_H$). Ponieważ budowa każdej z macierzy składowych jest stosunkowo prosta, dzięki podziałowi na fazy macierz sprzężeń otrzymywana jest w łatwy sposób poprzez złożenie macierzy wybierających, interpolujących i brzegowych. Zabieg ten umożliwia szybką implementację prezentowanego algorytmu, która w przypadku tworzenia wyłącznie macierzy sprzężeń znacznie by się skomplikowała.

Konstrukcja macierzy wybierających

Macierze wybierające $(\mathbf{L}_E, \hat{\mathbf{L}}_H)$ mają na celu wybranie z wektorów próbek pól $(\mathbf{e}', \hat{\mathbf{h}})$ tych wartości, które biorą bezpośredni udział w sprzężeniu obszarów $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$.

Zgodnie z poczynionym założeniem (granica pomiędzy dziedzinami przebiega zgodnie z liniami siatki pola elektrycznego) macierz \mathbf{L}_E wybiera z dziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ te próbki pola \vec{E} ,

które będą pobudzeniem podprzestrzeni $\hat{\Omega}$, a więc leżące na granicy pomiędzy $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$. Liczba kolumn macierzy \mathbf{L}_E związana jest z liczbą próbek pól elektrycznych po projekcji i wynosi N'_e , zaś liczba wierszy związana jest z liczbą próbek pól pobudzających, co sprowadza się najczęściej do liczby próbek pola \vec{E} leżących na granicy pomiędzy poddziedzinami stycznych do $\hat{\Omega}$.

Najprostszy sposób konstrukcji macierzy \mathbf{L}_E wymaga określenia w wektorze \mathbf{e}' pozycji próbek pobudzających, a nastepnie usunięcia z macierzy jednostkowej o wymiarze $N'_e \times N'_e$ wierszy, które nie odpowiadają tymże pozycjom.

Analogicznie, macierz \mathbf{L}_H wybiera z dziedziny $\hat{\Omega}$ odpowiednie próbki wektora $\hat{\mathbf{h}}$, które stanowić bedą odpowiedź $\hat{\Omega}$. Próbki te muszą być wybrane w taki sposób, aby możliwe było wyliczenie przy ich wykorzystaniu próbek pól elektrycznych w $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ stanowiących warunki brzegowe (pobudzenie) dla poddziedziny $\hat{\Omega}$. W przypadku, gdy siatki obu poddziedzin mają te same parametry, odpowiedzią są próbki składowych stycznych pola \vec{H} leżące tuż przy granicy. Gdy siatki różnią się np. gęstością lub innymi parametrami, wybór odpowiednich pól zależy od metody wyliczania próbek pól dla $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ w oparciu o próbki $\hat{\mathbf{h}}$ znajdujące się przy granicy.

Konstrukcja macierzy $\widehat{\mathbf{L}}_H$ przebiega w swej najprostszej formie identycznie jak w przypadku macierzy \mathbf{L}_E – z macierzy jednostkowej o wymiarach $\widehat{N}_h \times \widehat{N}_h$ usuwane są wszystkie wiersze, które nie odpowiadają pozycjom odpowiedzi w wektorze $\widehat{\mathbf{h}}$.

Macierze interpolujące

Macierze interpolujące pozwalają na przeliczenie próbek pól pomiędzy siatkami występującymi w $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$. Nazwa "macierze interpolujące" określa umownie macierze \mathbf{I}_E oraz \mathbf{I}_H , choć zdarza się, iż w wyniku działania macierzy na wektor nie zachodzi interpolacja w dosłownym tego słowa znaczeniu¹.

Gdy siatki poddziedzin $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ mają jednakowe parametry, \mathbf{I}_E i \mathbf{I}_H są macierzami jednostkowymi i mogą zostać pominięte w równaniu (3.9). W pozostałych przypadkach konstrukcja macierzy związana jest z określonym algorytmem sprzęgania pól pomiędzy siatkami o różnych parametrach. Liczba kolumn macierzy \mathbf{I}_E równa jest liczbie pól pobudzających, a wierszy liczbie pól, które w $\hat{\Omega}$ potrzebne są do zapewnienia warunków brzegowych na granicy pomiędzy podprzestrzeniami. Podobnie w przypadku \mathbf{I}_H – liczba kolumn równa się liczbie odpowiedzi z $\hat{\Omega}$, zaś wierszy liczbie próbek pola \vec{H} , które stanowić będą warunki brzegowe dla $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ na granicy pomiędzy poddziedzinami $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$. Proces interpolacji pomiędzy siatkami o różnej gęstości i tworzenia macierzy interpolacyjnych ma kluczowe znaczenie dla dokładności i stabilności algorytmu. Z tego powodu opisany zostanie w osobnym rozdziale (rozdział 4).

¹Przyjęcie takiego nazewnictwa umożliwia w precyzyjny i zwarty sposób opisać algorytm, pomimo że w przypadku przeliczania pól z siatki gęstszej do rzadszej formalnie nie powinno się mówić o interpolacji lecz np. o restrykcji pól [5].

Tworzenie macierzy brzegowych

Macierze \mathbf{B}_E i \mathbf{B}_H nazywane macierzami brzegowymi stanowią ostatni element składowy macierzy sprzężeń. Pozwalają one na dołączenie wyliczonych operatorami $\mathbf{I}_E \mathbf{L}_E$ oraz $\mathbf{I}_H \hat{\mathbf{L}}_H$ próbek pól stanowiących warunki brzegowe obu poddziedzin do równań (3.7), (3.8) w postaci wektorów $\hat{\mathbf{e}}_b$ i \mathbf{h}_b . W wyniku działania $\hat{\mathbf{B}}_E$ i \mathbf{B}_H próbki te wstawiane są do wektorów $\hat{\mathbf{e}}_b$ i \mathbf{h}_b na odpowiednich pozycjach i z odpowiednim znakiem.

Konstrukcja macierzy brzegowych przeprowadzana jest przy wykorzystaniu zdyskretyzowanych operatorów rotacji dla poddziedzin $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$. W celu utworzenia macierzy $\hat{\mathbf{B}}_E$, należy w pierwszej kolejności skonstruować dyskretny operator rotacji dla pola \vec{E} z podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ uwzględniający także próbki pola elektrycznego leżące na brzegu dziedziny $\hat{\Omega}$ (a więc te, które nie są uwzględnione w równaniu (3.6)). Następnie, z powstałej macierzy usunięte muszą zostać wszystkie kolumny oprócz tych, które odpowiadają próbkom pola \vec{E} z poddziedziny $\hat{\Omega}$ leżącym na granicy pomiędzy $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ i będącym do niej stycznymi. Ostatnim etapem jest usunięcie wierszy otrzymanej macierzy, odpowiadających próbkom pola \vec{H} nie występującym w wektorze $\hat{\mathbf{h}}$ równania (3.6), otrzymując ostatecznie $\hat{\mathbf{B}}_E$.

Sposób tworzenia macierzy \mathbf{B}_H jest naturalnym rozwinięciem przedstawionych powyżej działań zastosowanych tym razem do zdyskretyzowanego operatora rotacji pola \vec{H} poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, który uwzględnia próbki pola \vec{H} styczne do granicy pomiędzy poddziedzinami leżące już w $\hat{\Omega}$. Próbki te stanowią warunki brzegowe dla $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, stąd kolumny im odpowiadające pozostają w macierzy, zaś reszta kolumn zostaje usunięta. Po ograniczeniu liczby wierszy powstałej macierzy do N'_e poprzez pozostawienie jedynie tych, które odpowiadają próbkom istniejącym w \mathbf{e}' , uzyskuje się macierz \mathbf{B}_H^2 .

3.1.4 Operator globalny przestrzeni obliczeniowej z wydzieloną podprzestrzenią

Ponieważ macierze sprzężeń wiążą próbki pól \vec{E} i \vec{H} leżące przy granicy zapewniając warunki brzegowe w równaniach (3.7) i (3.8), możliwe jest zapisanie operatora globalnego, którego rozwiązanie będzie identyczne z rozwiązaniem układu (3.1). Zapisując równania (3.7) i (3.8) z uwzględnieniem macierzy sprzężeń (3.9) otrzymuje się następujący układ równań:

$$\mathbf{R}'_{E}\mathbf{e}' = -s\mathbf{D}'_{\mu}\mathbf{h}'$$

$$\mathbf{S}_{H}\hat{\mathbf{h}} + \mathbf{R}'_{H}\mathbf{h}' = s\mathbf{D}'_{\varepsilon}\mathbf{e}'$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{E}\mathbf{e}' + \widehat{\mathbf{R}}_{E}\widehat{\mathbf{e}} = -s\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}\widehat{\mathbf{h}}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{h}} = s\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}\widehat{\mathbf{e}} \qquad (3.10)$$

 $^{^{2}}$ W ocenie autora implementacja *macierzy brzegowych* jest najbardziej wrażliwym punktem tworzenia macierzy sprzężeń, powinna więc być przeprowadzona z dużą starannością.

który łatwo można zapisać w postaci macierzowej jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_E & 0\\ \widehat{\mathbf{S}}_E & \widehat{\mathbf{R}}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}'\\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_\mu & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \widehat{\mathbf{h}} \end{bmatrix}$$
(3.11)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H} \\ 0 & \widehat{\mathbf{R}}_{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix}$$
(3.12)

Operator globalny zapisany za pomocą równań (3.11) i (3.12) reprezentuje zdyskretyzowane równania *Maxwella* w przestrzeni obliczeniowej Ω i pozwala uzyskać wyniki identyczne z rozwiązaniem (3.1). Wyszczególnione w nim operatory poddziedziny $\hat{\Omega}$ i $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ są "sklejone" poprzez macierze $\hat{\mathbf{S}}_E$ i \mathbf{S}_H przekształcające próbki pól zawarte w wektorach \mathbf{e}' i $\hat{\mathbf{h}}$. Postać operatorów globalnych jest zgodna ze standardową postacią zdyskretyzowanych równań *Maxwella* (3.1).

3.2 Wydzielanie wielu obszarów podprzestrzeni obliczeniowej z uwzględnieniem zagnieżdżenia podprzestrzeni

Jedną z głównych zalet metody wydzielania podprzestrzeni w przestrzeni obliczeniowej przedstawionej w (3.1) jest możliwość jej naturalnego rozwinięcia na przypadki bardziej złożone. W praktyce niejednokrotnie istnieje potrzeba wydzielenia wielu podobszarów w jednej przestrzeni obliczeniowej, a także możliwość hierarchicznego ich zagnieżdżania (patrz rys. 3.2).

3.2.1 Zagnieżdżanie wydzielanych podprzestrzeni

Zagnieżdżanie wydzielanych podprzestrzeni wiąże się z kilkukrotnym zastosowaniem procesu wydzielania podprzestrzeni w przestrzeni obliczeniowej. Załóżmy, że w przestrzeni obliczeniowej Ω wydzielona ma zostać podprzestrzeń $\hat{\Omega}$, a w tej podprzestrzeń $\hat{\Omega}$, tak jak przedstawione to zostało na rys. 3.4. Jak łatwo przewidzieć, problem budowy operatora globalnego z wydzielonymi poddziedzinami $\hat{\Omega}$ i $\hat{\hat{\Omega}}$ sprowadzi się do konstrukcji zdyskretyzowanych równań *Maxwella* dla trzech poddziedzin: $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, $\hat{\Omega} \setminus \hat{\hat{\Omega}}$ i $\hat{\hat{\Omega}}$, a następnie powiązania pól brzegowych na granicach pomiędzy nimi za pomocą odpowiednich *macierzy sprzęgających*. Ponieważ odpowiednie równania dla $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, czyli przestrzeni obliczeniowej Ω z wydzieloną podprzestrzenią $\hat{\Omega}$, przedstawione zostały wcześniej (3.4), poniższe rozważania ograniczone zostaną jedynie do konstrukcji operatorów i równań dla zagnieżdżonych podprzestrzeni ($\hat{\Omega} \setminus \hat{\hat{\Omega}}$ i $\hat{\hat{\Omega}}$) oraz globalnego operatora tak podzielonej przestrzeni obliczeniowej.



Rysunek 3.4: Określenie w przestrzeni obliczeniowej Ω poddziedzin $\hat{\Omega}$ i $\hat{\hat{\Omega}}$ oraz rozbicie problemu na poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, $\hat{\Omega} \setminus \hat{\hat{\Omega}}$ i $\hat{\hat{\Omega}}$.

Operatory i równania dla zagnieżdżonych podprzestrzeni

Podobnie jak w przypadku pojedynczego wydzielenia podprzestrzeni, proces hierarchicznego zagnieżdżania rozpoczyna się od wykorzystania równań dla podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ (3.8) uwzględniających warunki brzegowe dostarczone w wektorze $\hat{\mathbf{e}}_b$. Wydzielenie w *dyskretnych operatorach* poddziedziny $\hat{\Omega}$ podprzestrzeni $\hat{\hat{\Omega}}$ przeprowadzane metodą projekcji wymaga, podobnie jak w przypadku pojedynczego wydzielenia, utworzenia macierzy $\hat{\mathbf{P}}_E$ i $\hat{\mathbf{P}}_H$ eliminujących z wektorów $\hat{\mathbf{e}}$ i $\hat{\mathbf{h}}$ te próbki pól, które leżą wewnątrz $\hat{\hat{\Omega}}$. Projekcja zastosowana do macierzy i wektorów występujących w (3.6) zapisana może zostać następująco:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{e}}_{b}^{\prime} &= \widehat{\mathbf{P}}_{H}^{T} \cdot \widehat{\mathbf{e}}_{b} \\
\widehat{\mathbf{R}}_{E}^{\prime} &= \widehat{\mathbf{P}}_{H}^{T} \cdot \widehat{\mathbf{R}}_{E} \cdot \widehat{\mathbf{P}}_{E} \\
\widehat{\mathbf{R}}_{H}^{\prime} &= \widehat{\mathbf{P}}_{E}^{T} \cdot \widehat{\mathbf{R}}_{H} \cdot \widehat{\mathbf{P}}_{H} \\
\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{\prime} &= \widehat{\mathbf{P}}_{E}^{T} \cdot \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \cdot \widehat{\mathbf{P}}_{E} \\
\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{\prime} &= \widehat{\mathbf{P}}_{H}^{T} \cdot \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \cdot \widehat{\mathbf{P}}_{H} \\
\widehat{\mathbf{e}}^{\prime} &= \widehat{\mathbf{P}}_{E}^{T} \cdot \widehat{\mathbf{e}} \\
\widehat{\mathbf{h}}^{\prime} &= \widehat{\mathbf{P}}_{H}^{T} \cdot \widehat{\mathbf{h}}
\end{aligned}$$
(3.13)

Wydzielenie poddziedziny przekładające się m.in. na usunięcie wierszy w wektorach $\hat{\mathbf{e}}_b$ i $\hat{\mathbf{h}}$ spowoduje również nieznaczną modyfikację *macierzy sprzęgających* $\hat{\mathbf{S}}_E$ i \mathbf{S}_H , co można przedstawić za pomocą następujących projekcji:

$$\widehat{\mathbf{S}}'_{E} = \widehat{\mathbf{P}}_{H}^{T} \widehat{\mathbf{S}}_{E} \qquad \mathbf{S}'_{H} = \mathbf{S}_{H} \widehat{\mathbf{P}}_{H}$$
(3.14)

Równania dla podprzestrzeni $\widehat{\Omega} \setminus \widehat{\widehat{\Omega}}$, tj. podprzestrzeń obliczeniowej $\widehat{\Omega}$ z usuniętą podprzestrzenią $\widehat{\widehat{\Omega}}$ można więc zapisać jako:

$$\widehat{\mathbf{e}}_{b}' + \widehat{\mathbf{R}}_{E}' \widehat{\mathbf{e}}' = -s \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}' \widehat{\mathbf{h}}' \widehat{\mathbf{h}}_{b} + \widehat{\mathbf{R}}_{H}' \widehat{\mathbf{h}}' = s \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}' \widehat{\mathbf{e}}'$$

$$(3.15)$$

gdzie wektor $\hat{\mathbf{h}}_b$ dodany do drugiego układu równań dostarcza powyższym równaniom warunków brzegowych na granicy pomiędzy dziedzinami $\hat{\Omega} \setminus \hat{\hat{\Omega}}$ i $\hat{\hat{\Omega}}$ otrzymanych z próbek pól \vec{H} znajdujących się wewnątrz poddziedziny $\hat{\hat{\Omega}}$. Liczba zmiennych w wektorach i macierzach równań (3.15) została zmniejszona w wyniku projekcji z \hat{N}_e , \hat{N}_h (równania (3.8)) do \hat{N}'_e , \hat{N}'_h .

Do uzyskania pełnego opisu zachowania się pól w przestrzeni obliczeniowej Ω podzielonej na trzy poddziedziny niezbędne jest zapisanie ostatniego zestawu zdyskretyzowanych równań *Maxwella* słusznego w przestrzeni obliczeniowej $\hat{\Omega}$:

$$\widehat{\widehat{\mathbf{e}}}_{b} + \widehat{\widehat{\mathbf{R}}}_{E} \widehat{\widehat{\mathbf{e}}} = -s \widehat{\widehat{\mathbf{D}}}_{\mu} \widehat{\widehat{\mathbf{h}}}$$

$$\widehat{\widehat{\mathbf{R}}}_{H} \widehat{\widehat{\mathbf{h}}} = s \widehat{\widehat{\mathbf{D}}}_{\varepsilon} \widehat{\widehat{\mathbf{e}}}$$
(3.16)

w których wektor $\hat{\widehat{\mathbf{e}}}_b$ zawiera warunki brzegowe dla poddziedziny $\hat{\widehat{\Omega}}$ obliczone z próbek pola \vec{E} podprzestrzeni $\hat{\Omega} \setminus \hat{\widehat{\Omega}}$ leżących na granicy pomiędzy $\hat{\Omega} \setminus \hat{\widehat{\Omega}}$ a $\hat{\widehat{\Omega}}$ i stycznych do niej. Zgodnie z przyjętym schematem oznaczeń liczba zmiennych opisujących pole elektryczne i magnetyczne wynosi odpowiednio $\widehat{\widehat{N}}_e$ i $\widehat{\widehat{N}}_h$.

Operator globalny dla przestrzeni obliczeniowej z zagnieżdżonymi podprzestrzeniami

Opis zachowania się pół elektromagnetycznych w przestrzeni obliczeniowej podzielonej na trzy podprzestrzenie za pomocą operatora globalnego wymaga skorzystania ze zdyskretyzowanych równań *Maxwella* sformułowanych dla każdej podprzestrzeni. Dodatkowo, w celu zachowania ciągłości pół, należy zapewnić odpowiednie warunki brzegowe na granicach $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega} \setminus \hat{\hat{\Omega}}$ oraz $\hat{\Omega} \setminus \hat{\hat{\Omega}} - \hat{\hat{\Omega}}$, które reprezentowane są przez wektory $\hat{\mathbf{e}}'_b$, \mathbf{h}_b , $\hat{\mathbf{e}}_b$ i $\hat{\mathbf{h}}_b$ występujące w równaniach (3.7), (3.15) i (3.16). Podobnie jak w przypadku wektorów $\hat{\mathbf{e}}'_b$ i \mathbf{h}_b opisanych równaniami (3.9), wektory $\hat{\mathbf{e}}_b$ i $\hat{\mathbf{h}}_b$ określa się w oparciu o próbki składowych stycznych pół \vec{E} i \vec{H} leżące na granicy $\hat{\Omega} \setminus \hat{\hat{\Omega}} - \hat{\hat{\Omega}}$ lub w jej bezpośrednim pobliżu. Wektory $\hat{\mathbf{e}}_b$ i $\hat{\mathbf{h}}_b$ wyznaczyć można więc z $\hat{\mathbf{e}}'$ oraz $\hat{\hat{\mathbf{h}}}$ przy wykorzystaniu *macierzy sprzęgających* $\hat{\mathbf{S}}_E$ i $\hat{\mathbf{S}}_H$ jako:

$$\widehat{\widehat{\mathbf{e}}}_b = \widehat{\widehat{\mathbf{B}}}_E \widehat{\mathbf{I}}_E \widehat{\mathbf{L}}_E \cdot \widehat{\mathbf{e}}' = \widehat{\widehat{\mathbf{S}}}_E \widehat{\mathbf{e}}' \qquad \widehat{\mathbf{h}}_b = \widehat{\mathbf{B}}_H \widehat{\mathbf{I}}_H \widehat{\widehat{\mathbf{L}}}_H \cdot \widehat{\widehat{\mathbf{h}}} = \widehat{\mathbf{S}}_H \widehat{\widehat{\mathbf{h}}}$$
(3.17)

gdzie poszczególne macierze składowe określane są w sposób podany w podrozdziale 3.1.3 niniejszej pracy.

Sformułowanie zdyskretyzowanych równań *Maxwella* opisujących poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, $\hat{\Omega} \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ za pomocą równań (3.7), (3.15), (3.16) umożliwia skonstruowanie operatora globalnego działającego w podzielonej przestrzeni obliczeniowej Ω . Uwzględniając dodatkowo (3.9) oraz zależności (3.14) i (3.17) zapewniające ciągłość pól na granicach pomiędzy poddziedzinami można zapisać operator globalny w uniwersalnej macierzowej postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{S}}'_{E} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{E} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{S}}_{E} & \widehat{\mathbf{R}}_{E} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}'_{\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}' \\ \widehat{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(3.18)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}'_{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{H} & \widehat{\mathbf{S}}_{H} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}_{H} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}' \\ \widehat{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}' \\ \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(3.19)

Powyższy sposób budowania operatorów w przypadku zagnieżdżenia wydzielanych podprzestrzeni może zostać łatwo uogólniony i zalgorytmizowany w postaci rekursywnie wykonywanej procedury. Podczas implementacji należy zwrócić uwagę na kolejność działań, która jest zdeterminowana przez sposób budowania operatora globalnego – budowanie operatorów i macierzy projekcji rozpoczyna się od bazowej przestrzeni obliczeniowej (tu $\Omega \setminus \hat{\Omega}$), zaś samo składanie operatora globalnego następować musi od podprzestrzeni najbardziej zagnieżdżonej (w tym przypadku $\hat{\Omega}$).

3.2.2 Wydzielanie wielu podprzestrzeni

W praktycznych zastosowaniach niejednokrotnie istnieje potrzeba wydzielenia w przestrzeni obliczeniowej Ω więcej niż jednej poddziedziny. Dzięki ogólności prezentowanej metody możliwe jest to poprzez nieznaczną jedynie modyfikację algorytmu wydzielania pojedynczej podprzestrzeni.

Załóżmy, iż w przestrzeni obliczeniowej Ω wydzielone zostały podprzestrzenie $\hat{\Omega}^1$ i $\hat{\Omega}^2$ (patrz rys. 3.5). Zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami z równań (3.1) opisujących zachowanie się pól w pełnej dziedzinie Ω usunięte muszą być wszystkie zmienne leżące wewnątrz $\hat{\Omega}^1$



Rysunek 3.5: Przestrzeń obliczeniowa Ω z określonymi granicami poddziedzin $\widehat{\Omega}^1$ i $\widehat{\Omega}^2$ oraz jej rozbicie na poddziedziny $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$, $\widehat{\Omega}^1$ i $\widehat{\Omega}^2$.

i $\hat{\Omega}^2$. Dokonując projekcji ortogonalnej otrzymamy równania o postaci (3.4) opisujące pola wewnątrz $\Omega \setminus \hat{\Omega}^{-3}$. Ponieważ w tym przypadku istnieją dwie wydzielone podprzestrzenie, zdyskretyzowane równania *Maxwella* będą miały postać:

$$\mathbf{R}'_{E}\mathbf{e}' = -s\mathbf{D}'_{\mu}\mathbf{h}'$$
$$\mathbf{h}^{1}_{b} + \mathbf{h}^{2}_{b} + \mathbf{R}'_{H}\mathbf{h}' = s\mathbf{D}'_{\varepsilon}\mathbf{e}'$$
(3.20)

gdzie wektory \mathbf{h}_b^1 i \mathbf{h}_b^2 dostarczają niezbędnych warunków brzegowych przestrzeni $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ wykorzystując zdyskretyzowane próbki pól magnetycznych z $\widehat{\Omega}^1$ i $\widehat{\Omega}^2$.

Dla poddziedzin $\widehat{\Omega}^1$ i $\widehat{\Omega}^2$ otrzymuje się dwa zestawy równań Maxwella:

$$\widehat{\mathbf{e}}_{b}^{1} + \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{1} \widehat{\mathbf{e}}^{1} = -s \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{1} \widehat{\mathbf{h}}^{1}$$
$$\widehat{\mathbf{R}}_{H}^{1} \widehat{\mathbf{h}}^{1} = s \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{1} \widehat{\mathbf{e}}^{1}$$
(3.21)

$$\widehat{\mathbf{e}}_{b}^{2} + \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{2} \widehat{\mathbf{e}}^{2} = -s \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{2} \widehat{\mathbf{h}}^{2}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{H}^{2} \widehat{\mathbf{h}}^{2} = s \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{2} \widehat{\mathbf{e}}^{2}$$
(3.22)

gdzie indeks 1 i 2 odpowiada operatorom i próbkom pola odpowiednio z $\hat{\Omega}^1$ i $\hat{\Omega}^2$, a wektory $\hat{\mathbf{e}}_b^1$ i $\hat{\mathbf{e}}_b^2$ obliczone z próbek pola elektrycznego z $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ dostarczają odpowiednich warunków brzegowych dla $\hat{\Omega}^1$ i $\hat{\Omega}^2$.

Poprzez wektory brzegowe występujące w (3.20-3.22) następuje "sklejenie" wydzielonych poddziedzin z przestrzenią obliczeniową $\Omega \setminus \hat{\Omega}$. Wymaga to znalezienia zależności pomiędzy wektorami brzegowymi, a odpowiednimi próbkami pól występującymi w dziedzinach $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, $\hat{\Omega}^1$ i $\hat{\Omega}^2$, za pomocą macierzy sprzężeń (patrz 3.1.3) w następujący sposób:

$$\mathbf{h}_b^1 = \mathbf{S}_H^1 \widehat{\mathbf{h}}^1 \qquad \mathbf{h}_b^2 = \mathbf{S}_H^2 \widehat{\mathbf{h}}^2 \qquad \widehat{\mathbf{e}}_b^1 = \widehat{\mathbf{S}}_E^1 \mathbf{e}' \qquad \widehat{\mathbf{e}}_b^2 = \widehat{\mathbf{S}}_E^2 \mathbf{e}'$$
(3.23)

Zapisanie równań (3.20), (3.21), (3.22) i (3.23) w zwartej formie umożliwia utworzenie operatora globalnego operującego w całej przestrzeni obliczeniowej Ω z wydzielonymi podprzestrzeniami $\hat{\Omega}^1$ i $\hat{\Omega}^2$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{S}}_{E}^{1} & \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{1} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{S}}_{E}^{2} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{2} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{h}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{h}}^{2} \end{bmatrix}$$
(3.24)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}^{1}_{H} & \mathbf{S}^{2}_{H} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}^{1}_{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}^{2}_{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{h}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{h}}^{2} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}^{1}_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}^{2}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{2} \end{bmatrix}$$
(3.25)

Powyższa postać operatora globalnego może być użyta również w przypadkach, gdy cała przestrzeń obliczeniowa Ω podzielona jest na podprzestrzenie, tj. gdy $\Omega \setminus \hat{\Omega} \equiv 0$.

³Dla tego przykładu $\widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}^1 \bigcup \widehat{\Omega}^2$



Rysunek 3.6: Przestrzeń obliczeniowa Ω podzielona na dwie poddziedziny $\hat{\Omega}^1$ i $\hat{\Omega}^2$, które całkowicie ją wypełniają. Próbki pola z Ω występują jedynie na granicy pomiędzy podprzestrzeniami. Strzałkami oznaczono próbki składowych pola \vec{E} , zaś kropkami próbki składowej H_z pola magnetycznego.

Podział całej przestrzeni obliczeniowej na podprzestrzenie

Podział całej przestrzeni obliczeniowej na podprzestrzenie jest szczególnym przypadkiem wydzielania wielu podprzestrzeni w Ω i umożliwia pokrycie makromodelami całej przestrzeni obliczeniowej.

Załóżmy, że dziedzinę Ω dzielimy na poddziedziny $\widehat{\Omega}^1$ i $\widehat{\Omega}^2$ w taki sposób, że pokrywają one całą przestrzeń obliczeniową (patrz rys. 3.6). Ponieważ $\Omega \setminus \widehat{\Omega} = 0$, po projekcji wyjściowych dyskretnych równań *Maxwella* (3.20) jedynymi zmiennymi, które nie zostaną usunięte będą próbki pola elektrycznego leżące na granicy pomiędzy $\widehat{\Omega}^1$ i $\widehat{\Omega}^2$ i jednocześnie styczne do niej. Po projekcji układ równań (3.20) zredukuje się więc do:

$$\mathbf{h}_b^1 + \mathbf{h}_b^2 = s \mathbf{D}_\varepsilon' \mathbf{e}' \tag{3.26}$$

Uwzględniając zdyskretyzowane równania Maxwella (3.21) i (3.22) dla poddziedzin $\hat{\Omega}^1$ i $\hat{\Omega}^2$ oraz zależności (3.23) zapewniające ciągłość pól na granicy pomiędzy dziedzinami otrzymujemy zmodyfikowany, w stosunku do (3.24) i (3.25), operator globalny dla Ω z dwoma poddziedzinami całkowicie go wypełniającymi:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{S}}_{E}^{1} & \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{1} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{S}}_{E}^{2} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{2} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{h}}^{2} \end{bmatrix}$$
(3.27)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{H}^{1} & \mathbf{S}_{H}^{2} \\ \widehat{\mathbf{R}}_{H}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}_{H}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{h}}^{2} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\varepsilon}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{2} \end{bmatrix}$$
(3.28)

Jak łatwo zauważyć powyższa postać jest inna, niż (3.11) i (3.12). Oznacza to, że choć podział całej przestrzeni obliczeniowej na dwie poddziedziny utożsamiać można z wydzieleniem jednej poddziedziny w Ω , to jedynie równania (3.27) i (3.28) umożliwią późniejsze pokrycie Ω w całości dwoma i więcej makromodelami.

Rozdział 4

Metody sprzęgania podprzestrzeni pokrytych siatkami o różnej gęstości

Sprzęganie pól pomiędzy poddziedzinami, w których wykorzystuje się różne kroki dyskretyzacji przestrzeni, jest jednym z kluczowych zagadnień analizy pól elektromagnetycznych metodami różnicowymi. W szczególności problem ten dotyczy wykorzystania technik redukcji rzędu modelu. Prawidłowo przeprowadzona interpolacja i sprzężenie pól dla siatek Yee różnej gęstości umożliwia uzyskanie wyników o zwiększonej dokładności, przy wykorzystaniu lokalnie zagęszczonych podprzestrzeni. Ponadto dzięki zagnieżdżaniu podprzestrzeni można uzyskać bardzo wysokie współczynniki zagęszczenia (rzędu tysięcy w dwóch wymiarach i kilkudziesięciu w trzech wymiarach).

Metody sprzęgania pól z różnych poddziedzin są podstawowym zagadnieniem techniki lokalnego zagęszczania siatki Yee (ang. *subgridding*), która służy poprawianiu dokładności klasycznych schematów różnicowych. Jakość tych metod można określić badając poziom odbić fali elektromagnetycznej od granicy pomiędzy poddziedzinami o różnych gęstościach siatki. Techniki sprzęgania pól wykorzystujące interpolację liniową [8,10,31,80,81] charakteryzują się stosunkowo wysokimi poziomami odbić (od -20dB do -40dB) już dla współczynnika zagęszczenia siatki w lokalnej poddziedzinie r = 2 lub r = 3. Interpolacja na granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ za pomocą funkcji gładkich [58] charakteryzuje się niskimi odbiciami, lecz jej zapis dla dowolnego współczynnika zagęszczenia w postaci macierzy nie jest możliwy. Interpolacja ta nie może być więc stosowana razem z technikami redukcji rzędu modelu.

W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną trzy algorytmy wykorzystujące interpolację liniową pozwalające na sprzężenie pomiędzy poddziedzinami. Pierwszy z nich gwarantuje stabilność algorytmu różnicowego, drugi charakteryzuje się bardzo niskimi odbiciami od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$, a trzeci jest połączeniem dwóch poprzednich. Każdy z algorytmów przedstawiony został najpierw w dwuwymiarowym algorytmie różnicowym o polaryzacji TE i TM, co ułatwia jego implementację dla przypadku analizy trójwymiarowej.

4.1 Stabilny algorytm interpolacji na granicy pomiędzy podprzestrzeniami

Pierwszy stabilny algorytm interpolacji liniowej, pomiędzy polami przy granicy siatek o różnych krokach dyskretyzacji przestrzeni, został zaproponowany przez grupę Weilanda [81] i jest obecnie jednym z najbardziej popularnych algorytmów wykorzystywanych w metodzie różnic skończonych. Do jego niewątpliwych zalet należy prostota implementacji stanowiąca często kluczowy aspekt podczas tworzenia algorytmu różnicowego.

Największą zaletą subgriddingu opartego na interpolacji liniowej jest to, że przy zachowaniu odpowiednich warunków odnośnie kroku czasowego, iteracyjny schemat różnicowy zawierający lokalnie zagęszczoną siatkę Yee jest stabilny [31, 60, 81]. Dla tego przypadku stabilność schematu może zostać matematycznie udowodniona [43, 60, 81].

4.1.1 Stabilność schematów iteracyjnych wykorzystujących wyodrębnione podprzestrzenie

Warunki dla jakich iteracyjne schematy różnicowe wykorzystujące wydzielone poddziedziny są stabilne można łatwo uzyskać wykorzystując zapis operatorowy algorytmów różnicowych. Schematy wykorzystujące wydzielenie podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ w przestrzeni obliczeniowej Ω opisane za pomocą operatorów globalnych o postaci (3.11) oraz (3.12), są stabilne jeżeli macierze sprzęgające spełniają następujący warunek [43,45]:

$$\widehat{\mathbf{S}}_E = \mathbf{S}_H^T \tag{4.1}$$

Można udowodnić, że warunek stabilności można uogólnić do:

$$\widehat{\mathbf{S}}_E = \alpha \cdot \mathbf{S}_H^T \tag{4.2}$$

gdzie α jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Na podstawie warunku (4.2) można uzyskać wytyczne do konstrukcji stabilnych algorytmów iteracyjnych wykorzystujących sprzężenia podprzestrzeni obliczeniowych. Analizując równanie (4.2), korzystając z zależności (3.9) można łatwo zauważyć, że proces sprzęgania podprzestrzeni wiąże się z następującymi działaniami:

- wybranie próbek pola elektrycznego z podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, które biorą udział w sprzężeniu z podprzestrzenią $\hat{\Omega}$ (macierz \mathbf{L}_E),
- interpolacja próbek pola w $\hat{\Omega}$ na podstawie wybranych próbek pola \vec{E} z podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ (macierz \mathbf{I}_E),
- wyznaczenie próbek pola \vec{H} w podprzestrzeni $\hat{\Omega}$, które zostaną pobudzane za pomocą wyznaczonych w poprzednim kroku próbek pola elektrycznego (macierz $\hat{\mathbf{B}}_E$)



Rysunek 4.1: Graficzna ilustracja sprzęgania poddziedzin $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ i $\widehat{\Omega}$ za pomocą macierzy $\widehat{\mathbf{S}}_E$ i \mathbf{S}_H dla współczynnika zagęszczenia r = 1 w dwuwymiarowym problemie różnicowym (polaryzacja TM). Kolorem jasnoszarym zaznaczono próbki pola z poddziedziny $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$.

- wybranie próbek pola magnetycznego z $\hat{\Omega}$, które użyte zostaną do wyznaczenia warunków brzegowych dla poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ (macierz $\hat{\mathbf{L}}_H$),
- wyznaczenie wartości próbek pola magnetycznego w $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ (macierz \mathbf{I}_H),
- określenie wpływu wyznaczonych w poprzednim kroku próbek pola magnetycznego na próbki pola \vec{E} podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ (macierz \mathbf{B}_H).

Wszystkie przedstawione powyżej działania uwzględnione są w macierzach sprzęgających. Aby określić zależności pomiędzy budową macierzy $\hat{\mathbf{S}}_E$ i \mathbf{S}_H , a stabilnością iteracyjnego algorytmu różnicowego, przeanalizowane zostaną dwa przypadki – wydzielenie podprzestrzeni bez zagęszczenia oraz wydzielenie podprzestrzeni z zagęszczeniem.

Wydzielenie podprzestrzeni bez zagęszczenia

Jeżeli wydzielona poddziedzina nie jest zagęszczana w stosunku do przestrzeni obliczeniowej Ω , macierze interpolujące są macierzami jednostkowymi. Wybranie odpowiednich pól za pomoca macierzy \mathbf{L}_E i $\hat{\mathbf{L}}_H$ oraz pobudzenie poprzez $\hat{\mathbf{B}}_E$, \mathbf{B}_H prowadzi zatem do macierzy $\hat{\mathbf{S}}_E$ i \mathbf{S}_H zbudowanych z 1 i -1 umieszczonych na odpowiednich pozycjach. Graficzna ilustracja działania macierzy sprzęgających przedstawiona została na rys. 4.1. Zgodnie z postacią macierzy $\widehat{\mathbf{S}}_E$, próbka pola elektrycznego przestrzeni $\Omega \setminus \widehat{\Omega} E_z(3)$ jest używana (ze znakiem ujemnym) do obliczenia próbki $\widehat{H}_x(1)$ poddziedziny $\widehat{\Omega}$. Podobnie próbka $E_z(4)$ będzie użyta do obliczenia $\widehat{H}_x(2)$. Odpowiednie równania z (3.11) związane z próbkami $\widehat{H}_x(1)$ i $\widehat{H}_x(2)$ mają postać:

$$-E_z(3) + \hat{E}_z(1) = -s\hat{\mu}_x(1)\Delta \cdot \hat{H}_x(1)$$

$$-E_z(4) + \hat{E}_z(2) = -s\hat{\mu}_x(2)\Delta \cdot \hat{H}_x(2)$$
(4.3)

Analogicznie, z macierzy \mathbf{S}_H (patrz rys. 4.1) wynika, że próbki $\widehat{H}_x(1)$ i $\widehat{H}_x(2)$ poddziedziny $\widehat{\Omega}$ wykorzystywane są (ze znakiem ujemnym) do wyznaczenia próbek pól podprzestrzeni $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ – odpowiednio $E_z(3)$ i $E_z(4)$, a odpowiednie równania z (3.12) mają postać:

$$H_{B1} - H_y(2) + H_y(3) - \widehat{H}_x(1) = s\varepsilon_z(3)\Delta \cdot E_z(3) H_{B2} - H_y(3) + H_y(4) - \widehat{H}_x(2) = s\varepsilon_z(4)\Delta \cdot E_z(4)$$
(4.4)

W przypadku braku zagęszczenia, wydzielenie podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ i budowa operatora globalnego są równoważne permutacji oryginalnych operatorów przestrzeni obliczeniowej Ω . Oznacza to, że wynikowy schemat iteracyjny będzie stabilny. Warto jednak przy tej okazji zaznaczyć, że spełnienie warunku stabilności (4.1), który potwierdza stabilność algorytmu różnicowego, związane jest ścićle ze sposobem konstrukcji macierzy sprzężeń, na co największy wpływ ma odpowiednia numeracja próbek pól i węzłów siatki. Jeżeli macierzom $\hat{\mathbf{S}}_E$ i \mathbf{S}_H nie nada się odpowiedniej struktury, to oczywiście wynikowy algorytm *FDTD* pozostanie stabilny, ale nie będzie spełniony warunek (4.1), a co za tym idzie, faktu stabilności nie da się w prosty sposób potwierdzić, o ile nie zostanie podana odpowiednia macierz permutacji.

Istnieje jednak alternatywne podejście, które wynika z warunku (4.1), ale można je zastosować gdy nie jest znana permutacja kolumn prowadząca do tej zależności. Niezerowe elementy macierzy $\hat{\mathbf{S}}_E$ i \mathbf{S}_H można uważać za *współczynniki sprzężenia* (oznaczane dalej jako c) pomiędzy próbkami pól \vec{E} , \vec{H} podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ oraz $\hat{\Omega}$. Próbki $E_z(3)$ i $E_z(4)$ poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ sprzęgają się więc, ze współczynnikiem sprzężenia c = -1, odpowiednio z próbkami $\widehat{H}_x(1)$ i $\widehat{H}_x(2)$ podprzestrzeni $\hat{\Omega}$, co wynika z formy macierzy $\hat{\mathbf{S}}_E$ (patrz rys. 4.1). Analogicznie, próbki $\widehat{H}_x(1)$ i $\widehat{H}_x(2)$ sprzęgają się z próbkami $E_z(3)$ i $E_z(4)$ (c = -1). W ogólności, bazując na równaniu (4.2), można stwierdzić, że schemat iteracyjny stworzony w oparciu o *operatory globalne* dane równaniami (3.11) i (3.12) będzie stabilny, jeżeli *współczynniki sprzężenia* pomiędzy próbkami pól \vec{E} podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, a próbkami pól \vec{H} podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ są takie same co do znaku i przeskalowane α -krotnie. Ta *zasada wzajemności*, która stanowi naturalny element schematu różnicowego (jest spełniona dla standardowego schematu FDTD), została wykorzystana do implementacji stabilnego *subgriddingu* w [31]. W [31] znaleźć można również dokładnie opisaną *zasadę wzajemności*, która uzasadniona została za pomocą schematów zastępczych zawierających m. in. żyrator.



Rysunek 4.2: Graficzna ilustracja sprzęgania poddziedzin $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ i $\widehat{\Omega}$ za pomocą macierzy $\mathbf{\hat{S}}_{F}$ i \mathbf{S}_{H} dla współczynnika zageszczenia r=3 w dwuwymiarowym problemie różnicowym (polaryzacja TM). Kolorem jasnoszarym zaznaczono próbki pola z poddziedziny $\Omega \setminus \Omega$.

Wydzielenie podprzestrzeni z zagęszczeniem

Zageszczenie siatki Yee w podprzestrzeni wydzielonej z Ω oznacza, że macierze interpolujące nie będą macierzami jednostkowymi, a liczba próbek związanych z procesem sprzęgania operatorów $\Omega \setminus \Omega$ i Ω bedzie różna w każdej z poddziedzin. Dla tego przypadku, wykorzystanie przedstawionej powyżej zasady wzajemności umożliwi weryfikację czy określony sposób sprzęgania operatorów podprzestrzeni nie zaburzy stabilności wynikowego schematu iteracyjnego.

Przedstawiony na rys. 4.2 fragment dwuwymiarowej siatki Yee, w okolicy rogu wydzielonej podprzestrzeni Ω , stanowi ilustację zasady wzajemności dla r = 3. Widoczne na rysunku próbki pola elektrycznego podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ sprzęgają się z próbkami pola magnetycznego podprzestrzeni $\widehat{\Omega}$ ze współczynnikami sprzężenia $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{3}{3}$ (sposób wyznaczania współczynników sprzężenia przedyskutowany zostanie w dalszej części rozdziału). Z takimi samymi współczynnikami występują sprzężenia odwrotne, tj. od próbek pola \vec{H} z $\hat{\Omega}$ do próbek pola $E \ge \Omega \setminus \Omega$. Oznacza to, że spełniony będzie warunek dany zależnością (4.2) dla

Ω

 $\alpha = 1$. Warto przy tym zaznaczyć, że *zasada wzajemności* jest warunkiem wystarczającym, a więc odstępstwa od niej, nie muszą prowadzić do niestabilności w iteracyjnych schematach różnicowych.

4.1.2 Interpolacja liniowa w dwuwymiarowym algorytmie różnicowym

Łączenie pól na granicy poddziedzin pokrytych siatkami o różnej gęstości, przy wykorzystaniu interpolacji liniowej, można przedstawić w prosty sposób dla dwuwymiarowych algorytmów różnicowych. Warto przy tym zaznaczyć, że jednoznaczne określenie sposobu przeprowadzania wyliczeń pól leżących na granicy pomiędzy siatkami dyskretnymi dla polaryzacji TE i TM w dwóch wymiarach umożliwia zwykle implementację tegoż algorytmu w trójwymiarowych schematach różnicowych.

Dwuwymiarowy schemat różnicowy - polaryzacja TE

Dyskretne równania *Maxwella* dla polaryzacji *TE* mają postać daną równaniami (2.101), (2.102). Przykładowa dwuwymiarowa siatka Yee, dla tej klasy zagadnień, przedstawiona została na rys. 2.10, gdzie próbki składowych pola elektrycznego leżą w płaszczyźnie XOY, zaś próbki H_z skierowane są prostopadle do płaszczyzny siatki.

Wydzielenie podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ z Ω , a następnie *r*-krotne zagęszczenie $\hat{\Omega}$ wymaga określenia w macierzach sprzęgających $\hat{\mathbf{S}}_E$ i \mathbf{S}_H (patrz zależność (3.9)) macierzy interpolujących, które dla $r \neq 1$ nie będą macierzami jednostkowymi. Rozważmy siatkę Yee na granicy pomiędzy podprzestrzeniami $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ przedstawioną na rys. 4.3.



Rysunek 4.3: Przypadek lokalnego zagęszczenia dwuwymiarowej siatki Ye
e $\left(r=3\right)$ dla polaryzacji TE.



Rysunek 4.4: Graficzna ilustracja interpolacji pola elektrycznego na granicy pomiędzy poddziedzinami.

Wyznaczanie macierzy $\hat{\mathbf{S}}_{E}$. Macierz $\hat{\mathbf{S}}_{E}$ opisuje związek pomiędzy próbkami pola \vec{E} w podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, a próbkami pola \vec{H} w poddziedzinie $\hat{\Omega}$. Ponieważ w poddziedzinie $\hat{\Omega}$ próbki pola elektrycznego leżące na granicy nie są obliczane, muszą być wyznaczone z istniejących na granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ próbek pola elektrycznego z $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, które po interpolacji są warunkiem brzegowym dla obszaru $\hat{\Omega}$. Przyjmując interpretację całkową pól widocznych na rys. 4.4 można zapisać następujące równanie:

$$\int_{n_1'}^{n_4'} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{n_1'}^{n_2'} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{n_2'}^{n_3'} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{n_3'}^{n_4'} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$
(4.5)

które z kolei pozwala utworzyć zależność wiążącą próbki pola elektrycznego:

$$E_x(1) \cdot \Delta = \hat{E}_x(1) \cdot \hat{\Delta} + \hat{E}_x(2) \cdot \hat{\Delta} + \hat{E}_x(3) \cdot \hat{\Delta}$$
(4.6)

Na podstawie powyższych relacji uzyskuje się [80] sposób wyznaczania próbek pola \vec{E} jako:

$$\widehat{E}_x(1)\cdot\widehat{\Delta} = \frac{1}{3}E_x(1)\cdot\Delta \qquad \widehat{E}_x(2)\cdot\widehat{\Delta} = \frac{1}{3}E_x(1)\cdot\Delta \qquad \widehat{E}_x(3)\cdot\widehat{\Delta} = \frac{1}{3}E_x(1)\cdot\Delta \qquad (4.7)$$

lub inaczej:

$$\widehat{E}_x(1) = \widehat{E}_x(2) = \widehat{E}_x(3) = E_x(1)$$
(4.8)



Rysunek 4.5: Graficzna ilustracja interpolacji pola magnetycznego na granicy pomiędzy poddziedzinami.

Wyznaczanie macierzy \mathbf{S}_H . Macierz \mathbf{S}_H określa związek próbek pola \vec{H} wewnątrz zagęszczonej podprzestrzeni z próbkami pola elektrycznego poddziedziny Ω na granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$. Ponieważ w podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ nie występują próbki pola magnetycznego pozwalające na obliczenie próbek \vec{E} leżących na granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ (patrz rys. 4.3), muszą być one otrzymane z próbek poddziedziny $\hat{\Omega}$. W stabilnym schemacie, opartym o interpolację liniową, wykorzystywane są do tego próbki pola magnetycznego leżące tuż przy granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ widoczne na rys. 4.5.

Podobnie jak w przypadku pola elektrycznego, wykorzystanie interpretacji całkowej prowadzi do równania pozwalającego obliczyć pole magnetyczne $H_z(2)$, które stanowi warunek brzegowy podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, jako:

$$H_z(2) \cdot \Delta \widehat{\Delta} = \widehat{H}_z(1) \cdot (\widehat{\Delta})^2 + \widehat{H}_z(2) \cdot (\widehat{\Delta})^2 + \widehat{H}_z(3) \cdot (\widehat{\Delta})^2$$
(4.9)

Używając jedynie próbek pól uzyskuje się:

$$H_z(2) = \frac{1}{3}\widehat{H}_z(1) + \frac{1}{3}\widehat{H}_z(2) + \frac{1}{3}\widehat{H}_z(3)$$
(4.10)

W przypadku innych współczynników zagęszczenia siatki r w obliczeniach używane będzie r próbek pól siatki podprzestrzeni $\hat{\Omega}$, a współczynniki w zależności (4.10) równe będą $\frac{1}{r}$. Tak działający algorytm interpolacji pól pomiędzy poddziedzinami pozwala stworzyć macierze sprzężeń, które spełniają warunek stabilności (4.2) ze współczynnikiem $\alpha = \frac{1}{r}$.



Rysunek 4.6: Sprzężenia pomiędzy próbkami pola \vec{E} i \vec{H} na granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$ dla stabilnej polaryzacji TE.

Związek z zasadą wzajemności. Rozważmy przedstawioną na rys. 4.6 wzajemną relację pomiędzy pobudzeniem $E_x(1)$, a próbkami $\widehat{H}_z(1)$, $\widehat{H}_z(2)$ oraz $\widehat{H}_z(3)$, z których uzyskiwana jest odpowiedź $H_z(2)$. Próbka $\widehat{H}_z(1)$ obliczana jest przy wykorzystaniu próbki $\widehat{E}_x(1)$ (patrz rys. 4.4). Związek pomiędzy $E_x(1) = \widehat{E}_x(1)$ i $\widehat{H}_z(1)$ tworzy się poprzez relację (4.8), a więc współczynnik sprzężenia wynosi 1. Podobne zależności występują również pomiędzy $E_x(1)$ a $\widehat{H}_z(2)$ oraz $\widehat{H}_z(3)$.

Z drugiej strony próbka $E_x(1)$ obliczana jest za pomocą *odpowiedzi* $H_z(2)$ otrzymywanej z relacji (4.10). Oznacza to, że sprzężenia pomiędzy próbkami $\widehat{H}_z(1), \widehat{H}_z(2), \widehat{H}_z(3)$ a $E_x(1)$ wynoszą $\frac{1}{3}$.

Ponieważ współczynniki sprzężenia pomiędzy $E_x(1)$ a próbkami $\widehat{H}_z(1)$, $\widehat{H}_z(2)$, $\widehat{H}_z(3)$ wynoszą 1, a sprzężenia odwrotne $\frac{1}{3}$ (patrz rys. 4.6), spełniona jest zasada wzajemności, a wynikowy algorytm *FDTD* będzie stabilny.

Dwuwymiarowy schemat różnicowy - polaryzacja TM

Dla polaryzacji TM dyskretne równania Maxwella na dwuwymiarowej siatce Yee, pokazanej na rys. 2.11, mają postać (2.103), (2.104). Przejście pomiędzy poddziedzinami $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$, które przedstawiono na rys. 4.7, odbywać się będzie również przy wykorzystaniu próbek pola $\vec{E} \ge \Omega \setminus \hat{\Omega}$ i próbek $\vec{H} \ge \hat{\Omega}$. W tym przypadku jednak, ze względu na fakt, iż interpolacja nie będzie przebiegać wzdłuż lini pola elektrycznego, do uzyskania próbek pola $\vec{E} \le \hat{\Omega}$ zastosowana zostanie interpolacja liniowa [31, 80].

Analizując przedstawiony na rys. 4.8 fragment dwuwymiarowej siatki Yee w okolicy



Rysunek 4.7: Lokalne zagęszczenie dwuwymiarowej siatki Ye
e $\left(r=3\right)$ dla polaryzacji TM.

granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$ łatwo zauważyć, że stosując interpolację liniową, przy uwzględnieniu interpretacji całkowej próbek pól, uzyskuje się następujący algorytm wyznaczania próbek brzegowych dla poddziedziny $\widehat{\Omega}$:

$$\widehat{E}_{z}(1) = \frac{2}{3}E_{z}(1) + \frac{1}{3}E_{z}(2)$$

$$\widehat{E}_{z}(2) = \frac{1}{3}E_{z}(1) + \frac{2}{3}E_{z}(2)$$

$$\widehat{E}_{z}(3) = E_{z}(2)$$

$$\widehat{E}_{z}(4) = \frac{2}{3}E_{z}(2) + \frac{1}{3}E_{z}(3)$$

$$\widehat{E}_{z}(5) = \frac{1}{3}E_{z}(2) + \frac{2}{3}E_{z}(3)$$
(4.11)

Powyższe relacje wykorzystane są do utworzenia macierzy $\widehat{\mathbf{S}}_E$, przy czym przykładowe współczynniki sprzężenia np. pomiędzy próbką $E_z(2)$ a pięcioma próbkami pola \vec{H} z podprzestrzeni $\widehat{\Omega}$ ($\widehat{H}_x(1) - \widehat{H}_x(5)$) wynoszą kolejno: $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$ (patrz rys. 4.8).

Aby utworzyć macierz \mathbf{S}_H należy znaleźć związek pomiędzy próbkami poddziedziny $\widehat{\Omega}$, z których tworzona jest *odpowiedź*, a próbkami pola \vec{E} w podprzestrzeni $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$, położonymi na granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$, stanowiącymi *pobudzenie*. Rozważmy sytuację przedstawioną na


Rysunek 4.8: Fragment siatki Yee w okolicy granicy pomiędzy poddziedzinami ilustrujący interpolację próbek pola \vec{E} . Dodatkowo zaznaczone zostały wartości współczynników sprzężenia pomiędzy pobudzeniem $E_z(2)$ a próbkami $\hat{H}_x(1)-\hat{H}_x(5)$.



Rysunek 4.9: Ilustracja wyznaczania próbek pola magnetycznego na granicy pomiędzy poddziedzinami dla polaryzacji TM. Dodatkowo przedstawiono wartości współczynników sprzężenia pomiędzy próbkami $\hat{H}_x(1)-\hat{H}_x(5)$ a pobudzeniem $E_z(2)$.



Rysunek 4.10: Wyznaczanie pola magnetycznego na rogu wydzielonej poddziedziny dla polaryzacji TM.

rys. 4.9. Składową $E_z(2)$ oblicza się wykorzystując próbkę $H_x(2)$, którą trzeba wyznaczyć wewnątrz siatki $\hat{\Omega}$. Brzegowe próbki pola \vec{H} stanowiące odpowiedź skierowane są wzdłuż granicy pomiędzy $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ a $\hat{\Omega}$, tak jak to pokazano na rys. 4.9. Z rysunku wynika, że próbka $H_x(2)$ będąca jedną z próbek brzegowych podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, może zostać wyznaczona na przykład jako suma pól $\hat{H}_x(2)$, $\hat{H}_x(3)$ i $\hat{H}_x(4)$. Takie wyliczenie próbki $H_x(2)$, choć formalnie poprawne, prowadzić będzie do naruszenia zasady wzajemności, gdyż próbki $\hat{H}_x(1)$ i $\hat{H}_x(5)$ nie będą się sprzęgać z próbką $E_z(2)$, choć ta sprzęga się z nimi (patrz rys. 4.8). Aby odzwierciedlić tę relację i w konsekwencji uzyskać stabilność wynikowego algorytmu różnicowego, próbki pola magnetycznego wyznaczane są za pomocą zależności:

$$H_x(2) = \frac{1}{9}\widehat{H}_x(1) + \frac{2}{9}\widehat{H}_x(2) + \frac{3}{9}\widehat{H}_x(3) + \frac{2}{9}\widehat{H}_x(4) + \frac{1}{9}\widehat{H}_x(5)$$
(4.12)

W przypadku rogów podprzestrzeni $\hat{\Omega}$, sposób uzyskiwania elementów macierzy \mathbf{S}_H ulega nieznacznej modyfikacji, co przedstawiono na rys. 4.10. Istotne jest wyznaczenie próbki pola $E_z(1)$. Choć istniejące próbki pola magnetycznego $H_x(1)$ oraz $H_y(1)$ wraz z innymi próbkami podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ pozwalają obliczyć narożne próbki pola elektrycznego, zachowanie stabilności wynikowego algorytmu *FDTD* wymaga uwzględnienia próbek *odpowiedzi* podprzestrzeni $\hat{\Omega}$. Oznacza to, że próbki $H'_x(1)$ i $H'_y(1)$ wyznaczone za pomocą zależności:

$$H'_{x}(1) = \frac{1}{9}\widehat{H}_{x}(2) + \frac{2}{9}\widehat{H}_{x}(1)$$

$$H'_{y}(1) = \frac{1}{9}\widehat{H}_{y}(2) + \frac{2}{9}\widehat{H}_{y}(1)$$

(4.13)

są następnie używane do obliczania narożnej próbki $E_z(1)$ poprzez dodanie ich odpowiednio

do próbek $H_x(1)$ i $H_y(1)$. W efekcie z (3.12) uzyskuje się następujące równanie związane z próbką narożną $E_z(1)$:

$$H_{xB} - (H_x(1) + H'_x(1)) - H_{yB} + (H_y(1) + H'_y(1)) = s\varepsilon_z(1)\Delta \cdot E_z(1)$$
(4.14)

W przypadku zagęszczenia większego, niż trzykrotne, odpowiednie współczynniki w równaniu (4.11) wynoszą: $\frac{1}{r}$, $\frac{2}{r}...\frac{r}{r}$, zaś w zależnościach (4.12) oraz (4.13): $\frac{1}{r^2}$, $\frac{2}{r^2}...\frac{r}{r^2}$. W rezultacie macierze sprzężeń bedą więc dla każdego r spełniały warunek (4.2) ze współczynnikiem $\alpha = \frac{1}{r}$ (patrz rys. 4.8 i 4.9), dzięki czemu wynikowy schemat *FDTD* będzie stabilny.

4.1.3 Interpolacja liniowa w trójwymiarowym algorytmie różnicowym

Analiza algorytmu interpolacji liniowej dla przypadku dwuwymiarowego problemu różnicowego o polaryzacjach TE oraz TM pozwala na stworzenie algorytmu operującego na trójwymiarowej siatce Yee. Przypadek trójwymiarowej przestrzeni obliczeniowej Ω , w której wydzielona została przestrzeń $\hat{\Omega}$, przedstawiono na rys. 4.11. Oznaczone szarym kolorem płaszczyzny stanowiące granicę pomiędzy poddziedzinami $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ pokrywają się z węzłami pola elektrycznego przestrzeni obliczeniowej Ω .

Leżące na granicy pola elektryczne stanowią pobudzenie podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ (patrz rys.



Rysunek 4.11: Włączona do podprzestrzeni $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ podprzestrzeń $\widehat{\Omega}$ dla współczynnika zagęszczenia r = 3. Linie ciągłe pokrywają się z próbkami pola elektrycznego, podczas gdy linie przerywane z próbkami pola \vec{H} .



Rysunek 4.12: Wyznaczanie macierzy $\widehat{\mathbf{S}}_E$. Próbki podprzestrzeni $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$, które stanowią *pobudzenie* poddziedziny $\widehat{\Omega}$. Szara płaszczyzna stanowi granicę $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$, która zawiera pola pobudzające.



Rysunek 4.13: Rysunek pomocniczy dla określenia macierzy \mathbf{S}_H . Wyznaczone z próbek podprzestrzeni $\widehat{\Omega}$ próbki pola magnetycznego będące *odpowiedzią* poddziedziny $\widehat{\Omega}$, które razem z próbkami należącymi do $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ pozwalają wyliczyć próbki pola \vec{E} leżące na granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$.

4.12). Ich wybranie z wektora e za pomocą macierzy \mathbf{L}_E , a następnie interpolacja (macierz \mathbf{I}_E) pozwoli, poprzez macierz $\hat{\mathbf{B}}_E$, zapewnić warunki brzegowe dla podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$.

W podobny sposób określa się próbki pola magnetycznego stanowiące $\mathit{odpowiedź}$ pod-



Rysunek 4.14: Interpolacja próbek pola elektrycznego podprzestrzeni $\widehat{\Omega}$ przy użyciu dwóch sąsiednich próbek z poddziedziny $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$. Po prawej stronie ukazany jest przestrzenny zasięg próbek interpolowanych przy użyciu $E_z(2)$.

przestrzeni $\hat{\Omega}$ (patrz rys. 4.13). Wybranie próbek pola \vec{H} z płaszczyzny znajdującej się najbliżej granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ przy użyciu macierzy $\hat{\mathbf{L}}_H$, pozwala wyznaczyć z nich (macierz \mathbf{I}_H) widoczne na rys. 4.13 próbki stanowiące warunki brzegowe poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, które zostaną następnie sprzężone z próbkami pola elektrycznego z podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ za pomocą macierzy \mathbf{B}_H .

Macierz $\hat{\mathbf{S}}_E$. Zgodnie z metodologią przedstawioną w [31], w trakcie interpolacji w przestrzeni trójwymiarowej próbki pól elektrycznych są interpolowane liniowo w kierunku poprzecznym (patrz rys. 4.8), zaś w kierunku wzdłużnym nie zmieniają się (patrz rys. 4.4). W rezultacie otrzymuje się schemat interpolacji, w którym pomiędzy każdymi dwoma próbkami pola elektrycznego podprzestrzeni $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ (patrz rys. 4.14) próbki podprzestrzeni $\widehat{\Omega}$ uzyskiwane są w następujący sposób¹:

$$\hat{E}_{z}(1) = \hat{E}_{z}(5) = \hat{E}_{z}(9) = \frac{1}{3}E_{z}(2) = \frac{3}{9}E_{z}(2)$$

$$\hat{E}_{z}(2) = \hat{E}_{z}(6) = \hat{E}_{z}(10) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}E_{z}(2) + \frac{1}{3}E_{z}(3)\right) = \frac{2}{9}E_{z}(2) + \frac{1}{9}E_{z}(3)$$

$$\hat{E}_{z}(3) = \hat{E}_{z}(7) = \hat{E}_{z}(11) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}E_{z}(2) + \frac{2}{3}E_{z}(3)\right) = \frac{1}{9}E_{z}(2) + \frac{2}{9}E_{z}(3)$$

$$\hat{E}_{z}(4) = \hat{E}_{z}(8) = \hat{E}_{z}(12) = \frac{1}{3}E_{z}(3) = \frac{3}{9}E_{z}(3)$$
(4.15)

 $^{^{1}}$ Przy zastosowaniu interpretacji całkowej można każde równanie przemnożyć przez 3, podobnie jak w zależności (4.8).



Rysunek 4.15: Wyznaczanie próbek pola magnetycznego podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ z próbek poddziedziny $\hat{\Omega}$ znajdujących się tuż przy granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ w płaszczyźnie do niej równoległej.

Dla składowej $E_x(3)$ (patrz rys. 4.12) interpolacja przebiegać będzie analogicznie, z tym że kierunkiem interpolacji liniowej będzie w tym wypadku oś z.

Macierz S_H. Podobnie, zgodnie z metodologią podaną w podrozdziale 4.1.2, można wyznaczyć próbki pola magnetycznego stanowiące warunki brzegowe podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, które uzyskuje się na podstawie próbek z poddziedziny $\hat{\Omega}$ (patrz rys. 4.15). Próbka brzegowa $H_z(2)$ tworzona jest z sumy 15 próbek poddziedziny $\hat{\Omega}$, znajdujących się tuż przy granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$, zaś dobór odpowiednich współczynników wagi wynika z przedstawionej w podrozdziale 4.1.1 zasady wzajemności. W rezultacie otrzymujemy następujące zależności pozwalające wyznaczyć próbki $H_z(2)$ oraz $H_x(1)$:

$$H_{z}(2) = \frac{1}{9} \cdot \left(\widehat{H}_{z}(1) + \widehat{H}_{z}(2) + \widehat{H}_{z}(3)\right) + \frac{2}{9} \cdot \left(\widehat{H}_{z}(4) + \widehat{H}_{z}(5) + \widehat{H}_{z}(6)\right) + \frac{2}{9} \cdot \left(\widehat{H}_{z}(10) + \widehat{H}_{z}(11) + \widehat{H}_{z}(12)\right) + \frac{1}{9} \cdot \left(\widehat{H}_{z}(13) + \widehat{H}_{z}(14) + \widehat{H}_{z}(15)\right) + \frac{3}{9} \cdot \left(\widehat{H}_{z}(7) + \widehat{H}_{z}(8) + \widehat{H}_{z}(9)\right)$$
(4.16)

78



Rysunek 4.16: Wyznaczanie próbek pola magnetycznego podprzestrzeni $\Omega \backslash \bar{\Omega}$ w narożniku wydzielonej poddziedziny. Cienka przerywana linia wyznacza linie próbek pola magnetycznego.

$$H_{x}(1) = \frac{1}{9} \cdot \left(\widehat{H}_{x}(1) + \widehat{H}_{x}(6) + \widehat{H}_{x}(11)\right) + \frac{2}{9} \cdot \left(\widehat{H}_{x}(2) + \widehat{H}_{x}(7) + \widehat{H}_{x}(12)\right) + \frac{2}{9} \cdot \left(\widehat{H}_{x}(4) + \widehat{H}_{x}(9) + \widehat{H}_{x}(14)\right) + \frac{1}{9} \cdot \left(\widehat{H}_{x}(5) + \widehat{H}_{x}(10) + \widehat{H}_{x}(15)\right) + \frac{3}{9} \cdot \left(\widehat{H}_{x}(3) + \widehat{H}_{x}(8) + \widehat{H}_{x}(13)\right)$$
(4.17)

Tak jak dla przypadku dwuwymiarowego o polaryzacji TM, w przypadku rogów wydzielonej poddziedziny sposób wyznaczania pól magnetycznych ulega nieznacznej modyfikacji (patrz rys. 4.16). Przykładowa próbka $H_x(1)$ wyznaczana jest za pomocą następującej zależności:

$$H_x(1) = \frac{1}{9} \cdot \left(\widehat{H}_x(1) + \widehat{H}_x(3) + \widehat{H}_x(5)\right) + \frac{2}{9} \cdot \left(\widehat{H}_x(2) + \widehat{H}_x(4) + \widehat{H}_x(6)\right) \quad (4.18)$$

Przy czym należy pamiętać, że większe wartości sprzężeń występują zawsze od strony narożnika granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$. Uzyskana w ten sposób próbka narożna, podobnie jak w przypadku polaryzacji TM, jest uwzględniana podczas wyznaczania narożnej próbki pola elektrycznego z próbek pola \vec{H} podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$.

Dla innych wartości r współczynniki w równaniach (4.15)–(4.18) wynoszą $\frac{1}{r^2}$, $\frac{2}{r^2}$... $\frac{r}{r^2}$, zaś opisana wcześniej zasada wzajemności spełniona jest również w implementacji stabilnego schematu interpolacyjnego dla trójwymiarowych algorytmów różnicowych. Uzyskane dzięki temu schematowi macierze interpolujące prowadzą do macierzy $\hat{\mathbf{S}}_E$ i \mathbf{S}_H , które spełniać będą warunek (4.2) przy $\alpha = 1$. Każde sprzężenie próbki pola elektrycznego z podprzestrzeni $\Omega \backslash \hat{\Omega}$ z próbką pola \vec{H} podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ związane więc będzie z dokładnie takim samym sprzężeniem odwrotnym.

4.2 Niskoodbiciowy algorytm interpolacji pomiędzy podprzestrzeniami

Wadą stabilnego algorytmu interpolacji wykorzystywanego do sprzężenia podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ są duże odbicia od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$. Oznacza to, że praktyczne użycie metody wydzielania podprzestrzeni przynosić będzie poprawę dokładności tylko wtedy, gdy gęstość siatki przestrzeni obliczeniowej Ω jest dostatecznie duża. W przeciwnym razie, wysokie poziomy odbić od granicy wydzielonej podprzestrzeni $\hat{\Omega}$, które rosną wraz ze wzrostem współczynnika zagęszczenia r, będą przyczyną znacznych niedokładności i błędów. Opracować można jednak takie algorytmy interpolacji, które pomimo wykorzystania prostej interpolacji liniowej pozwolą osiągnąć niskie współczynniki odbicia od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ [36, 45].

4.2.1 Interpolacja liniowa w dwuwymiarowym algorytmie różnicowym

Uzyskanie wysokiej dokładności w procesie sprzęgania próbek pól podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ wiąże się z odpowiednim dobraniem próbek pól poddziedziny $\hat{\Omega}$, z których wyznaczone zostaną próbki *odpowiedzi* będące warunkami brzegowymi dla podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$. Podobnie jak w przypadku stabilnego schematu interpolacji próbek pól, nowy sposób interpolacji wprowadzony zostanie najpierw w algorytmach dwuwymiarowych. Opracowanie algorytmu interpolacji dla problemów dwuwymiarowych o polaryzacjach *TE* i *TM* pozwoli łatwo przenieść opisaną metodologię interpolacji do trójwymiarowych algorytmów różnicowych.

Dwuwymiarowy schemat różnicowy - polaryzacja TE

Wydzielenie podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ (patrz rys. 4.3) wymaga określenia *pobudzenia* i *odpowiedzi*, przy czym tę ostatnią tworzą próbki pola magnetycznego poddziedziny $\hat{\Omega}$ znajdujące się najbliżej granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$. Z nich uzyskuje się warunki brzegowe dla podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$.

Rozważmy alternatywny przypadek interpolacji próbek pól wykorzystując obserwacje poczynione dla sytuacji przedstawionej na rys. 4.17. W przypadku braku zagęszczenia, próbki poddziedziny $\hat{\Omega}$, z których tworzona jest *odpowiedź* $\hat{\Omega}$, znajdują się w odległości $\Delta/2$ od granicy, a ich pozycja pokrywa się z położeniem próbek pól magnetycznych fragmentu przestrzeni obliczeniowej Ω , który został wycięty. Pokrywające się próbki podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ określane będą jako *współpołożone* (ang. *collocated*). W tym kontekście rozpatrywać można również przedstawiony na rys. 4.18 przypadek włączenia podprzestrzeni zagęszczonej trzykrotnie w stosunku do przestrzeni obliczeniowej Ω . Wyznaczenie próbek *odpowiedzi* w oparciu o próbki znajdujące się najbliżej granicy, a więc z linii odległej od



Rysunek 4.17: Wydzielenie w przestrzeni obliczeniowej Ω podprzestrzeni $\widehat{\Omega}$ przy braku zagęszczenia.



Rysunek 4.18: Wydzielenie w przestrzeni obliczeniowej Ω podprzestrzeni $\widehat{\Omega}$ zagęszczonej trzykrotnie.

granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$ o $\widehat{\Delta}/2$, powoduje, że uzyskiwane próbki brzegowe również znajdują się w odległości $\widehat{\Delta}/2$ od granicy pomiędzy poddziedzinami (patrz rys. 4.5 i rys. 4.18).

Aby próbki *odpowiedzi* stanowiące warunki brzegowe poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ były *współpo-*



Rysunek 4.19: Efekt dyslokacji próbki pola elektrycznego w przypadku, gdy próbki *odpowiedzi* tworzone są z próbek podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ leżących najbliżej granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ (a) oraz brak tego efektu gdy próbki tworzące *odpowiedź* są odległe o $\Delta/2$ od granicy (rysunek b).



Rysunek 4.20: Graficzna ilustracja interpolacji na granicy pomiędzy poddziedzinami $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ w algorytmie wykorzystującym próbki *współpołożone*.

łożone, próbki pola magnetycznego, z których wyznaczane są *odpowiedzi*, również muszą być *współpołożone*. Sytuacja taka będzie miała miejsce, jeżeli próbki z podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ będą wybierane z linii oddalonej o $\Delta/2$ od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ (patrz rys. 4.18). Gdy próbka *odpowiedzi* położona jest w odległości $\Delta/2$ od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$, pozycja wyliczonej z jej wykorzystaniem próbki pola elektrycznego pokrywa się z próbką *pobudzenia* znajdującą się dokładnie na granicy (rys. 4.19b). Natomiast, jeżeli próbka *odpowiedzi* położona będzie w odległości $\hat{\Delta}/2$, pojawi się efekt dyslokacji powodujący błędy fazy próbki *pobudzającej* (rys. 4.19a), przy czym błędy te będą rosły wraz z zagęszczaniem siatki w podprzestrzeni $\hat{\Omega}$.

Interpolacja w algorytmie wykorzystującym próbki *współpołożone* przedstawiona została na rys. 4.20. Posługując się interpretacją przedstawioną w podrozdziale 4.1, próbki pól elektrycznych stanowiących *pobudzenie* i magnetycznych będących *odpowiedziami* wyznacza się za pomocą następujących równań:

$$\hat{E}_x(1) = \hat{E}_x(2) = \hat{E}_x(3) = E_x(1)$$
(4.19)

$$H_z(2) = \frac{1}{3}\widehat{H}_z(4) + \frac{1}{3}\widehat{H}_z(5) + \frac{1}{3}\widehat{H}_z(6)$$
(4.20)

Relacje te wykorzystane są do utworzenia macierzy $\widehat{\mathbf{S}}_E$ i \mathbf{S}_H .

Dwuwymiarowy schemat różnicowy - polaryzacja TM

Wprowadzona powyżej dla dwuwymiarowego algorytmu różnicowego z polaryzacją TE metoda eliminacji efektu dyslokacji w procesie interpolacji próbek pól pomiędzy podprzestrzeniami $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$, może zostać wykorzystana także w polaryzacji TM. Dodatkowo, można w łatwy sposób uprościć sposób wyznaczania próbek *odpowiedzi*, co ułatwia implementację algorytmu w problemach trójwymiarowych.



Rysunek 4.21: Poddziedzina $\widehat{\Omega}$ włączona do podprzestrzeni $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ przy r = 3. Próbki *odpowiedzi* uzyskiwane będą z próbek podprzestrzeni $\widehat{\Omega}$ odległych od granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$ o $\Delta/2$.



Rysunek 4.22: Ilustracja interpolacji pola magnetycznego na granicy pomiędzy poddziedzinami (polaryzacja TM). Wybierane próbki pól magnetycznych podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ znajdują się w odległości $\Delta/2$ od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$.

Rozważmy przestrzeń obliczeniową Ω , w której wydzielono podprzestrzeń Ω i włączono ją jako trzykrotnie zagęszczoną poddziedzinę (rys. 4.21). W oparciu o próbki pola elektrycznego będące *pobudzeniem* podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ (np. $E_z(2)$, $E_z(3)$, $E_z(4)$) wyznaczane są próbki graniczne podprzestrzeni $\hat{\Omega}$. Interpolacja przebiega w ten sam sposób, jak dla stabilnego algorytmu interpolacji liniowej (patrz rys. 4.8), a więc próbki pola \vec{E} uzyskiwane są za pomocą (4.11). Macierz $\hat{\mathbf{S}}_E$ jest zatem podobna, jak dla przypadku opisanego na str. 71.

Próbki pola magnetycznego podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ ($\hat{H}_x(10)$, $\hat{H}_x(11)$, $\hat{H}_x(12)$), z których wyznacza się próbki brzegowe dla poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, tu reprezentowanej przez $H_x(3)$, zostały wyróżnione na rys. 4.22. Jak łatwo zauważyć w tym przypadku próbki *odpowiedzi* uzyskiwane są z r = 3 próbek podprzestrzeni $\hat{\Omega}$, przy czym wykorzystywana jest następująca zależność:

$$H_x(3) = \frac{1}{3}\widehat{H}_x(10) + \frac{1}{3}\widehat{H}_x(11) + \frac{1}{3}\widehat{H}_x(12)$$
(4.21)

Porównując tę zależność z (4.12) określoną dla algorytmu stabilnego z dyslokacją można stwierdzić dwie różnice:

- wykorzystane są próbki z linii odległej od granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} \widehat{\Omega}$ o $\Delta/2$, a nie o $\widehat{\Delta}/2$,
- do wyznaczenia *odpowiedzi* wykorzystywane są trzy (zamiast pięciu) próbki z podprzestrzeni $\hat{\Omega}$.

Warto przy tym zaznaczyć, że w tym algorytmie interpolacji narożne próbki pola \vec{E} wyliczane są wyłącznie przy użyciu próbek podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ (np. $H_x(2)$ i $H_y(2)$), a



Rysunek 4.23: Fragment siatki Yee w okolicy granicy pomiędzy poddziedzinami $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$. Próbki odpowiedzi są *współpołożone* z próbkami przestrzeni obliczeniowej Ω , dzięki czemu nie wystąpi efekt dyslokacji.

więc nie wyznacza się z próbek poddziedziny $\hat{\Omega}$ odpowiedzi sprzęgającej się z pobudzeniami narożnymi.

4.2.2 Interpolacja liniowa w trójwymiarowym algorytmie różnicowym

Posługując się wprowadzoną dla dwuwymiarowych zagadnień różnicowych metodologią poprawy dokładności analizy poprzez wybór odpowiednich próbek pól \vec{H} do wyznaczenia *odpowiedzi*, można stworzyć niskoodbiciowy algorytm interpolacyjny dla problemów trójwymiarowych.

Rozważmy przypadek wydzielenia podprzestrzeni Ω w przestrzeni obliczeniowej Ω prezentowany na rys. 4.11. Ze względu na duże podobieństwo ze stabilnym algorytmem interpolacji prezentowanym w podrozdziale 4.1.3, próbki *pobudzenia* wybierane są tak jak to pokaznano na rys. 4.12. W identyczny sposób interpolowane są również próbki pola \vec{E} podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ stanowiące dla niej warunki brzegowe (4.15).

Dla wyznaczenia macierzy \mathbf{S}_H , próbki pola magnetycznego, z których wyznaczane są próbki *odpowiedzi*, wybierane są z płaszczyzny odległej od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ o odległość $\Delta/2$, co przedstawiono na rys. 4.23. Dzięki temu możliwe będzie wyeliminowanie efektu dyslokacji i znaczne zredukowanie odbić na granicy. Sposób wyznaczania *odpowiedzi* z próbek



Rysunek 4.24: Wyznaczanie *odpowiedzi* z próbek podprzestrzeni $\hat{\Omega}$.

podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ przedstawiono na rys. 4.24. Jak łatwo zauważyć w tym przypadku próbki pola \vec{H} stanowiące warunki brzegowe poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ otrzymywane są z dziewięciu, a nie piętnastu, próbek podprzestrzeni $\hat{\Omega}^2$. Użyte przy tym będą następujące zależności:

$$H_{x}(1) = \frac{\widehat{H}_{x}(1) + \widehat{H}_{x}(2) + \widehat{H}_{x}(3) + \widehat{H}_{x}(4) + \widehat{H}_{x}(5) + \widehat{H}_{x}(6) + \widehat{H}_{x}(7) + \widehat{H}_{x}(8) + \widehat{H}_{x}(9)}{3}$$

$$H_{z}(2) = \frac{\widehat{H}_{z}(1) + \widehat{H}_{z}(2) + \widehat{H}_{z}(3) + \widehat{H}_{z}(4) + \widehat{H}_{z}(5) + \widehat{H}_{z}(6) + \widehat{H}_{z}(7) + \widehat{H}_{z}(8) + \widehat{H}_{z}(9)}{3}$$

$$(4.23)$$

Podobnie jak w przypadku problemu dwuwymiarowego o polaryzacji TM, próbki *odpo-wiedzi* nie będą sprzęgać narożnych próbek pola \vec{E} stanowiących *pobudzenie*.

4.2.3 Stabilność niskoodbiciowego schematu interpolującego

Aby pozbyć się efektu dyslokacji, konieczne jest, aby próbki pola magnetycznego użyte do wyznaczania *odpowiedzi* przestrzeni $\hat{\Omega}$, znajdowały się w odległości $\Delta/2$ od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$. Oznacza to, że nie będzie mogła być spełniona wprowadzona wcześniej *zasada wzajemności*. Wynika to z faktu, że *pobudzenie* sprzęga się z próbkami leżącymi tuż przy granicy, zaś sprzężenie odwrotne wykorzystuje próbki odległe o $\Delta/2$ od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega}$. $\hat{\Omega}$. Naruszenie *zasady wzajemności* oznacza, że zależność (4.2) nie będzie spełniona, a w

²Dla r-krotnego zagęszczenia (r nieparzyste) należy uwzględnić r^2 próbek.

iteracyjnym algorytmie *FDTD* pojawić się może tzw. późna niestabilność, która co prawda nie wyklucza praktycznego stosowania algorytmu, ale nie daje gwarancji zakończenia każdej symulacji.

4.3 Stabilny algorytm interpolacji o zwiększonej dokładności

Opisane do tej pory algorytmy mają ograniczoną stosowalność. Z jednej strony do dyspozycji jest stabilny algorytm interpolacyjny, który, choć wiarygodny z punktu widzenia przeprowadzenia całości obliczeń, może prowadzić do wyników obarczonych błędami. Z drugiej strony niskoodbiciowy schemat interpolacyjny umożliwia uzyskiwanie dokładnych wyników, lecz nie gwarantuje stabilności.

Pożądanym rozwiązaniem jest więc opracowanie nowego algorytmu, który połączy zalety obu opisanych w tym rozdziale schematów interpolacyjnych (tj. stabilność i dokładność). Aby tego dokonać należy tak skonstruować macierze sprzęgające, aby spełniona została zasada wzajemności, a próbki odpowiedzi uzyskane z próbek podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ były współpołożone z próbkami przestrzeni obliczeniowej Ω .

4.3.1 Interpolacja liniowa w dwuwymiarowym algorytmie różnicowym

Choć na pierwszy rzut oka stabilność i dokładność schematu interpolacyjnego zdają się wykluczać, na przykładzie dwuwymiarowego algorytmu różnicowego przedstawiona zostanie metoda, dzięki której można połączyć te dwie cechy. W metodzie tej próbki pól magnetycznych tworzące odpowiedź wyznaczane są w taki sposób, aby próbki będące warunkami brzegowymi podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ były współpołożone, co jak wiadomo odpowiada za niskie odbicia w schematach interpolacyjnych. Stabilność wynikowego algorytmu iteracyjnego związana ze spełnieniem zasady wzajemności, zapewniona zostanie z kolei poprzez modyfikację sposobu pobudzania poddziedziny $\hat{\Omega}$.

Dwuwymiarowy schemat różnicowy - polaryzacja TE

Rozważmy dwuwymiarowy problem różnicowy o polaryzacji TE, w którym wydzielona została podprzestrzeń $\hat{\Omega}$, przedstawiony na rys. 4.18. Macierz \mathbf{S}_H tworzona jest identycznie, jak dla algorytmu niestabilnego, w oparciu o relację (4.20) wykorzystującą próbki z linii odległej o $\Delta/2$ od granicy. W takim razie skoro wyznaczanie próbek *odpowiedzi* przeprowadzane jest według zależności (4.20) tworzącej próbki *współpołożone*, to aby spełnić *zasadę wzajemności* zmodyfikowany musi zostać sposób sprzęgania próbek *pobudzenia* z podprzestrzenią $\hat{\Omega}$.



Rysunek 4.25: Próbki pól w okolicy granicy pomiędzy poddziedzinami $\Omega \setminus \Omega$ i Ω .



Rysunek 4.26: Sprzężenia pomiędzy próbkami w okolicy granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$

Przedstawiony na rys. 4.25 fragment przestrzeni obliczeniowej w okolicy granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ – $\widehat{\Omega}$ zawiera zarówno próbki *pobudzenia*, jak i próbki pola elektrycznego podprzestrzeni $\widehat{\Omega}$. Aby zapewnić spełnienie *zasady wzajemności*, próbki pola elektrycznego wyznaczane są następująco:

$$\widehat{E}_x(1) = \widehat{E}_x(2) = \widehat{E}_x(3) = \widehat{E}_x(4) = \widehat{E}_x(5) = \widehat{E}_x(6) = E_x(1)$$
(4.24)

Jak łatwo zauważyć, z powyższej relacji wynika, że próbki pola magnetycznego $\widehat{H}_z(1)$, $\widehat{H}_z(2)$ i $\widehat{H}_z(3)$ (tzn. najbliższe granicy) nie będą pobudzane przez $E_x(1)$. Próbka $E_x(1)$ stanowiąca pobudzenie będzie się więc sprzęgać jedynie z próbkami $\widehat{H}_z(4)$, $\widehat{H}_z(5)$ i $\widehat{H}_z(6)$, co oznacza, że spełniona będzie *zasada wzajemności* przedstawiona na rys. 4.26: próbka $E_x(1)$ sprzęgać się będzie ze współczynnikiem +1 z próbkami $\widehat{H}_z(4)-\widehat{H}_z(6)$, a te z kolei poprzez sprzężenie zwrotne ze współczynnikiem $+\frac{1}{3}$ z próbką $E_x(1)$. Implikuje to spełnienie warunku (4.2) dla wpółczynnika α równego $\frac{1}{r}$.

Dwuwymiarowy schemat różnicowy - polaryzacja TM

Schemat stabilnej i niskoodbiciowej interpolacji jest łatwy w implementacji dla przypadku dwuwymiarowej analizy różnicowej z polaryzacją TE. Z próbek pola elektrycznego podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ stanowiących *pobudzenie* interpolowane są próbki pola \vec{E} zawarte pomiędzy granicą $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$, a odległym o $\Delta/2$ miejscem, z którego wybierane są pola magnetyczne do utworzenia *odpowiedzi*. W tym kontekście specyfika polaryzacji TE sprawia, że w okolicy rogów podprzestrzeni Ω nowa interpolacja nie sprawia dodatkowych problemów, a obecność tylko jednej składowej pola magnetycznego znacznie upraszcza algorytm. Uzyskanie tego samego efektu dla polaryzacji TM jest znacznie trudniejsze. Wiąże się to ze specyfiką tej polaryzacji polegającą na konieczności przeprowadzenia liniowej interpolacji pomiędzy próbkami *pobudzenia*, jak i obecnością dwóch składowych pola magnetycznego.

Rozważmy fragment przestrzeni obliczeniowej w okolicy granicy pomiędzy poddziedzinami $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ przedstawiony na rys. 4.27. Sposób interpolacji pozwalającej uzyskać stabilność i niskie odbicia w wynikowym schemacie FDTD jest zbliżony do mechanizmu opisanego dla polaryzacji *TE*. Polega on na wyznaczeniu próbek pola elektrycznego w ten sam sposób, jak dla przypadku algorytmu niskoodbiciowego, a następnie przeprowadzeniu tej procedury (czyli *de facto* podstawienia otrzymanych wartości) dla wszystkich próbek pola \vec{E} znajdujących się pomiędzy granicą $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ i linią, z której pobierana jest odpowiedź. Dzięki temu próbki pola magnetycznego styczne do granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ i leżące w odległości mniejszej niż $\Delta/2$ od niej nie będą pobudzane, co jest niezbędne, aby była spełniona *zasada wzajemności*.

Ponieważ implementacja algorytmu stabilnej i niskoodbiciowej interpolacji jest w tej polaryzacji bardziej złożona, konstrukcja macierzy sprzężeń będzie przebiegać dwuetapowo. Oddzielnie przeprowadzona zostanie interpolacja na granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ leżącej w kierunku x i y, co wiąże się z konstrukcją dwóch cząstkowych macierzy sprzężeń. Ich suma daje kompletną macierz $\hat{\mathbf{S}}_{E}$.

Wyznaczenie sprzężeń z próbkami pola \vec{H} podprzestrzeni Ω pobudzeń leżących na granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ wzdłuż osi x (próbki $E_x(14)$, $E_z(15)$ i $E_z(16)$ na rys. 4.27) prowadzi do następujących zależności:

$$\hat{E}_{z}(2) = \hat{E}_{z}(12) = \frac{2}{3}E_{z}(14) + \frac{1}{3}E_{z}(15)$$

$$\hat{E}_{z}(3) = \hat{E}_{z}(13) = \frac{1}{3}E_{z}(14) + \frac{2}{3}E_{z}(15)$$

$$\hat{E}_{z}(4) = \hat{E}_{z}(14) = E_{z}(15)$$

$$\hat{E}_{z}(5) = \hat{E}_{z}(15) = \frac{2}{3}E_{z}(15) + \frac{1}{3}E_{z}(16)$$

$$\hat{E}_{z}(6) = \hat{E}_{z}(16) = \frac{1}{3}E_{z}(15) + \frac{2}{3}E_{z}(16)$$
(4.25)

Na podobnej zasadzie wyznacza się próbki pola elektrycznego interpolowane z pobudzeń



Rysunek 4.27: Próbki pól podprzestrzeni $\Omega \backslash \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ w okolicy granicy pomiędzy poddziedzinami.

wzdłuż granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$ równoległej do osi y:

$$\hat{E}_{z}(11) = \hat{E}_{z}(12) = \frac{2}{3}E_{z}(14) + \frac{1}{3}E_{z}(20)$$

$$\hat{E}_{z}(21) = \hat{E}_{z}(22) = \frac{1}{3}E_{z}(14) + \frac{2}{3}E_{z}(20)$$

$$\hat{E}_{z}(31) = \hat{E}_{z}(32) = E_{z}(20)$$

$$\hat{E}_{z}(41) = \hat{E}_{z}(42) = \frac{2}{3}E_{z}(20) + \frac{1}{3}E_{z}(26)$$

$$\hat{E}_{z}(51) = \hat{E}_{z}(52) = \frac{1}{3}E_{z}(20) + \frac{2}{3}E_{z}(26)$$
(4.2)

89

(4.26)



Rysunek 4.28: Sprzężenia w okolicy próbek $E_z(15)$, $E_z(20)$ i narożnej $E_z(14)$ pomiędzy *pobudzeniami* leżącymi wzdłuż osi x (a) oraz wzdłuż osi y (b) a próbkami pola \vec{H} w poddziedzinie $\hat{\Omega}$.



Rysunek 4.29: Całkowite sprzężenie narożnego *pobudzenia* z próbkami pola magnetycznego poddziedziny $\widehat{\Omega}$.

Na podstawie interpolowanych wartości pola \vec{E} obliczane są próbki składowych H_x i H_y wewnątrz $\hat{\Omega}$. Powstają wówczas dwie macierze sprzężeń, z których jedna zawiera wartości sprzężeń pomiędzy pobudzeniami wzdłuż granicy równoległej do osi x, a druga wzdłuż osi y. Przykładowe wartości sprzężeń dla próbki narożnej $E_z(14)$ i próbki $E_z(15)$ oraz sprzężeń dla pobudzeń umieszczonych wzdłuż granicy równoległej do osi y przedstawiono na rys. 4.28.



Rysunek 4.30: Ilustracja procesu wyznaczania macierzy \mathbf{S}_H na podstawie *odpowiedzi* z próbek pola magnetycznego poddziedziny $\hat{\Omega}$.

Rozdzielenie sprzężeń na rys. 4.28 jest niezbędne dla zachowania łatwej implementacji prezentowanego algorytmu. Ponieważ jednak różne próbki *pobudzenia* sprzęgaja się z tymi samymi próbkami pola \vec{H} podprzestrzeni $\hat{\Omega}$, sumaryczne sprzężenia będą sumą wpływu poszczególnych próbek. Warto przy tym zwrócić uwagę, że *współczynniki sprzężenia* dla narożnego *pobudzenia* $E_z(14)$ wykazują pewną niekonsekwencję. Dla próbek leżących tuż przy granicy sprzężenie ma przeciwny znak i jest dwukrotnie większe, niż pozostałe. Równoważy ono część nadmiaru energii, która pojawia się na skutek dwukrotnego uwzględniania każdego z narożnych *pobudzeń*, i jest niezbędne dla zachowania niskich poziomów odbicia od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$. Całkowity wpływ próbki $E_z(14)$ przedstawiony został na rys. 4.29.

Przechodząc do wyznaczania macierzy \mathbf{S}_{H} , należy najpierw zaznaczyć, że zgodnie z zasadą wzajemności pojawienie się widocznych na rys. 4.28 sprzężeń powoduje konieczność uwzględnienia zarówno składowych stycznych, jak i normalnych podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ (patrz rys. 4.30).

Podobnie jak poprzednio, interpolacja *odpowiedzi* przebiega dwuetapowo. *Odpowiedzi* styczne do granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$ i leżące wzdłuż osi x uzyskiwane są w następujący sposób:

$$H_x(16) = \frac{1}{9}\widehat{H}_x(15) + \frac{2}{9}\widehat{H}_x(16) + \frac{3}{9}\widehat{H}_x(17) + \frac{2}{9}\widehat{H}_x(18) + \frac{1}{9}\widehat{H}_x(19)$$
(4.27)

$$H'_{x}(14) = \frac{2}{9}\widehat{H}_{x}(12) + \frac{1}{9}\widehat{H}_{x}(13)$$
(4.28)

Odpowiedzi normalne do granicy wyznaczane będą jako:

$$H'_{y}(17) = \frac{1}{9}\widehat{H}_{y}(14) + \frac{1}{9}\widehat{H}_{y}(15) + \frac{1}{9}\widehat{H}_{y}(16)$$
(4.29)

$$H'_{y}(14) = \frac{1}{9}\widehat{H}_{y}(11) + \frac{1}{9}\widehat{H}_{y}(12) + \frac{1}{9}\widehat{H}_{y}(13)$$
(4.30)

Drugi etap wyznaczania *odpowiedzi* przeprowadzany jest analogicznie, z tym, że wykorzystywane są próbki pola \vec{H} będące normalnymi i stycznymi do granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ równoleg
łej do osi y.

Uzyskane odpowiedzi uwzględniane są podczas obliczania próbek pobudzenia. Łatwo tu jednak zauważyć, że ze względu na oddzielne traktowanie granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ wzdłuż osi x i y próbki odpowiedzi związane z polami narożnymi (np. $H'_x(14)$ i $H'_y(14)$ z rys. 4.30) będą wyznaczane dwukrotnie. Z tego względu w uzyskanej macierzy sprzęgającej \mathbf{S}_H należy zmodyfikować sprzężenia od próbek leżących najbliżej granicy, tuż przy pobudzeniach narożnych (np. $\hat{H}_y(11)$). W efekcie uzyskuje się macierze sprzęgające, dla których spełniona jest zależność (4.2) dla $\alpha = \frac{1}{3}$. Ostateczne wartości poszczególnych sprzężeń można więc natychmiast odczytać z rys. 4.28 i 4.29, przy czym wszystkie wartości należy podzielić przez r = 3.

4.3.2 Interpolacja liniowa w trójwymiarowym algorytmie różnicowym

Wykorzystując znajomość mechanizmów stabilnej niskoodbiciowej interpolacji w problemach dwuwymiarowych, w prosty sposób można stworzyć trójwymiarową wersję tego algorytmu. Zauważyć można, że z pól elektrycznych podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ stanowiących *pobudzenie*, próbki pola \vec{E} w poddziedzinie $\hat{\Omega}$ w płaszczyźnie granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ interpolowane są w taki sam sposób we wszystkich trzech algorytmach zgodnie z zależnością (4.15).

W przypadku stabilnego niskoodbiciowego schematu interpolacyjnego, po interpolacji próbek pól na płaszczyznach granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ należy wpisać uzyskane wartości próbkom stycznym do płaszczyzny granicznej i znajdującym się pomiędzy nimi, a płaszczyzną, z której wybierane są próbki pola \vec{H} do wyznaczenia *odpowiedzi* w algorytmie interpolacji niskoodbiciowej (patrz rys. 4.31a). W przypadku, gdy jedna z próbek *pobudzenia* położona jest na rogu podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ (rys. 4.31b), pokrywające się z nią próbki pola \vec{E} podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ ($\hat{E}_z(4), \hat{E}_z(8), \hat{E}_z(12)$) nie są uwzględniane w procesie interpolacji. W efekcie przeprowadzanych działań otrzymuje się mechanizm sprzęgania próbek pól za pomocą macierzy $\hat{\mathbf{S}}_E$, który, podobnie jak w przypadku dwuwymiarowego schematu o polaryzacji TM, powinien być przeprowadzony oddzielnie dla każdej płaszczyzny granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$.



Rysunek 4.31: Interpolacja próbek pól elektrycznych w podprzestrzeni Ω . Wyinterpolowane próbki wstawiane są w płaszczyznach stycznych do płaszczyzny granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$. Rysunek *a* odnosi się do próbek wewnętrznych, zaś rysunek *b* do próbek narożnych. Dla r = 3 takie same wartości przypisane są próbkom w płaszczyźnie granicznej $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$ i płaszczyźnie odległej od granicy o $\widehat{\Delta}$.

Wykorzystując powyższe, a następnie sumując macierze cząstkowe otrzymane dla wszystkich sześciu płaszczyzn granicznych można w prosty sposób uzyskać macierz \hat{S}_E . Wartości sprzężeń z próbkami stycznymi wynosić będą $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ i $\frac{3}{9}$, zaś z próbkami normalnymi $\frac{1}{9}$. Podobnie jak w przypadku polaryzacji TM przy *pobudzeniu* narożnym pojawi się sprzężenie korygujące równe $\frac{2}{9}$.

Próbki pola magnetycznego stanowiące *odpowiedź* przedstawiono na rys. 4.32. Zgodnie z oczekiwaniami, w skład *odpowiedzi* wchodzą zarówno próbki styczne jak i normalne do płaszczyzny granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$. Próbki styczne poddziedziny $\hat{\Omega}$, z których tworzy się *odpowiedź*, leżą w płaszczyźnie odległej od granicy o $\Delta/2$ i są wyznaczane z próbek przedstawionych na rys. 4.15, zgodnie z zależnościami (4.16) oraz (4.17).

Składowe prostopadłe do granicy $(H'_y(1), H'_y(2), H'_y(3)$ i $H'_y(4)$ na rys. 4.32) uzyskuje się z próbek pól \vec{H} poddziedziny $\hat{\Omega}$ przedstawionych na rys.4.33, według następującego



Rysunek 4.32: Próbki *odpowiedzi* w stabilnym niskoodbiciowym algorytmie interpolacyjnym.



Rysunek 4.33: Wyznaczanie *odpowiedzi* normalnej do granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$.

równania:

$$H'_{y}(1) = \frac{\widehat{H}_{y}(1) + \widehat{H}_{y}(2) + \widehat{H}_{y}(3) + \widehat{H}_{y}(4) + \widehat{H}_{y}(5) + \widehat{H}_{y}(6) + \widehat{H}_{y}(7) + \widehat{H}_{y}(8) + \widehat{H}_{y}(9)}{9}$$

$$(4.31)$$

Ostatnim elementem konstrukcji macierzy \mathbf{S}_H jest modyfikacja sprzężeń w pobliżu narożnych próbek *pobudzenia*. W ten sam sposób jak było to przeprowadzane dla polaryzacji TM. Uzyskane wartości sprzężenia będą dzięki temu zabiegowi identyczne jak w macierzy \hat{S}_E , co oznacza, że otrzymane *macierze sprzężeń* spełniają zależność (4.1). W efekcie algorytm FDTD wykorzystujący tak skonstruowane macierze $\hat{\mathbf{S}}_E$ i \mathbf{S}_H będzie dokładny i stabilny.



Rysunek 4.34: Porównanie trzech sposobów sprzęgania poddziedziny $\widehat{\Omega} \ge \Omega \setminus \widehat{\Omega}$ na przykładzie dwuwymiarowej siatki Yee.

4.4 Porównanie wprowadzonych metod sprzęgania podprzestrzeni

W niniejszym podrozdziale porównane zostaną wszystkie trzy schematy sprzęgania podprzestrzeni. Schematy te najłatwiej jest przeanalizować obserwując uzyskane w wyniku interpolacji współczynniki sprzężenia pomiędzy próbkami pola elektrycznego stanowiącymi pobudzenie podprzestrzeni $\hat{\Omega}$, a próbkami pola \vec{H} wewnątrz $\hat{\Omega}$.

Rozważmy dwuwymiarowy schemat różnicowy o polaryzacji TE i współczynniku zagęszczenia r = 3, w którym sprzężenie pomiędzy poddziedzinami realizowane jest według jednego ze schematów przedstawionych na rys. 4.34.

Stabilny schemat interpolacji, w którym obecna jest dyslokacja, przedstawiony został na rys. 4.34a. Próbka pobudzenia $E_x(1)$ sprzęga się z najbliższymi próbkami pola magnetycznego z podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ ($\hat{H}_z(1)$, $\hat{H}_z(2)$ i $\hat{H}_z(3)$) ze współczynnikiem sprzężenia równym 1. Sprzężenie odwrotne wynosi $\frac{1}{3}$, a ponieważ występuje pomiędzy tymi samymi próbkami, z którymi sprzęgała się wcześniej próbka $E_x(1)$, spełniona jest zasada wzajemności, a wynikowy schemat *FDTD* jest stabilny.

Wadą schematu stabilnego opisanego powyżej jest obecność dyslokacji związana z tym, że do uzyskania *odpowiedzi* używa się próbek nie leżących w odległości $\Delta/2$ od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ – $\hat{\Omega}$. Wykorzystanie próbek $\hat{H}_z(4)$, $\hat{H}_z(5)$ i $\hat{H}_z(6)$ w procesie sprzęgania poddziedzin (patrz rys. 4.34b) pozwala pozbyć się błędów spowodowanych dyslokacją. Poprawienie dokładności w taki sposób powoduje jednak, że sprzęganie poddziedzin nie będzie spełniało *zasady wzajemności*.

Alternatywnym podejściem, pozwalającym poprawić dokładność, jest interpolacja wszystkich próbek pola \vec{E} stycznych do granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$, które znajdują się w odległości mniejszej niż $\Delta/2$. Taki zabieg powoduje, że *pobudzenie* $E_x(1)$ sprzęga wyłącznie te próbki pola magnetycznego z $\hat{\Omega}$, które użyte są do uzyskania *odpowiedzi* znajdującej się w odległości $\Delta/2$ od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ (rys. 4.34c). W ten sposób można uzyskać zarówno niskie odbicia od granicy pomiędzy poddziedzinami, jak i stabilność wynikowego algorytmu *FDTD*. Warto przy tym zauważyć, że zastosowanie tego sposobu sprzęgania poddziedzin dla polaryzacji TM i w przypadku siatki trójwymiarowej jest bardziej złożone (konieczność komplikacji interpolacji w okolicy rogów poddziedziny).

Rozdział 5

Włączanie makromodeli

Wprowadzenie mechanizmów pozwalających na konstruowanie operatorów globalnych w przypadku swobodnego wydzielania poddziedzin w przestrzeni obliczeniowej Ω umożliwia generację *makromodeli* i ich włączanie do operatorów różnicowych.

Makromodel jest to bardzo zwarty i używający niewielu zmiennych opis własności elektromagnetycznych poddziedziny przestrzeni obliczeniowej Ω za pomocą funkcji macierzowej wiążącej próbki pola elektrycznego i magnetycznego na granicy poddziedziny. Zakładając istnienie operatorów globalnych sformułowanych dla przestrzeni obliczeniowej Ω z wydzieloną poddziedziną, proces generacji *makromodelu* można podzielić na trzy fazy:

- budowa funkcji przejścia określającej relację pomiędzy próbkami pól na brzegu wydzielonej podprzestrzeni,
- redukcja funkcji przejścia (utworzenie makromodelu),
- włączenie *makromodelu* do operatorów globalnych problemu w miejsce operatorów wydzielonej wcześniej podprzestrzeni.

Redukcja funkcji przejścia w kontekście tworzenia *makromodeli* oznacza drastyczne zmniejszenie liczby zmiennych stanu wykorzystywanych w opisie elektromagnetycznych własności wydzielonej poddziedziny. Użyte do tego metody redukcji rzędu modelu [17–19, 57,59,76,77,96] pozwalają na precyzyjne kontrolowanie dokładności modelu, którą definiuje się na podstawie zgodności charakterystyk częstotliwościowych oryginalnej i zredukowanej funkcji przejścia w określonym pasmie częstotliwości.

Niniejszy rozdział prezentuje techniki generacji *makromodeli* i ich włączania do dyskretnych operatorów różnicowych. Rozważane przypadki obejmują zarówno proste włączanie pojedynczego *makromodelu*, jak i bardziej złożone zwielokrotnianie i zagnieżdżanie *makromodeli*.

5.1 Tworzenie funkcji przejścia dla wyodrębnionej podprzestrzeni

Wyodrębnienie podprzestrzeni w dyskretnej przestrzeni obliczeniowej pozwala stworzyć funkcję przejścia określającą zależności pomiędzy polami pobudzającymi wydzieloną poddziedzinę, a jej elektromagnetyczną odpowiedzią. Rozważmy zdyskretyzowane równania Maxwella (3.11) i (3.12) zawierające operatory globalne, słuszne dla przypadku przestrzeni obliczeniowej z wydzieloną podprzestrzenią. Rozpisując równania osobno dla $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ oraz uwzględniając (3.9) otrzymujemy:

$$\mathbf{R}'_{E}\mathbf{e}' = -s\mathbf{D}'_{\mu}\mathbf{h}'$$

$$\mathbf{B}_{H}\mathbf{I}_{H}\hat{\mathbf{L}}_{H}\hat{\mathbf{h}} + \mathbf{R}'_{H}\mathbf{h}' = s\mathbf{D}'_{\varepsilon}\mathbf{e}'$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{E}\mathbf{I}_{E}\mathbf{L}_{E}\mathbf{e}' + \hat{\mathbf{R}}_{E}\hat{\mathbf{e}} = -s\hat{\mathbf{D}}_{\mu}\hat{\mathbf{h}}$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{H}\hat{\mathbf{h}} = s\hat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}\hat{\mathbf{e}}$$
(5.1)

Na potrzeby klarownego opisu sposobu generowania funkcji przejścia podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ wprowadzone zostaną dodatkowe oznaczenia dla dyskretnych składowych pól, które są polami brzegowymi stycznymi do granicy pomiędzy poddziedzinami $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$.

5.1.1 Opis wydzielonej poddziedziny za pomocą wektorów granicznych

Niech wektory graniczne \mathbf{e}_M i \mathbf{h}_M o długości odpowiednio p i o zawierają te spróbkowane pola elektryczne i magnetyczne siatki dyskretnej w $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, których bezpośrednio używa się do wygenerowania wektorów brzegowych $\hat{\mathbf{e}}_b$ i \mathbf{h}_b , zaś $\hat{\mathbf{e}}_M$ i $\hat{\mathbf{h}}_M$ o długości odpowiednio \hat{p} i \hat{o} niech będą ich odpowiednikami z poddziedziny $\hat{\Omega}$ (patrz rys. 5.1b i rys. 5.1c). Dla nowych wektorów prawdziwe są następujące zależności okreslające wektory brzegowe $\hat{\mathbf{e}}_b$ i \mathbf{h}_b :

$$\widehat{\mathbf{e}}_{b} = \underbrace{\widehat{\mathbf{B}}_{E}\mathbf{I}_{E}\mathbf{L}_{E}}_{\widehat{\mathbf{S}}_{E}}\mathbf{e}' = \widehat{\mathbf{B}}_{E}\mathbf{I}_{E}\mathbf{e}_{M} = \widehat{\mathbf{B}}_{E}\widehat{\mathbf{e}}_{M}$$
(5.2)

$$\mathbf{h}_{b} = \underbrace{\mathbf{B}_{H}\mathbf{I}_{H}\hat{\mathbf{L}}_{H}}_{\mathbf{S}_{H}}\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{B}_{H}\mathbf{I}_{H}\hat{\mathbf{h}}_{M} = \mathbf{B}_{H}\mathbf{h}_{M}$$
(5.3)

Korzystając z powyższego, w prosty sposób można zinterpretować np. wektor graniczny \mathbf{e}_M oraz jego związki z wektorami $\hat{\mathbf{e}}_M$ i \mathbf{e}' , co przedstawiono na rys. 5.1. Wektor \mathbf{e}_M zawiera zdyskretyzowane pola elektryczne na granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}$, które stanowią pobudzenie dla operatorów podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ uzyskane z przestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ (patrz rys. 5.1b). Zgodnie z (5.2) \mathbf{e}_M otrzymuje się w wyniku wymnożenia wektora \mathbf{e}' przez macierz wybierającą \mathbf{L}_E o wymiarze $p \times N'_e$. Ponieważ podprzestrzenie $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ mogą być pokryte siatką o różnej gęstości, obliczenie wektora $\hat{\mathbf{e}}_b$ wymagać będzie interpolacji opisanej przez macierz \mathbf{I}_E . Uzyskany w



Rysunek 5.1: Zależności pomiędzy wektorami $\mathbf{e}', \mathbf{e}_M$ oraz $\hat{\mathbf{e}}_M$ na przykładzie dwuwymiarowej siatki Yee (linia przerywana) pokrywającej poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ oraz $\hat{\Omega}$ dla przypadku trzykrotnego zmniejszenia kroku dyskretyzacji przestrzeni w $\hat{\Omega}$. Za pomocą strzałek reprezentujących próbki pola elektrycznego zilustrowano: a) próbki pola z wektora \mathbf{e}', \mathbf{b}) wektor graniczny \mathbf{e}_M zawierający wybrane próbki pola \mathbf{e}', \mathbf{c}) wektor graniczny $\hat{\mathbf{e}}_M$ zawierający próbki pola interpolowane z wektora granicznego \mathbf{e}_M .

wyniku operacji $\mathbf{I}_E \mathbf{e}_M$ wektor $\hat{\mathbf{e}}_M$ zawiera próbki pól pobudzających zapisanych w postaci pól granicznych obszaru $\hat{\Omega}$ (patrz rys. 5.1c). Analogiczne rozumowanie przeprowadzone może zostać dla *wektorów granicznych* \mathbf{h}_M i $\hat{\mathbf{h}}_M$ opisanych równaniem (5.3).

Zależności (5.1) opisują dyskretne operatory podprzestrzeni dla $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ "połączone" za pomocą wektorów $\hat{\mathbf{e}}_b$ i \mathbf{h}_b zawierających pola brzegowe z granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}$, umieszczone na odpowiednich pozycjach i z odpowiednim znakiem. Dzięki wprowadzeniu *wektorów granicznych* \mathbf{e}_M , \mathbf{h}_M , $\hat{\mathbf{e}}_M$ i $\hat{\mathbf{h}}_M$ (patrz (5.2) i (5.3)) możliwe jest zapisanie zależności (5.1) w formie pozwalającej na wyodrębnienie elektromagnetycznej funkcji przejścia obszaru $\hat{\Omega}$. Po uwzględnieniu (5.2) i (5.3) równania dla obszaru $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ przyjmą postać:

$$\mathbf{R}'_{E}\mathbf{e}' = -s\mathbf{D}'_{\mu}\mathbf{h}'$$
$$\mathbf{B}_{H}\mathbf{h}_{M} + \mathbf{R}'_{H}\mathbf{h}' = s\mathbf{D}'_{\varepsilon}\mathbf{e}'$$
$$\mathbf{h}_{M} = \mathbf{I}_{H}\widehat{\mathbf{L}}_{H}\widehat{\mathbf{h}}$$
(5.4)

Warunki brzegowe zapewniane są poprzez wyodrębniony dodatkowym równaniem z wektora $\hat{\mathbf{h}}$ wektor graniczny \mathbf{h}_M . Analogicznie, wykorzystując \mathbf{e}_M zapisać można podobne relacje dla obszaru $\hat{\Omega}$ jako:

$$\widehat{\mathbf{B}}_{E}\mathbf{I}_{E}\mathbf{e}_{M} + \widehat{\mathbf{R}}_{E}\widehat{\mathbf{e}} = -s\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}\widehat{\mathbf{h}}
\widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{h}} = s\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}\widehat{\mathbf{e}}
\mathbf{e}_{M} = \mathbf{L}_{E}\mathbf{e}'$$
(5.5)

Zależności (5.4) i (5.5) zapisane przy wykorzystaniu wektorów \mathbf{e}_M i \mathbf{h}_M , choć mają postać równoważną równaniom wyjściowym (3.11) i (3.12), zawierają równania stanu pozwalające na wyznaczenie *wektorów granicznych* i utworzenie elektromagnetycznej funkcji przejścia dla obszaru $\widehat{\Omega}^1$.

¹Możliwe jest utworzenie podobnych zależności w oparciu o wektory poddziedziny $\widehat{\Omega}$ ($\widehat{\mathbf{e}}_M, \widehat{\mathbf{h}}_M$), za-

5.1.2 Konstrukcja elektromagnetycznej funkcji przejścia wydzielonej poddziedziny

Wykorzystując część z równań (5.4) oraz (5.5) można utworzyć relację pomiędzy wektorami brzegowymi \mathbf{e}_M i \mathbf{h}_M przy użyciu wyłącznie próbek pola magnetycznego:

$$\frac{\frac{1}{s}}{\underbrace{\widehat{\mathbf{R}}_{E}\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{H}}_{\widehat{\Gamma}}\widehat{\mathbf{h}} + s\underbrace{\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}}_{\widehat{\mathbf{C}}}\widehat{\mathbf{h}} = \underbrace{-\widehat{\mathbf{B}}_{E}\mathbf{I}_{E}}_{\mathbf{B}}\mathbf{e}_{M}$$
$$\mathbf{h}_{M} = \underbrace{\mathbf{I}_{H}\widehat{\mathbf{L}}_{H}}_{\mathbf{L}^{\mathrm{T}}}\widehat{\mathbf{h}}$$
(5.6)

Zabieg ten powoduje zmniejszenie o połowę liczby równań opisujących pola w podprzestrzeni $\hat{\Omega}$. Z (5.6) za pomocą elementarnych operacji algebraicznych otrzymuję się elektromagnetyczną funkcję przejścia $\mathbf{H}(s)^2$ pomiędzy zdyskretyzowanymi polami granicznymi \mathbf{e}_M i \mathbf{h}_M :

$$\mathbf{h}_M = \mathbf{L}^T \left(\frac{1}{s}\widehat{\mathbf{\Gamma}} + s\widehat{\mathbf{C}}\right)^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_M = \mathbf{H}(s) \cdot \mathbf{e}_M \tag{5.7}$$

gdzie $\widehat{\Gamma} = \widehat{\mathbf{R}}_E \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_H$ i $\widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}$ są symetrycznymi dodatnio półokreślonymi macierzami, $\mathbf{L}^T = \mathbf{I}_H \widehat{\mathbf{L}}_H$ jest macierzą pozwalającą otrzymać wektor \mathbf{h}_M (patrz (5.6)) poprzez wybranie odpowiednich próbek pól $\widehat{\mathbf{h}}$ i ich ewentualną interpolację, a macierz $\mathbf{B} = -\widehat{\mathbf{B}}_E \mathbf{I}_E$ dostarcza warunki brzegowe równaniu falowemu (5.6) w poddziedzinie $\widehat{\Omega}$ wykorzystując wektor graniczny \mathbf{e}_M .

Rozmiary macierzy składowych

Jednym z parametrów elektromagnetycznej funkcji przejścia jest rozmiar problemu N, który określa liczbę zmiennych stanu wykorzystywanych w równaniach opisujących $\mathbf{H}(s)$. Ponieważ równanie (5.7) powstało w oparciu o zdyskretyzowane równania Maxwella (3.11) i (3.12), rozmiar problemu $N = \widehat{N}_h$. Oznacza to, że rozmiary macierzy składowych $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\mathbf{C}}$ są równe $N \times N$, zaś rozmiary macierzy \mathbf{L} i \mathbf{B} wynoszą odpowiednio $N \times o$ oraz $N \times p$.

Warto zauważyć, że rozmiar macierzy $\mathbf{H}(s)$, równy w tym przypadku $o \times p$, nie zależy bezpośrednio od N. Rozmiar problemu wpływa jednakże na szybkość, z jaką wyznacza się funkcję przejścia, gdyż obliczenie $\mathbf{H}(s)$ zdefiniowanej równaniem (5.7) wiąże się z operacją odwracania macierzy $\left(\frac{1}{s}\widehat{\Gamma} + s\widehat{\mathbf{C}}\right)$ bądź, co najczęściej jest bardziej efektywne z punktu

pis w oparciu o wektory graniczne z podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ stosowany jest ze względu na niższą złożoność obliczeniową schematów różnicowych wykorzystujących makromodele, będącą rezultatem mniejszej liczby zmiennych w wektorach granicznych.

²Takie oznaczenie elektromagnetycznej funkcji przejścia poddziedziny $\widehat{\Omega}$ przyjęto dlatego, iż $\mathbf{H}(s)$ opisuje interakcję pomiędzy próbkami pola elektrycznego i magnetycznego poddziedziny $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$, tj. wektorami \mathbf{e}_M i \mathbf{h}_M .

widzenia złożoności obliczeniowej, rozwiązania układu równań $\left(\frac{1}{s}\widehat{\Gamma} + s\widehat{C}\right)\widehat{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$ z wieloma prawymi stronami (macierz **B**).

5.2 Redukcja elektromagnetycznej funkcji przejścia H(s)

Funkcja przejścia opisana równaniem (5.7) opisuje własności elektromagnetyczne fragmentu przestrzeni obliczeniowej jako interakcję pomiędzy próbkami pół brzegowych \mathbf{e}_M i \mathbf{h}_M w dziedzinie Laplace'a s. Po włączeniu jej do równań sformułowanych dla poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ dostaniemy kompletny pod względem algebraicznym opis zachowania się pół w przestrzeni obliczeniowej Ω w postaci równaniań różnicowych. Ponieważ funkcja $\mathbf{H}(s)$ powstała w wyniku przekształceń algebraicznych równań (5.4) i (5.5), złożoność obliczeniowa problemu numerycznego, jakim jest uzyskanie rozwiązania w podprzestrzeni $\hat{\Omega}$, pozostała praktycznie niezmieniona. Sformułowanie (5.7) opisujące $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ za pomocą transmitancji $\mathbf{H}(s)$ może być jednak zredukowane. W tym kontekście redukcja funkcji przejścia oznacza zmniejszenie liczby zmiennych w równaniach (5.7) w taki sposób, aby charakterystyki częstotliwościowe funkcji przejścia pozostały niezmienione. Techniki pozwalające na dokonanie takiej redukcji układu (5.7) to metody redukcji rzędu modelu.

5.2.1 Wybór odpowiedniej techniki redukcji rzędu dla problemów różnicowych

Dobranie odpowiedniej techniki redukcji dla problemu sformułowanego w postaci równań stanu wymaga analizy funkcji przejścia pod kątem jej własności, maksymalnej liczby zmiennych i cech matematycznych.

W przypadku funkcji przejścia stworzonej w oparciu o równania różnicowe liczba zmiennych może być znaczna i łatwo osiągać wartości rzędu setek tysięcy, a sama transmitancja zapisana w postaci (5.7) opisuje system o wielu portach wejściowych i wyjściowych, którymi są próbki pól *wektorów granicznych* \mathbf{e}_M i \mathbf{h}_M . Dodatkowo, ponieważ macierzowa funkcja (5.7) powstała z transformacji równań różnicowych, macierze składowe $\mathbf{H}(s)$ charakteryzują się takimi własnościami matematycznymi, jak dodatnia półokreśloność i symetria, które powinny być obecne także w macierzach tworzących zredukowaną funkcję przejścia.

Powyższe założenia dotyczące funkcji przejścia $\mathbf{H}(s)$ stworzonej w oparciu o zdyskretyzowane rówania Maxwella pozwalają na dobór odpowiednich metod redukcji rzędu modelu. Spośród wielu technik [17–19,57,59,76,77,96] umożliwiających zredukowanie liczby zmiennych stanu, na szczególną uwagę, z punktu widzenia potencjalnego zastosowania w rozważanych w niniejszej pracy problemach różnicowych, zasługują metody *PRIMA* (*Passive Reduced-order Interconnect Macromodeling Algorithm*) i *ENOR* (*Efficient Nodal Order Reduction*) [57,76]. Obie techniki wykorzystują projekcję ortogonalną do zredukowania liczby zmiennych w funkcji przejścia $\mathbf{H}(s)$ za pomocą bazy ortonormalnej powstałej przy użyciu metody podprzestrzeni Kryłowa [101]. Pozwala to zachować pasywny charakter transmitancji i umożliwia redukcję funkcji przejścia dla systemów opisywanych znaczną liczbą zmiennych stanu.

Choć co do zasady i rezultatów redukcji algorytmy PRIMA i ENOR są podobne, to każdy z nich wymaga innej postaci funkcji przejścia, która musi być funkcją odpowiednio pierwszego i drugiego rzędu. Jeżeli więc problem opisany równaniami stanu można przedstawić w obu formach wyniki redukcji funkcji przejścia będą podobne. Zasadnicza różnica widoczna będzie jednak w wydajności algorytmów, gdyż funkcja przejścia drugiego rzędu będzie miała dwukrotnie mniej zmiennych niż funkcji przejścia o postaci (5.7) pozwala przeprowadzić obliczenia szybciej i umożliwia jej redukcję w przypadku większych problemów elektromagnetycznych, niż gdyby z równań (5.5) oraz (5.4) utworzono równoważną funkcję pierwszego rzędu.

5.2.2 Redukcja elektromagnetycznej funkcji przejścia algorytmem ENOR

Postać funkcji przejścia dana równaniami (5.7) jest identyczna jak wyjściowa postać transmitancji wymagana w algorytmie ENOR [76]. Zgodnie z procedurami opisanymi w [76,101], macierze $\hat{\Gamma}$, \hat{C} i **B** wykorzystywane są do generacji bazy ortonormalnej \hat{V} będącej macierzą składającą się z $m = p \cdot q$ wektorów bazy o długości N, gdzie q jest rzędem modelu. Redukcja rzędu modelu transmitancji o postaci:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{L}^T \left(\frac{1}{s}\widehat{\mathbf{\Gamma}} + s\widehat{\mathbf{C}}\right)^{-1} \mathbf{B}$$
(5.8)

polega na projekcji ortonormalnej równań stanu (5.8) za pomocą ortonormalnej bazy $\widehat{\mathbf{V}}$, w celu uzyskania zredukowanej transmitancji $\mathbf{H}_m(s)$:

$$\mathbf{H}_{m}(s) = \mathbf{L}_{m}^{T} \left(\frac{1}{s} \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{m} + s \widehat{\mathbf{C}}_{m}\right)^{-1} \mathbf{B}_{m}$$
(5.9)

przy czym projekcja macierzy składowych przebiega następująco:

$$\mathbf{L}_{m} = \widehat{\mathbf{V}}^{T} \mathbf{L}
\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{m} = \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{\Gamma}} \widehat{\mathbf{V}}
\widehat{\mathbf{C}}_{m} = \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{V}}
\mathbf{B}_{m} = \widehat{\mathbf{V}}^{T} \mathbf{B}$$
(5.10)

Ponieważ $\widehat{\mathbf{V}}$ ma wymiar $N \times m$, rozmiar problemu po redukcji wynosi m. Zredukowana transmitancja $\mathbf{H}_m(s)$ obliczana jest z użyciem macierzy gęstych $\widehat{\mathbf{\Gamma}}_m$ i $\widehat{\mathbf{C}}_m$ (o wymiarach $m \times m$) oraz \mathbf{L}_m i \mathbf{B}_m o wymiarach odpowiednio $m \times o$ i $m \times p$. Zredukowana funkcja przejścia $\mathbf{H}_m(s)$ aproksymuje oryginalną transmitancję $\mathbf{H}(s)$ w ograniczonym pasmie częstotliwości, lecz przy użyciu znacznie zmniejszonej liczby zmiennych $m \ll N$ [76, 101].

Rząd problemu zredukowanego q determinujący rozmiar problemu po redukcji jest liczbą blokowych momentów, które są spasowane w problemie oryginalnym (5.8) i zredukowanym (5.9) [101]. Zwiększanie rzędu sprawia, iż funkcja $\mathbf{H}_m(s)$ aproksymuje oryginalną transmitancję w szerszym pasmie częstotliwości. Oczywiście powoduje to również zwiększenie liczby zmiennych opisujących problem zredukowany.

5.3 Opis elektromagnetyczny przestrzeni z wydzieloną poddziedziną przy użyciu *makromodelu*

Własności elektromagnetyczne przestrzeni obliczeniowej Ω z wydzieloną poddziedziną, opisane zdyskretyzowanymi równaniami Maxwella (3.1), można scharakteryzować za pomocą zmodyfikowanych operatorów globalnych, w których rozdzielone są operatory poddziedzin $\hat{\Omega}$ i $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ (równania (3.11) i (3.12)). Ponieważ obie poddziedziny połączone są za pomocą pól występujących na granicy pomiędzy $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$, równania składowe mogą być dowolnie przekształcone bez utraty dokładności rozwiązania.

Jedną z możliwych modyfikacji jest stworzenie elektromagnetycznej funkcji przejścia dla poddziedziny $\hat{\Omega}$. Zabieg taki pozwala opisać elektromagnetyczne zachowanie podprzestrzeni w postaci transmitancji określającej interakcję pomiędzy spróbkowanymi polami elektrycznymi i magnetycznymi, które są warunkami brzegowymi dla obu poddziedzin na styku $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$, tworzącymi *wektory graniczne* \mathbf{e}_M i \mathbf{h}_M . Takie sformułowanie pozwala na łatwe zastosowanie technik redukcji rzędu modelu w celu zredukowania liczby zmiennych opisujących zachowanie się pól w poddziedzinie $\hat{\Omega}$ i użycia powstałego w ten sposób *makromodelu* (5.9) do znacznego przyśpieszenia rozwiązywania problemów różnicowych elektrodynamiki obliczeniowej.

5.3.1 Włączanie funkcji przejścia *makromodelu* do operatora globalnego

Stworzenie funkcji przejścia $\mathbf{H}(s)$ pozwala na opisanie zachowania się pól w przestrzeni Ω z wydzieloną poddziedziną $\widehat{\Omega}$ za pomocą następującego układu równań:

$$\mathbf{R}'_{E}\mathbf{e}' = -s\mathbf{D}'_{\mu}\mathbf{h}'$$

$$\mathbf{B}_{H}\mathbf{h}_{M} + \mathbf{R}'_{H}\mathbf{h}' = s\mathbf{D}'_{\varepsilon}\mathbf{e}'$$

$$\mathbf{e}_{M} = \mathbf{L}_{E}\mathbf{e}'$$

$$\mathbf{h}_{M} = \mathbf{L}^{T}\left(\frac{1}{s}\widehat{\mathbf{\Gamma}} + s\widehat{\mathbf{C}}\right)^{-1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_{M} \qquad (5.11)$$

Powyższa postać jest algebraiczną modyfikacją wyjściowego problemu różnicowego (3.1) opisującego dziedzinę obliczeniową Ω w dziedzinie Laplace'a, a więc pod względem złożo-ności obliczeniowej równania (3.1) i (5.11) są równoważne.

Ponieważ postać funkcji przejścia (5.8) pozostaje niezmieniona w wyniku redukcji, makromodel (5.9) może być łatwo włączony do równań operatora globalnego. Redukując funkcję przejścia w (5.11) oraz wykorzystując (5.6) uzyskuje się:

$$\mathbf{R}'_{E}\mathbf{e}' = -s\mathbf{D}'_{\mu}\mathbf{h}'$$
$$\mathbf{B}_{H}\mathbf{h}_{M} + \mathbf{R}'_{H}\mathbf{h}' = s\mathbf{D}'_{\varepsilon}\mathbf{e}'$$
$$\mathbf{e}_{M} = \mathbf{L}_{E}\mathbf{e}'$$
$$\mathbf{h}_{M} = \mathbf{L}_{m}^{T}\cdot\hat{\mathbf{h}}_{m}$$
$$\left(\frac{1}{s}\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{m} + s\widehat{\mathbf{C}}_{m}\right)\widehat{\mathbf{h}}_{m} = \mathbf{B}_{m}\cdot\mathbf{e}_{M}$$
(5.12)

gdzie wektor $\hat{\mathbf{h}}_m$ będący zredukowanymi próbkami pól z $\hat{\Omega}$ zapisać można jako:

$$\widehat{\mathbf{h}}_m = \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{h}} \tag{5.13}$$

Wykorzystując powyższe równania oraz zależności (5.2) i (5.3) operator globalny można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{B}_{H}\mathbf{L}_{m}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \hat{\mathbf{h}}_{m} \end{bmatrix} = s\mathbf{D}'_{\varepsilon}\mathbf{e}'$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} \\ s\mathbf{H}_{m}(s)\mathbf{L}_{E} \end{bmatrix} \mathbf{e}' = -s\begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & 0 \\ 0 & -\mathbf{L}_{m}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \hat{\mathbf{h}}_{m} \end{bmatrix}$$
(5.14)

Jak łatwo zauważyć, taki sposób włączenia makromodelu wprowadza do operatora globalnego elementy zależne od częstotliwości. Uwzględnienie makromodelu w analizie numerycznej problemów elektromagnetycznych poprzez włączenie $\mathbf{H}_m(s)$ w jawnej postaci komplikuje więc uzyskanie rozwiązania metodą różnicową w dziedzinie częstotliwości. Analiza FDFD poprzedzona musi zostać np. obliczeniem operatorów na każdej z rozważanych częstotliwości, co sprowadza się do wielokrotnego wyznaczania wartości macierzy $s\mathbf{H}_m(s)\mathbf{L}_E$, lub używania operatorów globalnych uzyskanych na częstotliwości środkowej przeprowadzanej analizy, co może być przyczyną błędów. Nie można również zagnieżdżać makromodeli.

5.3.2 Włączanie *makromodelu* poprzez projekcję operatora globalnego

Aby uniknąć niedogodności związanych z zależnością elementów operatorów macierzowych od częstotliwości, należy włączyć *makromodele* w inny sposób, bez jawnego tworzenia funkcji przejścia.

Rozważmy równania (3.11) i (3.12) słuszne dla przestrzeni obliczeniowej Ω z wydzieloną poddziedziną $\hat{\Omega}$. Zapisując je odzielnie dla poddziedzin $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ przy wykorzystaniu zależności opisujących macierze sprzegające ((5.2),(5.3)) uzyskuje się równania (5.4) i (5.5), które stanowią punkt wyjściowy do uzyskania funkcji przejścia przestrzeni $\hat{\Omega}$. Przeprowadzenie

redukcji transmitancji $\mathbf{H}(s)$ prowadzi do wyznaczenia zredukowanej funkcji przejścia $\mathbf{H}_m(s)$ ((5.9), (5.10)), która może być następnie włączona w sposób jawny do równań operatora globalnego (5.14). Alternatywny sposób włączenia *makromodelu* można uzyskać rozpisując (5.12) przy użyciu (5.10):

$$\mathbf{R}'_{E}\mathbf{e}' = -s\mathbf{D}'_{\mu}\mathbf{h}'$$
$$\mathbf{B}_{H}\mathbf{h}_{M} + \mathbf{R}'_{H}\mathbf{h}' = s\mathbf{D}'_{\varepsilon}\mathbf{e}'$$
$$\mathbf{e}_{M} = \mathbf{L}_{E}\mathbf{e}'$$
$$\mathbf{h}_{M} = \left(\widehat{\mathbf{V}}^{T}\mathbf{L}\right)^{T}\cdot\widehat{\mathbf{h}}_{m}$$
$$\left(\frac{1}{s}\widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{\Gamma}}\widehat{\mathbf{V}} + s\widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{V}}\right)\widehat{\mathbf{h}}_{m} = \widehat{\mathbf{V}}^{T}\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_{M}$$
(5.15)

Ponieważ dwa ostatnie równania zawierają macierze $\hat{\Gamma}$, \hat{C} , **L** i **B**, zatem używając podstawień z (5.6) i wykonując proste przekształcenia otrzymuje się:

$$\mathbf{h}_{M} = \mathbf{I}_{H}\mathbf{L}_{H}\mathbf{V}\cdot\mathbf{h}_{m}$$
$$\left(\frac{1}{s}\widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{R}}_{E}\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{V}} + s\widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}\widehat{\mathbf{V}}\right)\widehat{\mathbf{h}}_{m} = \widehat{\mathbf{V}}^{T}\left(-\widehat{\mathbf{B}}_{E}\mathbf{I}_{E}\right)\cdot\mathbf{e}_{M}$$
(5.16)

Powyższe zależności przedstawiają zredukowaną postać (5.6), z której można prosto uzyskać $\mathbf{H}_m(s)$, analogicznie jak z (5.6) otrzymuje się $\mathbf{H}(s)$. Jak widać proces redukcji funkcji przejścia w (5.9) przy użyciu projekcji ortonormalnej zastosowanej do (5.8), może być w ten sam sposób wykorzystany do redukcji równań wyjściowych (5.6). Co więcej, rozszerzając powyższe rozumowanie, identycznie otrzymuje się zredukowaną postać równań (5.4) i (5.5), które stanowią punkt wyjścia do uzyskania (5.6). Proste przekształcenia algebraiczne prowadzą do:

$$\mathbf{R}'_{E}\mathbf{e}' = -s\mathbf{D}'_{\mu}\mathbf{h}'$$
$$\mathbf{B}_{H}\mathbf{h}_{M} + \mathbf{R}'_{H}\mathbf{h}' = s\mathbf{D}'_{\varepsilon}\mathbf{e}'$$
$$\mathbf{h}_{M} = \mathbf{I}_{H}\widehat{\mathbf{L}}_{H}\widehat{\mathbf{V}}\cdot\widehat{\mathbf{h}}_{m} \qquad (5.17)$$

$$\widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{B}}_{E}\mathbf{I}_{E}\cdot\mathbf{e}_{M} + \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{R}}_{E}\cdot\widehat{\mathbf{e}} = -s\widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}\widehat{\mathbf{V}}\cdot\widehat{\mathbf{h}}_{m}$$
$$\widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{V}}\cdot\widehat{\mathbf{h}}_{m} = s\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}\widehat{\mathbf{e}}$$
$$\mathbf{e}_{M} = \mathbf{L}_{E}\mathbf{e}'$$
(5.18)

Niwelując oddzielne równania określające \mathbf{e}_M i \mathbf{h}_M uzyskuje się zredukowaną formę równań

(5.1) opisujących $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ i $\widehat{\Omega}$:

$$\mathbf{R}'_{E}\mathbf{e}' = -s\mathbf{D}'_{\mu}\mathbf{h}'$$

$$\underbrace{\mathbf{B}_{H}\mathbf{I}_{H}\hat{\mathbf{L}}_{H}}_{\mathbf{S}_{H}}\widehat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{h}}_{m} + \mathbf{R}'_{H}\mathbf{h}' = s\mathbf{D}'_{\varepsilon}\mathbf{e}'$$

$$\widehat{\mathbf{V}}^{T}\underbrace{\widehat{\mathbf{B}}_{E}\mathbf{I}_{E}\mathbf{L}_{E}}_{\widehat{\mathbf{S}}_{E}}\mathbf{e}' + \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{R}}_{E}\cdot\widehat{\mathbf{e}} = -s\widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}\widehat{\mathbf{V}}\cdot\widehat{\mathbf{h}}_{m}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{V}}\cdot\widehat{\mathbf{h}}_{m} = s\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}\widehat{\mathbf{e}} \qquad (5.19)$$

Operator globalny z włączonym *makromodelem* będzie miał więc postać zdyskretyzowanych równań Maxwella (3.11) i (3.12) z operatorami składowymi zredukowanymi poprzez projekcję ortonormalną wykorzystującą bazę ortonormalną $\widehat{\mathbf{V}}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_E & 0\\ \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{S}}_E & \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{R}}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}'\\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_\mu & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{D}}_\mu \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \widehat{\mathbf{h}}_m \end{bmatrix}$$
(5.20)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H} \widehat{\mathbf{V}} \\ 0 & \widehat{\mathbf{R}}_{H} \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix}$$
(5.21)

Powyższe sformułowanie zawiera *makromodel*, który włączony jest w postaci niejawnej. Oznacza to, że w rówaniach (5.20) i (5.21) nie występuje zredukowana elektromagnetyczna funkcja przejścia $\mathbf{H}_m(s)$. Zamiast tego w operatorze globalnym zredukowane zostały te fragmenty, które stanowią składniki funkcji przejścia poddziedziny $\hat{\Omega}$. Z tego powodu włączanie *makromodelu* w sposób niejawny do operatora globalnego to *redukcja operatora*.

5.4 Zwielokrotnianie i zagnieżdżanie makromodeli

Wykorzystywanie wyłącznie pojedynczego makromodelu w algorytmach różnicowych, choć pozwala osiągnąć przyśpieszenie analizy numerycznej metodami *FDTD* i *FDFD* [37, 41], jest silnie ograniczone efektywnością procesu tworzenia makromodelu. Metody redukcji rzędu modelu, w tym *ENOR*, pozwalają na redukcję problemów o liczbie zmiennych rzędu kilkudziesięciu tysięcy [101], jednak ponieważ liczba zmiennych w problemach różnicowych rośnie bardzo szybko przy zwiększaniu rozmiaru poddziedziny lub zagęszczaniu kroku dyskretyzacji wewnątrz $\hat{\Omega}$, łatwo przewidzieć znaczne trudności w tworzeniu makromodeli.

Ograniczenia wynikające z metod redukcji można łatwo pokonać wykorzystując możliwości wydzielania podprzestrzeni z przestrzeni obliczeniowej przedstawione w rozdziale 3. Dobrym przykładem ilustrującym ten sposób jest budowa *makromodelu* dla bardzo dużej podprzestrzeni. Choć stworzenie pojedynczego *makromodelu* może być niewykonalne z powodu ograniczeń algorytmu *ENOR*, można wydzielić w niej kilka podprzestrzeni, i zbudować dla nich *makromodele*. Ponieważ duża podprzestrzeń bedzie się składać teraz z wielu *makromodeli*, znacznie ograniczona liczba zmiennych pozwoli utworzyć dla niej wspólny *makromodel.* Możliwość łatwego zwielokrotniania *makromodeli* oraz ich wielokrotnego zagnieżdżania jest więc kluczowa dla łatwego zwiększania rozdzielczości analizy metodami różnicowymi czy też tworzenia *makromodeli* dla dużych poddziedzin.

5.4.1 Zagnieżdżanie *makromodeli* poprzez hierarchiczną projekcję

Rozważmy przestrzeń obliczeniową Ω , w której wydzielona została podprzestrzeń $\hat{\Omega}$, a w niej podprzestrzeń $\hat{\Omega}$ (patrz rys. 3.4). Każda z podprzestrzeni pokryta jest siatką innej gęstości, przy czym największą gęstość ma siatka dla przestrzeni najbardziej wewnętrznej. Dla tak określonych poddziedzin operator globalny przyjmuje postać daną równaniami (3.18) i (3.19), w których operatory poddziedzin $\hat{\Omega}$, $\hat{\Omega} \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ sprzężone są macierzami $\hat{\mathbf{S}}'_E$, \mathbf{S}'_H , $\hat{\mathbf{S}}_E$ oraz $\hat{\mathbf{S}}_H$. Na potrzeby przedstawienia zagnieżdżania *makromodeli* w sposób klarowny wprowadzone zostaną zmodyfikowane *macierze sprzężeń* $\hat{\mathbf{S}}'_{E\hat{\Omega}}$ i $\mathbf{S}'_{H\hat{\Omega}}$, które w odróżnieniu do $\hat{\mathbf{S}}'_E$ i \mathbf{S}'_H łączących w (3.18) i (3.19) $\Omega \setminus \hat{\Omega} \ge \hat{\Omega} \setminus \hat{\hat{\Omega}}$, sprzęgać będą $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$. Zgodnie z (3.18) i (3.19) zachodzi:

$$\widehat{\mathbf{S}}_{E\widehat{\Omega}}' = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{S}}_{E}' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}_{H\widehat{\Omega}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{H}' & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
(5.22)

Uwzględniając powyższe podstawienia, zależności (3.18) i (3.19) można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{S}}'_{E\widehat{\Omega}} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{E} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{S}}_{E} & \widehat{\mathbf{R}}_{E} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}'_{\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}' \\ \widehat{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(5.23)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}'_{H\widehat{\Omega}} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{H} & \widehat{\mathbf{S}}_{H} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}_{H} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}' \\ \widehat{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(5.24)

Tak zapisane równania dla przestrzeni obliczeniowej, na którą składają się podprzestrzenie $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, $\hat{\Omega}$ i $\hat{\hat{\Omega}}$, stanowią punkt wyjścia dla hierarchicznego tworzenia *makromodeli*, tj. uzyskania *makromodeli* zagnieżdżonych. Jak łatwo się domyślić, postać ostatecznych równań będzie zbliżona do powyższych, zaś sam proces zagnieżdżania *makromodeli* można w tym przypadku podzielić na dwie fazy:

- skonstruowanie i włączenie makromodelu dla najbardziej zagnieżdżonej poddziedziny, w tym przypadku $\widehat{\hat{\Omega}},$
- skonstruowanie i włączenie makromodeludla poddziedziny o niższym poziomie zagnieżdżenia, w tym przypadku $\widehat{\Omega}$
Redukcja operatorów najbardziej zagnieżdżonej poddziedziny

Konstrukcję makromodeli zagnieżdżonych rozpoczyna się od zdefiniowania elektromagnetycznej funkcji przejścia podprzestrzeni najsilniej zagnieżdżonej, czyli poddziedziny $\hat{\Omega}$. Odpowiedni operator globalny dla $\hat{\Omega}$ z wydzieloną podprzestrzenią $\hat{\Omega}$ wyizolowany z (5.23) i (5.24) ma postać (sprzeżenie z $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ zostało pominięte):

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{E} & \mathbf{0} \\ \widehat{\widehat{\mathbf{S}}}_{E} & \widehat{\widehat{\mathbf{R}}}_{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}' \\ \widehat{\widehat{\mathbf{e}}} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}'_{\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\widehat{\mathbf{D}}}_{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}' \\ \widehat{\widehat{\mathbf{h}}} \end{bmatrix}$$
(5.25)

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{H} & \widehat{\mathbf{S}}_{H} \\ \mathbf{0} & \widehat{\widehat{\mathbf{R}}}_{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}' \\ \widehat{\widehat{\mathbf{h}}} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\widehat{\mathbf{D}}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}' \\ \widehat{\widehat{\mathbf{e}}} \end{bmatrix}$$
(5.26)

Operatory składowe powyższych równań mogą zostać wykorzystane do konstrukcji funkcji przejścia poddziedziny $\widehat{\Omega}$ o postaci (5.8), która jest odpowiednia do redukcji algorytmem *ENOR*. Włączenie *makromodelu* do operatorów (5.25), (5.26) przy wykorzystaniu wygenerowanej podczas redukcji macierzy ortonormalnej $\widehat{\widehat{V}}$ pozwala, zgodnie z (5.20) i (5.21), otrzymać następujące zależności :

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{E} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{\widehat{V}}}^{T} \widehat{\mathbf{\widehat{S}}}_{E} & \widehat{\mathbf{\widehat{V}}}^{T} \widehat{\mathbf{\widehat{R}}}_{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}' \\ \widehat{\mathbf{\widehat{e}}} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}'_{\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{\widehat{V}}}^{T} \widehat{\mathbf{\widehat{D}}}_{\mu} \widehat{\mathbf{\widehat{V}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}' \\ \widehat{\mathbf{\widehat{V}}}^{T} \widehat{\mathbf{\widehat{h}}} \end{bmatrix}$$
(5.27)

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{H} & \widehat{\mathbf{S}}_{H} \widehat{\widehat{\mathbf{V}}} \\ \mathbf{0} & \widehat{\widehat{\mathbf{R}}}_{H} \widehat{\widehat{\mathbf{V}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}' \\ \widehat{\widehat{\mathbf{V}}}^{T} \widehat{\widehat{\mathbf{h}}} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\widehat{\mathbf{D}}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}' \\ \widehat{\widehat{\mathbf{e}}} \end{bmatrix}$$
(5.28)

Przeniesienie powyższych rozważań ograniczonych do poddziedzin $\widehat{\Omega} \setminus \widehat{\Omega}$ i $\widehat{\Omega}$ na operatory globalne opisujące zachowanie się pól w całej przestrzeni obliczeniowej Ω (5.23), (5.24) pozwala zapisać operatory globalne w Ω ze zredukowanymi operatorami poddziedziny $\widehat{\widehat{\Omega}}$ jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{S}}'_{E\widehat{\Omega}} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{E} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{S}}_{E} & \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{R}}_{E} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}'_{\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}\widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}' \\ \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(5.29)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}'_{H\widehat{\Omega}} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{H} & \widehat{\mathbf{S}}_{H}\widehat{\mathbf{V}} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}' \\ \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(5.30)

Redukcja operatorów poddziedziny o niższym poziomie zagnieżdżenia

Przeprowadzenie redukcji operatorów poddziedziny $\widehat{\Omega}$ umożliwia stworzenie funkcji przejścia dla podprzestrzeni $\widehat{\Omega}$. Równania (5.27) oraz (5.28) definiują operatory podprzestrzeni $\widehat{\Omega}$ z włączonym makromodelem poddziedziny $\widehat{\widehat{\Omega}}$, które w (5.29) i (5.30) sprzężone są z poddziedziną $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ za pomocą macierzy sprzęgających $\widehat{\mathbf{S}'}_{E\widehat{\Omega}}$ i $\mathbf{S'}_{H\widehat{\Omega}}$. Ponieważ macierze sprzęgające zostały zmodyfikowane (5.22) w stosunku do oryginalnie wprowadzonych definicji (3.9), (3.14), na potrzeby konstrukcji funkcji przejścia poddziedziny $\widehat{\Omega}$ z włączonym makromodelem $\widehat{\widehat{\Omega}}$ należy precyzyjnie określić macierze składowe $\widehat{\mathbf{S}'}_{E\widehat{\Omega}}$ i $\mathbf{S'}_{H\widehat{\Omega}}$, które użyte będą do konstrukcji **L** oraz **B** w (5.8).

Macierze sprzęgające $\hat{\mathbf{S}}_E$ i \mathbf{S}_H zdefiniowane w (5.22) składają się z macierzy wybierających, interpolujących i brzegowych. Wydzielenie w $\hat{\Omega}$ poddziedziny $\hat{\hat{\Omega}}$ wymagało ich modyfikacji (3.14) polegających na usunięciu odpowiednich wierszy macierzy $\hat{\mathbf{S}}_E$ i kolumn \mathbf{S}_H . Konstrukcja operatorów globalnych (5.23) i (5.24) wymusiła kolejne zmiany, które doprowadziły do powstania macierzy $\hat{\mathbf{S}}'_{E\hat{\Omega}}$ i $\mathbf{S}'_{H\hat{\Omega}}$ sprzęgających poddziedzinę $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ z $\hat{\Omega}$. Stąd *macierze sprzęgające* można zapisać w sposób jawny przy użyciu równań (3.9), (3.14) i (5.22) następująco:

$$\widehat{\mathbf{S}}_{E\widehat{\Omega}}' = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{P}}_{H}^{T} \widehat{\mathbf{S}}_{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{P}}_{H}^{T} \widehat{\mathbf{B}}_{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathbf{B}}_{E\widehat{\Omega}}'} \mathbf{I}_{E} \mathbf{L}_{E}$$
$$\mathbf{S}_{H\widehat{\Omega}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{H} \widehat{\mathbf{P}}_{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{H} \mathbf{I}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{L}}_{H} \widehat{\mathbf{P}}_{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathbf{L}}_{H\widehat{\Omega}}'}$$
(5.31)

Korzystając z równań (5.27), (5.28) oraz (5.31) można łatwo zdefiniować macierze funkcji przejścia (5.8) dla poddziedziny $\hat{\Omega}$ z włączonym *makromodelem*:

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{E} & \mathbf{0} \\ \widehat{\widehat{\mathbf{V}}}^{T} \widehat{\widehat{\mathbf{S}}}_{E} & \widehat{\widehat{\mathbf{V}}}^{T} \widehat{\widehat{\mathbf{R}}}_{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\widehat{\mathbf{D}}}_{\varepsilon} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{H} & \widehat{\mathbf{S}}_{H} \widehat{\widehat{\mathbf{V}}} \\ \mathbf{0} & \widehat{\widehat{\mathbf{R}}}_{H} \widehat{\widehat{\mathbf{V}}} \end{bmatrix}$$
(5.32)

$$\widehat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix}$$
(5.33)

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{I}_H \hat{\mathbf{L}}'_{H\widehat{\Omega}} \tag{5.34}$$

$$\mathbf{B} = -\widehat{\mathbf{B}}'_{E\widehat{\Omega}}\mathbf{I}_E \tag{5.35}$$

Wyznaczenie macierzy $\hat{\Gamma}$, \hat{C} , **L** i **B** pozwala na użycie algorytmu *ENOR* do redukcji funkcji przejścia poddziedziny $\hat{\Omega}$ zawierającej niejawnie włączony *makromodel* dla podprze-

strzeni $\hat{\Omega}$. Włączenie tak zredukowanej transmitancji do równań (5.29) i (5.30) dokonuje się poprzez redukcję operatorów globalnych za pomocą bazy ortonormalnej $\widehat{\mathbf{V}}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{S}}'_{E\widehat{\Omega}} & \widehat{\mathbf{V}}^{T} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{E} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{S}}_{E} & \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{R}}_{E} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{V}}^{T} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}'_{\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{V}}^{T} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}' \\ \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(5.36)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}'_{H\widehat{\Omega}} \widehat{\mathbf{V}} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}'_{H} & \widehat{\mathbf{S}}_{H} \widehat{\widehat{\mathbf{V}}} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}_{H} \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{V}}^{T} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}' \\ \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{h}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{D}}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(5.37)

Otrzymane równania obowiązujące dla przestrzeni obliczeniowej Ω , do której włączony został makromodel wygenerowany z wydzielonej z Ω poddziedziny $\hat{\Omega}$ zawierającej makromodel poddziedziny $\hat{\Omega}$. Powyższa metoda budowania operatorów zawierających makromodele zagnieżdżone może być łatwo rozszerzona na więcej poziomów zagnieżdżenia poprzez sukcesywne tworzenie makromodeli dla coraz to niższych poziomów zagnieżdżenia.

Warto zaznaczyć, że zagnieżdżanie *makromodeli* w tak ogólny sposób możliwe jest wyłącznie dzięki sformułowaniu pozwalającemu włączać *makromodele* do operatorów globalnych w sposób niejawny. Inaczej, już po pierwszej redukcji operatory zostałyby uzależnione od częstotliwości i w efekcie zagnieżdżanie byłoby niemożliwe.

5.4.2 Zwielokrotnianie makromodeli w przestrzeni obliczeniowej

Zwielokrotnianie *makromodeli* polega na włączaniu do równań opisujących przestrzeń obliczeniową wielu *makromodeli*. Pozwala to w pełni wykorzystać możliwości przyśpieszania obliczeń numerycznych w metodach różnicowych wykorzystujących *makromodele*, zwłaszcza jeśli zwielokrotnianie zostanie uzupełnione o zagnieżdżanie *makromodeli*. Ze względu na specyfikę implementacji zwielokrotnianie można podzielić na trzy podstawowe przypadki:

- włączanie wielu niezagnieżdżonych *makromodeli* do operatorów globalnych przestrzeni obliczeniowej,
- pokrywanie *makromodelami* całej przestrzeni obliczeniowej,

• klonowanie *makromodeli*.

Włączanie wielu makromodeli do operatorów przestrzeni obliczeniowej

Jest to najprostszy, zaraz po włączaniu pojedynczego *makromodelu*, sposób zwiększenia efektywności analizy metodami różnicowymi wykorzystującymi *makromodele*. Polega on na włączeniu pojedynczego *makromodelu* w wielu miejscach siatki dyskretnej dziedziny obliczeniowej.

Rozważmy przestrzeń obliczeniową Ω zawierającą dwie wydzielone podprzestrzenie przedstawioną na rysunku (3.5). Dla takiego przypadku operatory globalne mają postać opisaną równaniami (3.24) oraz (3.25), które dla zachowania jasności wyprowadzeń powtórzono poniżej:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{S}}_{E}^{1} & \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{1} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{S}}_{E}^{2} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{2} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{h}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{h}}^{2} \end{bmatrix}$$
(5.38)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}^{1}_{H} & \mathbf{S}^{2}_{H} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}^{1}_{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}^{2}_{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{h}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{h}}^{2} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}^{1}_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}^{2}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{2} \end{bmatrix}$$
(5.39)

Jak to wynika z powyższych równań, efektem włączenia dwóch *makromodeli* do przestrzeni obliczeniowej Ω jest powstanie dwóch zestawów operatorów związanych z podprzestrzeniami $\widehat{\Omega}^1$ i $\widehat{\Omega}^2$. Umożliwia to generację dwóch niezależnych funkcji przejścia $\mathbf{H}^1(s)$ oraz $\mathbf{H}^2(s)$, których macierze składowe prezentują się następująco:

$$\widehat{\mathbf{\Gamma}}^{1} = \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{1} \left(\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{1} \right)^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_{H}^{1} \quad \widehat{\mathbf{C}}^{1} = \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{1} \quad \mathbf{L}^{1} = \left(\mathbf{I}_{H}^{1} \widehat{\mathbf{L}}_{H}^{1} \right)^{T} \quad \mathbf{B}^{1} = -\widehat{\mathbf{B}}_{E}^{1} \mathbf{I}_{E}^{1}$$
(5.40)

$$\widehat{\Gamma}^2 = \widehat{\mathbf{R}}_E^2 \left(\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^2\right)^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_H^2 \quad \widehat{\mathbf{C}}^2 = \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^2 \quad \mathbf{L}^2 = \left(\mathbf{I}_H^2 \widehat{\mathbf{L}}_H^2\right)^T \quad \mathbf{B}^2 = -\widehat{\mathbf{B}}_E^2 \mathbf{I}_E^2 \tag{5.41}$$

Podobnie jak w przypadku pojedynczego *makromodelu*, w wyniku redukcji każdej z funkcji przejścia algorytmem *ENOR* wygenerowane są bazy ortonormalne $\widehat{\mathbf{V}}^1$ i $\widehat{\mathbf{V}}^2$. Włączenie obu *makromodeli* do równań (5.38) i (5.39) poprzez redukcję operatorów globalnych prowadzi do:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{E}^{\prime} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \left(\widehat{\mathbf{V}}^{1}\right)^{T} \widehat{\mathbf{S}}_{E}^{1} & \left(\widehat{\mathbf{V}}^{1}\right)^{T} \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{1} & \mathbf{0} \\ \left(\widehat{\mathbf{V}}^{2}\right)^{T} \widehat{\mathbf{S}}_{E}^{2} & \mathbf{0} & \left(\widehat{\mathbf{V}}^{2}\right)^{T} \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\prime} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{2} \end{bmatrix} = \\ -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\mu}^{\prime} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(\widehat{\mathbf{V}}^{1}\right)^{T} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{1} \widehat{\mathbf{V}}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left(\widehat{\mathbf{V}}^{2}\right)^{T} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{2} \widehat{\mathbf{V}}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{\prime} \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{1} \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{2} \end{bmatrix}$$
(5.42)
$$\mathbf{R}_{H}^{\prime} \underbrace{\mathbf{S}}_{H}^{1} \widehat{\mathbf{V}}^{1} & \mathbf{S}_{H}^{2} \widehat{\mathbf{V}}^{2} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}_{H}^{1} \widehat{\mathbf{V}}^{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{\prime} \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{1} \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{1} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\varepsilon}^{\prime} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\prime} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{1} \end{bmatrix}$$
(5.43)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}_{H}^{1}\mathbf{V}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}_{H}^{2}\widehat{\mathbf{V}}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{m}^{1} \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{2} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\varepsilon}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{e}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{2} \end{bmatrix}$$
(5.43)

Podobnie jak samo wydzielanie podprzestrzeni, rozszerzenie rozumowania na większą liczbę *makromodeli* przeprowadza się poprzez wydzielenie kolejnej podprzestrzeni, redukcję jej elektromagnetycznej funkcji przejścia i niejawne włączenie *makromodelu* do operatorów globalnych.

Dekompozycja dziedziny przy wykorzystaniu makromodeli

Pokrycie *makromodelami* całej przestrzeni obliczeniowej jest odmianą włączania wielu *makromodeli*. Wyizolowanie takiego zastosowania *makromodeli* pozwala na ich użycie w klasie technik analizy problemów numerycznych nazywanych metodami *dekompozycji dziedziny* (ang. *domain decomposition methods*) [92,99]. Metody te stosowane są w przypadkach, gdy problem numeryczny zdefiniowany np. metodami różnicowymi jest tak złożony obliczeniowo, że zamiast rozwiązywać go bezpośrednio, znacznie szybciej jest podzielić przestrzeń obliczeniową na poddziedziny, których rozwiązanie następuje w stosunkowo krótkim czasie. Uzyskane rozwiązania są następnie składane w rozwiązanie macierzystej przestrzeni obliczeniowej, co jest niewątpliwie najtrudniejszym elementem tej techniki [40], ze względu na ograniczenia w zbieżności tych metod [92]. Wszelkie próby poprawy tych uwarunkowań powodują zwiększenie wymagań pamięciowych lub spowolnienie algorytmu [99].

Wykorzystanie makromodeli jako techniki dekompozycji dziedziny jest wolne od przedstawionych powyżej wad standardowych metod ze względu na łatwe wydzielanie podprzestrzeni i jednoznaczą metodę ich łączenia w operatorze globalnym. Aby to zobrazować wykorzystane zostaną operatory przestrzeni obliczeniowej Ω , w której wydzielono dwie poddziedziny całkowicie ją wypełniające (patrz równania (3.27) oraz (3.28)).

Generacja funkcji przejścia na podstawie operatorów poddziedzin $\widehat{\Omega}^1$ i $\widehat{\Omega}^2$ oraz, w wyniku redukcji algorytmem *ENOR*, baz ortonormalnych $\widehat{\mathbf{V}}^1$ i $\widehat{\mathbf{V}}^2$ odbywa się identycznie jak w omawianym wcześniej przypadku włączania wielu *makromodeli*. Wykorzystując macierze $\widehat{\mathbf{V}}^1$ i $\widehat{\mathbf{V}}^2$ do projekcji operatorów globalnych (3.27) oraz (3.28) uzyskuje się równania:

$$\begin{bmatrix} \left(\widehat{\mathbf{V}}^{1}\right)^{T} \widehat{\mathbf{S}}_{E}^{1} & \left(\widehat{\mathbf{V}}^{1}\right)^{T} \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{1} & \mathbf{0} \\ \left(\widehat{\mathbf{V}}^{2}\right)^{T} \widehat{\mathbf{S}}_{E}^{2} & \mathbf{0} & \left(\widehat{\mathbf{V}}^{2}\right)^{T} \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{2} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \left(\widehat{\mathbf{V}}^{1}\right)^{T} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{1} \widehat{\mathbf{V}}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(\widehat{\mathbf{V}}^{2}\right)^{T} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{2} \widehat{\mathbf{V}}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{1} \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{2} \end{bmatrix}$$
(5.44)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{H}^{1} \widehat{\mathbf{V}}^{1} & \mathbf{S}_{H}^{2} \widehat{\mathbf{V}}^{2} \\ \widehat{\mathbf{R}}_{H}^{1} \widehat{\mathbf{V}}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}_{H}^{2} \widehat{\mathbf{V}}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{1} \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{2} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\varepsilon}^{\prime} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\prime} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{2} \end{bmatrix}$$
(5.45)

Zastosowanie *makromodeli* jako techniki *dekompozycji dziedziny* sprowadza się więc do podziału dużego problemu elektromagnetycznego zapisanego za pomocą równań różnicowych na mniejsze fragmenty. W procesie redukcji rzędu modelu wydzielonych poddziedzin rozwiązywane jest zagadnienie brzegowe, którego wynik użyty do generacji baz ortonormalnych $\widehat{\mathbf{V}}^1$ i $\widehat{\mathbf{V}}^2$ pozwala zredukować fragmenty operatorów globalnych występujących w równaniach (5.44) oraz (5.45). Takie włączenie rozwiązań częściowych pozwala szybko uzyskać rozwiązanie globalne, jako że rozmiar problemu po redukcji jest wielokrotnie niższy, niż przed redukcją.

Klonowanie makromodeli w operatorach przestrzeni obliczeniowej

Wykorzystanie modeli zredukowanych w analizie problemów elektromagnetycznych, choć przyśpiesza obliczenia numeryczne, poprzedzone jest generacją *makromodelu*, która w przypadku włączania wielu *makromodeli* może być czasochłonna. Jeśli niektóre z wydzielonych poddziedzin są identyczne³, to zamiast generować oddzielne *makromodele* dla każdej z nich, można je *sklonować*.

Klonowanie makromodeli polega na powieleniu operatorów, baz ortonormalnych i *macierzy sprzęgających* (lub ich fragmentów) w taki sposób, aby *makromodele* poddziedzin będących klonami wygenerować jak najmniejszym kosztem obliczeniowym. Technika ta ma największe zastosowanie w analizie struktur periodycznych, zwłaszcza kryształów fotonicznych składających się z setek identycznych elementów [62].

Przeanalizujmy podobieństwo macierzy wykorzystywanych w procesie wydzielania poddziedzin, tworzenia *makromodeli* i ich włączania do operatorów globalnych na przykładzie opisanego wcześniej włączania dwóch *makromodeli* do operatorów przestrzeni obliczeniowej. Wydzielenie identycznych poddziedzin $\hat{\Omega}^1$ i $\hat{\Omega}^2$ z przestrzeni obliczeniowej Ω oznacza, że zachodzą następujące zależności pomiędzy macierzami występującymi w równaniach (5.38) i (5.39):

$$\widehat{\mathbf{R}}_{E}^{1} = \widehat{\mathbf{R}}_{E}^{2} = \widehat{\mathbf{R}}_{E}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_{H}^{1} = \widehat{\mathbf{R}}_{H}^{2} = \widehat{\mathbf{R}}_{H}$$

$$\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{1} = \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{2} = \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}$$

$$\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{1} = \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{2} = \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}$$
(5.46)

Macierze $\hat{\mathbf{S}}_{E}^{1}$, $\hat{\mathbf{S}}_{E}^{2}$ oraz \mathbf{S}_{H}^{1} , \mathbf{S}_{H}^{2} są różne, czego powodem jest różna pozycja wydzielonych podprzestrzeni w siatce Yee dziedziny Ω ($\mathbf{L}_{E}^{1} \neq \hat{\mathbf{L}}_{E}^{2}$, $\mathbf{B}_{H}^{1} \neq \hat{\mathbf{B}}_{H}^{2}$). Pozostałe macierze składowe *macierzy sprzężeń* wykazują jednak podobieństwo, stąd prawdziwe są zależności:

$$\widehat{\mathbf{B}}_{E}^{1} = \widehat{\mathbf{B}}_{E}^{2} = \widehat{\mathbf{B}}_{E}$$

$$\mathbf{I}_{E}^{1} = \mathbf{I}_{E}^{2} = \mathbf{I}_{E}$$

$$\widehat{\mathbf{L}}_{H}^{1} = \widehat{\mathbf{L}}_{H}^{2} = \widehat{\mathbf{L}}_{H}$$

$$\mathbf{I}_{H}^{1} = \mathbf{I}_{H}^{2} = \mathbf{I}_{H}$$
(5.47)

 $^{^{3}}$ W algorytmach różnicowych, fakt, że poddziedziny są identyczne określa się na podstawie ich opisu zdyskretyzowanymi równaniami Maxwella, a więc porównując operatory je opisujące.

Oczywiście wartości próbek pól w poddziedzinach $\hat{\Omega}^1$ i $\hat{\Omega}^2$ także mogą się różnić.

Analizując sposób tworzenia funkcji przejścia (5.6) oraz równania (5.46) i (5.47) można zauważyć, że macierze tworzące $\mathbf{H}(s)$ będą takie same dla obu poddziedzin. Proces redukcji doprowadzi więc do wygenerowania identycznych baz ortonormalnych, co oznacza, że redukcja musi być przeprowadzona tylko dla pierwszej poddziedziny. Uwzględniając powyższe wnioski łatwo można zapisać operatory globalne opisujące przestrzeń obliczeniową Ω z makromodelami włączonymi poprzez klonowanie:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{S}}_{E}^{1} & \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{R}}_{E} & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{S}}_{E}^{2} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{R}}_{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{2} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \widehat{\mathbf{V}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{1} \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{2} \end{bmatrix}$$
(5.48)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H}^{1} \widehat{\mathbf{V}} & \mathbf{S}_{H}^{2} \widehat{\mathbf{V}} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}_{H} \widehat{\mathbf{V}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{R}}_{H} \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{1} \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{2} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}}^{1} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{2} \end{bmatrix}$$
(5.49)

5.5 Wykorzystanie symetryzowanej funkcji przejścia

Najważniejszymi technikami umożliwiającymi efektywne włączanie *makromodeli* do operatorów różnicowych są: wydzielanie podprzestrzeni, redukcja rzędu modelu z wykorzystaniem algorytmu *ENOR* oraz redukcja operatora globalnego. Ta ostatnia technika pozwala stworzyć jednolity mechanizm włączania *makromodeli*, niezależnie od tego, czy są one zagnieżdżone czy też zwielokrotnione w przestrzeni obliczeniowej Ω .

Jednym z efektów włączania *makromodeli* poprzez projekcję jest zagęszczanie macierzy. Nawet jeśli pierwotna macierz jest macierzą diagonalną to zastosowanie obustronnej projekcji zamienia ją w macierz gęstą. Oczywistą konsekwencją tego zjawiska jest wzrost zasobów pamięciowych potrzebnych do przechowywania macierzy. Znacznie poważniejszym zagadnieniem jest jednak utrudnienie rozwiązywania problemów zawierających *makromodele*. Aby to zilustrować przeanalizujmy globalną macierz przenikalności magnetycznej występującą w równaniu (3.11) oraz jej odpowiednik ze zredukowaną poddziedziną $\hat{\Omega}$ z zależności (5.20), które zestawiono poniżej:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix}$$
(5.50)

Ponieważ macierze \mathbf{D}'_{μ} i $\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}$ są w większości przypadków diagonalne, diagonalny będzie również operator je zawierający, co znacznie upraszcza odwrócenie macierzy globalnej niezbędne np. w trakcie rozwiązywania problemu własnego zbudowanego z równań (3.11) i (3.12). Po redukcji operatora w miejsce diagonalnej macierzy $\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}$ pojawia się gęsta macierz $\widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \widehat{\mathbf{V}}$ i w konsekwencji odwrócenie macierzy wynikowej jest utrudnione. Trudności związane z zagęszczaniem macierzy przenikalności są szczególnie dokuczliwe, gdy *makromodele* są silnie zagnieżdżane i zwielokrotniane, a więc w przypadkach najatrakcyjniejszych pod względem zwiększania efektywności analizy metodami różnicowymi.

Przedstawiona w niniejszym podrozdziale metoda symetryzowania funkcji przejścia redukowanej poddziedziny pozwala w prosty sposób całkowicie wyeliminować problem zagęszczania operatora globalnego przenikalności magnetycznej, a więc stanowi istotne dopełnienie metod włączania *makromodeli*, które warunkuje efektywność wykorzystania techniki redukcji rzędu modelu w metodach różnicowych elektrodynamiki obliczeniowej.

5.5.1 Symetryzowanie funkcji przejścia

Rozważmy równanie (5.6) definiujące macierze składowe $\widehat{\Gamma}$, \widehat{C} , \mathbf{L} i \mathbf{B} funkcji przejścia $\mathbf{H}(s)$ (5.7) redukowanej poddziedziny, które dla przejrzystości prezentowanych rozważań przedstawiono poniżej:

$$\frac{\frac{1}{s}}{\underbrace{\widehat{\mathbf{R}}_{\varepsilon}\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{H}}_{\widehat{\mathbf{r}}}\widehat{\mathbf{h}} + s\underbrace{\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}}_{\widehat{\mathbf{C}}}\widehat{\mathbf{h}} = \underbrace{-\widehat{\mathbf{B}}_{\varepsilon}\mathbf{I}_{E}}_{\mathbf{B}}\mathbf{e}_{M}$$
$$\mathbf{h}_{M} = \underbrace{\mathbf{I}_{H}\widehat{\mathbf{L}}_{H}}_{\mathbf{L}^{T}}\widehat{\mathbf{h}}$$
(5.51)

Występujący w równaniach (5.51) wektor $\hat{\mathbf{h}}$ zawiera próbki pola magnetycznego poddziedziny $\hat{\Omega}$. Wprowadźmy odpowiadający mu wektor symetryzowany $\tilde{\hat{\mathbf{h}}}$, który związany jest z $\hat{\mathbf{h}}$ poniższymi zależnościami:

$$\widetilde{\hat{\mathbf{h}}} = \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{h}} \qquad \widehat{\mathbf{h}} = \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\widehat{\mathbf{h}}}$$
(5.52)

Przy powyższej definicji, równania (5.51) zapisane przy użyciu wektor
a $\hat{\mathbf{h}}$ przyjmą następującą postać:

$$\frac{1}{s}\widehat{\mathbf{R}}_{\varepsilon}\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}\widehat{\widehat{\mathbf{h}}} + s\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{\frac{1}{2}}\widehat{\widehat{\mathbf{h}}} = -\widehat{\mathbf{B}}_{\varepsilon}\mathbf{I}_{\varepsilon}\mathbf{e}_{M}$$
(5.53)

$$\mathbf{h}_M = \mathbf{I}_H \widehat{\mathbf{L}}_H \widehat{\mathbf{D}}_\mu^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{h}}$$
(5.54)

Mnożąc lewostronnie równanie (5.53) przez $\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}$ uzyskuje się symetryzowaną postać równania (5.6):

$$\frac{1}{s}\underbrace{\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}\widehat{\mathbf{R}}_{E}\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{-1}\widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}}_{\widehat{\mathbf{f}}}\widehat{\mathbf{h}} + s\underbrace{\widehat{\mathbf{I}}}_{\widehat{\mathbf{C}}}\widehat{\mathbf{h}} = \underbrace{-\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}\widehat{\mathbf{B}}_{E}\mathbf{I}_{E}}_{\widehat{\mathbf{B}}}\mathbf{e}_{M}$$
$$\mathbf{h}_{M} = \underbrace{\mathbf{I}_{H}\widehat{\mathbf{L}}_{H}\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}}_{\widehat{\mathbf{L}}^{T}}\widehat{\mathbf{h}}$$
(5.55)

gdzie $\hat{\mathbf{I}}$ jest macierzą jednostkową o rozmiarze równym rozmiarowi macierzy $\hat{\mathbf{C}}$. Powyższe równania pozwalają zapisać symetryzowaną funkcję przejścia poddziedziny $\hat{\Omega}$ jako:

$$\tilde{\mathbf{H}}(s) = \tilde{\mathbf{L}}^T \left(\frac{1}{s}\tilde{\widehat{\Gamma}} + s\widehat{\mathbf{I}}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$$
(5.56)

gdzie macierze składowe dane są następującymi zależnościami:

$$\tilde{\widehat{\Gamma}} = \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{R}}_{E} \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_{H} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} = \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\Gamma} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}$$
(5.57)
$$\tilde{\widehat{\mathbf{C}}} = \widehat{\mathbf{C}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{C}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{C}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}$$
(5.57)

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} = \mathbf{D}_{\mu} \,^{2} \, \mathbf{C} \mathbf{D}_{\mu} \,^{2} \tag{5.58}$$

$$\widetilde{\mathbf{L}}^T = \mathbf{I}_H \widehat{\mathbf{L}}_H \widehat{\mathbf{D}}_\mu^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{L}^T \widehat{\mathbf{D}}_\mu^{-\frac{1}{2}}$$
(5.59)

$$\tilde{\mathbf{B}} = -\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}\widehat{\mathbf{B}}_{E}\mathbf{I}_{E} = -\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}$$
(5.60)

Ponieważ operacja symetryzowania $\mathbf{H}(s)$ nie zmienia cech macierzy składowych, zostaną one zachowane również po redukcji transmitancji (5.56) algorytmem *ENOR*. Zredukowaną elektromagnetyczną funkcję przejścia $\tilde{\mathbf{H}}(s)$ tworzy się, analogicznie jak w przypadku niesymetryzowanym, poprzez projekcję ortonormalną macierzy składowych (5.56) za pomocą otrzymanej w wyniku działania algorytmu *ENOR* bazy ortonormalnej $\tilde{\mathbf{V}}$, z jednym wyjątkiem. Ponieważ zamiast macierzy $\tilde{\mathbf{C}}$ w funkcji $\tilde{\mathbf{H}}(s)$ występuje macierz jednostkowa, po projekcji ortonormalnej będzie to również macierz jednostkowa o rozmiarze równym rozmiarowi macierzy $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_m$. Oznacza to, że zamiast przeprowadzać projekcję macierzy $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{\hat{I}}$ wystarczy zmienić $\mathbf{\hat{I}}$ na macierz jednostkową $\mathbf{\hat{I}}_m$.

5.5.2 Włączanie symetryzowanego *makromodelu* do operatora globalnego

Oczywistą konsekwencją symetryzowania elektromagnetycznej funkcji przejścia, która wiąże się z przeskalowaniem próbek pól magnetycznych, jest modyfikacja metody włączania *makromodelu* do równań różnicowych poprzez redukcję operatorów globalnych. Przyczyną tego jest generacja różnej od $\widehat{\mathbf{V}}$ macierzy projekcji $\widehat{\widehat{\mathbf{V}}}$, która zapewnia, że zredukowana funkcja przejścia będzie dobrze aproksymowała symetryzowaną transmitancję $\mathbf{H}(s)$.

W celu włączenia symetryzowanego makromodelu poprzez redukcję operatora należy zmodyfikować równania operatora globalnego związane z poddziedziną $\hat{\Omega}$ w taki sposób, aby odpowiadały symetryzowanej funkcji przejścia. Proste przekształcenia algebraiczne wy-korzystujące (5.52) prowadzą do następującej postaci operatorów globalnych:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} & 0\\ \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{S}}_{E} & \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{R}}_{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}'\\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \widetilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix}$$
(5.61)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H}\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & \widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \hat{\mathbf{e}} \end{bmatrix}$$
(5.62)

Macierze symetryzowanego operatora globalnego związane z poddziedziną $\hat{\Omega}$ pozwalają na łatwe utworzenie symetryzowanej funkcji przejścia, o postaci (5.56), poprzez podstawienia opisane równaniami (5.4), (5.5) oraz (5.6). Oznacza to, że operatory równań (5.61) i (5.62) można zredukować za pomocą bazy ortonormalnej $\hat{\mathbf{V}}$, co pozwala zapisać zredukowane równania (5.61) i (5.62) jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} & 0\\ \hat{\mathbf{\hat{V}}}^{T} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{S}}_{E} & \hat{\mathbf{\hat{V}}}^{T} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{R}}_{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}'\\ \hat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & 0\\ 0 & \hat{\mathbf{I}}_{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \hat{\mathbf{\hat{h}}}_{m} \end{bmatrix}$$
(5.63)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{V}} \\ 0 & \widehat{\mathbf{R}}_{H} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widetilde{\mathbf{h}}_{m} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix}$$
(5.64)

Jak łatwo zauważyć, występująca w równaniach macierz globalna przenikalności magnetycznej jest diagonalna zarówno przed, jak i po redukcji. Oznacza to, że stosując symetryzowaną funkcję przejścia oraz rozciągając powyższe rozumowanie na *makromodele* zagnieżdżone i zwielokrotnione można pokonać występujące wcześniej problemy związane z zagęszczaniem macierzy przenikalności magnetycznej.

Rozdział 6

Makromodele w analizie *FDTD* i *FDFD*

Przy założeniu, że w przestrzeni Ω wydzielona została podprzestrzeń $\widehat{\Omega}$, różnicowe równania *Maxwella*, zapisane za pomocą operatorów globalnych, przyjmują postać daną zależnościami (3.11) oraz (3.12). Generacja *makromodelu* i włączenie go do analizy różnicowej poprzez *redukcję operatorów* podprzestrzeni $\widehat{\Omega}$ przy wykorzystaniu bazy ortonormalnej $\widehat{\mathbf{V}}$ prowadzi do równań (5.20) i (5.21). Zdyskretyzowane równania *Maxwella* dla dziedziny Ω z włączonym *makromodelem* mają następującą postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_E & 0\\ \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{S}}_E & \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{R}}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}'\\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_\mu & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{D}}_\mu \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \widehat{\mathbf{h}}_m \end{bmatrix}$$
(6.1)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H} \widehat{\mathbf{V}} \\ 0 & \widehat{\mathbf{R}}_{H} \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix}$$
(6.2)

W efekcie włączenia makromodelu do równań różnicowych zmniejsza się liczba zmiennych zawartych w wektorze próbek pola magnetycznego podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ (zgodnie z (5.13) $\hat{\mathbf{h}}_m = \widehat{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{h}}$), podczas gdy liczba zmiennych zawartych w wektorze $\hat{\mathbf{e}}$ pozostaje bez zmian. Związane jest to z zastosowaniem do redukcji równań różnicowych poddziedziny $\hat{\Omega}$ algorytmu *ENOR*, w którym dla zmniejszenia kosztów numerycznych związanych z generacją makromodeli używa się funkcji przejścia drugiego rzędu (5.8). Oznacza to, że algorytmy *FDFD* i *FDTD* wykorzystujące makromodele muszą być tak sformułowane, aby nie występowały w nich wektory $\hat{\mathbf{e}}$.

6.1 Algorytmy *FDFD* z wykorzystaniem *makromodeli*

Dzięki zastosowaniu projekcji operatorów różnicowych analiza problemów w dziedzinie częstotliwości z wykorzystaniem *makromodeli* nie odbiega w zasadniczy sposób od standardowego algorytmu *FDFD* opisanego w rozdziale 2. Problem różnicowy (6.1), (6.2) może więc zostać rozwiązany w klasyczny sposób, zarówno w przypadku sformułowania jako zagadnie własne, jak i układu równań opisującego problem deterministyczny. Przy czym uwzględniona powinna zostać opisana powyżej specyfika związana z generacją *makromodeli*.

6.1.1 Problem własny

Podstawiając $s=j\omega$ równania (6.1), (6.2) zapisać można w postaci problemu drugiego rzędu jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} & 0\\ \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{S}}_{E} & \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{R}}_{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H}\widehat{\mathbf{V}}\\ 0 & \widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \widehat{\mathbf{h}}_{m} \end{bmatrix} = \omega^{2} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}\widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \widehat{\mathbf{h}}_{m} \end{bmatrix}$$
(6.3)

Przekształcając powyższe natychmiast uzyskuje się problem własny o postaci danej (2.34):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_E & 0\\ \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{S}}_E & \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{R}}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_H & \mathbf{S}_H \widehat{\mathbf{V}}\\ 0 & \widehat{\mathbf{R}}_H \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \widehat{\mathbf{h}}_m \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \widehat{\mathbf{h}}_m \end{bmatrix}$$
(6.4)

w którym rozwiązaniami będą pulsacje rezonansowe ω i rozkłady próbek pól H.

Jak łatwo zauważyć, utworzenie powyższego zagadnienia wymaga odwrócenia gęstej¹ macierzy $\widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \widehat{\mathbf{V}}$. Zamiast operatorów globalnych występujących w (6.1), (6.2) znacznie korzystniej jest użyć sformułowania wykorzystującego *makromodele* symetryzowane opisane w podrozdziale 5.5. Zapisując operatory globalne z *makromodelami* symetryzowanymi (5.61), (5.62) w postaci problemu drugiego rzędu otrzymuje się:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} & 0\\ \tilde{\mathbf{\hat{V}}}^{T} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{S}}_{E} & \tilde{\mathbf{\hat{V}}}^{T} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{R}}_{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\mathbf{\hat{V}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \tilde{\mathbf{\hat{h}}}_{m} \end{bmatrix} = \omega^{2} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{I}}_{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \tilde{\mathbf{\hat{h}}}_{m} \end{bmatrix}$$

$$(6.5)$$

Choć powyższa zależność jest równoważna (6.3), to w tym przypadku konstrukcja problemu własnego nie będzie wymagała odwracania macierzy gęstej, gdyż zamiast $\widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \widehat{\mathbf{V}}$ w globalnej macierzy przenikalności magnetycznej występuje macierz jednostkowa $\widehat{\mathbf{I}}_m$.

¹Macierz gęsta powstanie, gdy wartości elementów na diagonali macierzy $\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}$ będą różne. Przypadek ten ma miejsce np. podczas stosowania schematów lokalnych [67].

6.1.2 Problem deterministyczny

Do tej pory przy włączaniu *makromodeli* do równań różnicowych zakładano, że w *dyskretnych równaniach Maxwella* przestrzeni Ω nie wyodrębniono pobudzenia. Z tego powodu w naturalny sposób otrzymuje się problem własny w dziedzinie częstotliwości (6.4), który z zasady opisuje struktury rezonansowe.

Aby poddać analizie struktury transmisyjne należy sformułować operatory globalne równań różnicowych zawierające makromodele w taki sposób, aby uwzględniały obecność pobudzenia. Z tego względu, zamiast (3.1), zależnościami początkowymi opisującymi przestrzeń Ω będą (2.37), (2.38), które w dziedzinie s Laplace'a zapisać można jako:

$$\mathbf{e}_{b} + \mathbf{R}_{E} \mathbf{e} = -s \mathbf{D}_{\mu} \mathbf{h}$$

$$\mathbf{R}_{H} \mathbf{h} = s \mathbf{D}_{\varepsilon} \mathbf{e}$$
(6.6)

Wydzielenie podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ w przestrzeni Ω powoduje usunięcie z powyższej zależności równań odpowiadających zmiennym stanu zawartych wewnątrz $\hat{\Omega}$. Wykorzystując macierze projekcyjne \mathbf{P}_E i \mathbf{P}_H (3.3) można zapisać układ równań (6.6) jako:

$$\mathbf{e}'_{b} + \mathbf{R}'_{E} \mathbf{e}' = -s \mathbf{D}'_{\mu} \mathbf{h}' \mathbf{R}'_{H} \mathbf{h}' = s \mathbf{D}'_{\varepsilon} \mathbf{e}'$$

$$(6.7)$$

gdzie wektor $\mathbf{e}'_b = \mathbf{P}_H^T \mathbf{e}_b$ zawiera próbki pól stanowiące pobudzenie poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$. Włączenie do (6.7) makromodelu podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ pozwala zapisać dyskretne równania Maxwella wykorzystujące zredukowane operatory globalne jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_E & 0 \\ \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{S}}_E & \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{R}}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_\mu & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{D}}_\mu \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{h}}_m \end{bmatrix}$$
(6.8)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H}\mathbf{V} \\ 0 & \widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{h}}_{m} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix}$$
(6.9)

Powyższe zależności mogą zostać rozwiązane w dziedzinie częstotliwości poprzez sformułowanie odpowiedniego układu równań. Podstawiając $s = j\omega$ i dokonując niezbędnych przekształceń uzyskuje się:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} & 0\\ \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{S}}_{E} & \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{R}}_{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H} \widehat{\mathbf{V}}\\ 0 & \widehat{\mathbf{R}}_{H} \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{V}}^{T} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}'\\ \widehat{\mathbf{h}}_{m} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_{b}\\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
(6.10)

Powyższy układ równań, podobnie jak problem własny (6.4), wykorzystuje wyłącznie próbki pól magnetycznych zawarte w wektorach \mathbf{h}' i $\hat{\mathbf{h}}_m$. Warto przy tym zaznaczyć, że choć w tym sformułowaniu problemu różnicowego nie jest to niezbędne, podobne zależności można zapisać wykorzystując postać symetryzowaną operatorów globalnych.

6.1.3 Pełne rozwiązanie w dziedzinie częstotliwości

Ponieważ sformułowanie algorytmu *FDFD* zawierającego makromodel wymaga użycia wyłącznie próbek pola magnetycznego, rozwiązanie problemów (6.4) czy (6.10) nie będzie zawierało próbek pola elektrycznego. Co więcej, wektor $\hat{\mathbf{h}}_m = \widehat{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{h}}$ będący zredukowanym wektorem $\hat{\mathbf{h}}$ nie zawiera w jawnej postaci próbek pola magnetycznego wewnątrz $\hat{\Omega}$. Otrzymanie pełnego rozwiązania wymaga więc kilku dodatkowych przekształceń.

Ponieważ wektor \mathbf{h}_m otrzymywany jest w wyniku projekcji ortonormalnej, wektor zawierający próbki pola wewnątrz $\hat{\Omega}$ uzyskuje się poprzez następującą operację:

$$\widehat{\mathbf{h}} = \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{h}}_m \tag{6.11}$$

Otrzymane w ten sposób wektory $\hat{\mathbf{h}}$ razem z \mathbf{h}' mogą być wykorzystane do znalezienia \mathbf{e}' oraz $\hat{\mathbf{e}}$. Przekształcając równanie (6.9) i zapisując je w dziedzinie czestotliwości otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'\\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H}\widehat{\mathbf{V}}\\ 0 & \widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \widehat{\mathbf{h}}_{m} \end{bmatrix}$$
(6.12)

6.2 Iteracyjny schemat *FDTD* wykorzystujący *ma-kromodele*

Projekcja części operatora za pomocą bazy $\widehat{\mathbf{V}}$ daje w efekcie operator globalny z włączonym *makromodelem* o postaci (5.20), (5.21). Zapisanie tych zależności z wykorzystaniem pochodnej czasowej zamiast zmiennej *s Laplace*'a prowadzi do nastepujących równań:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{E} & 0\\ \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{S}}_{E} & \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{R}}_{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}'\\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\mu} & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}\widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \widehat{\mathbf{h}}_{m} \end{bmatrix}$$
(6.13)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H} \mathbf{\widehat{V}} \\ 0 & \mathbf{\widehat{R}}_{H} \mathbf{\widehat{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \mathbf{\widehat{h}}_{m} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \mathbf{\widehat{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \mathbf{\widehat{e}} \end{bmatrix}$$
(6.14)

Jedną z możliwości stworzenia algorytmu FDTD zawierającego makromodele jest bezpośrednie przekształcenie powyższego sformułowania operatorowego do macierzowego algorytmu FDTD. Ze względu na konieczność wykorzystania jedynie zredukowanego wektora $\hat{\mathbf{h}}_m$, powinien to być jednak algorytm operujący wyłącznie na próbkach pól magnetycznych, a więc posiadający zasadnicze ograniczenia. Znacznie atrakcyjniejszym podejściem, z punktu widzenia efektywności schematu FDTD, jest używanie sformułowania operatorowego wyłącznie na etapie generacji bazy ortogonalnej $\hat{\mathbf{V}}$ i projekcji równań redukowanej podprzestrzeni, a następnie rozłączenie równań różnicowych poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i makromodeli w implementacji schematu FDTD. Umożliwi to wykorzystanie zaawansowanych sposobów włączania makromodeli, jak ich zagnieżdżanie i zwielokratnianie, przy jednoczesnym zachowaniu takiej postaci schematu iteracyjnego, aby były możliwe iteracje z użyciem zarówno wektorów \mathbf{e}' , jak i \mathbf{h}' , oraz swobodne łączenie makromodeli z klasycznym sformułowaniem algorytmu FDTD.

6.2.1 Dyskretyzacja równań różnicowych makromodeli

Zakładając, że wszystkie równania *makromodeli* zawarte są w operatorach związanych z wydzieloną poddziedziną $\hat{\Omega}$, zależności (6.13) i (6.14) można rozbić na dwa zestawy równań:

$$\mathbf{R}'_{E}\mathbf{e}' = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}'_{\mu}\mathbf{h}'$$
$$\mathbf{R}'_{H}\mathbf{h}' + \mathbf{S}_{H}\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{h}}_{m} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}'_{\varepsilon}\mathbf{e}'$$
(6.15)

$$\widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{S}}_{E}\mathbf{e}' + \widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{R}}_{E}\widehat{\mathbf{e}} = -\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathbf{V}}^{T}\widehat{\mathbf{D}}_{\mu}\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{h}}_{m}$$
$$\widehat{\mathbf{R}}_{H}\widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{h}}_{m} = \frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}\widehat{\mathbf{e}} \qquad (6.16)$$

Zależności (6.15) są nieznacznie zmodyfikowaną wersją równań (2.51), (2.52), a więc łatwo mogą zostać przekształcone do macierzowego sformułowania FDTD (patrz (2.54), (2.55) i (2.56)).

Ze wzgledu na wymagania związane z użyciem wyłącznie wektora $\hat{\mathbf{h}}_m$ w schemacie różnicowym *makromodelu* z zależności (6.16), przed przeprowadzeniem dyskretyzacji osi czasu tworzy się równanie różniczkowe drugiego rzędu o następującej postaci:

$$\widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{S}}_E \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}' + \widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{R}}_E \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_H \widehat{\mathbf{V}} \widehat{\mathbf{h}}_m = -\widehat{\mathbf{V}}^T \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \widehat{\mathbf{V}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \widehat{\mathbf{h}}_m \tag{6.17}$$

Podstawiając $\widehat{\mathbf{S}}_E = \widehat{\mathbf{B}}_E \mathbf{I}_E \mathbf{L}_E$ (5.2) oraz wykorzystując związki (5.6) i (5.10) powyższe można zapisać za pomocą niewielkich macierzy zredukowanej funkcji przejścia (5.9):

$$-\mathbf{B}_{m}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e}_{M} + \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{m}\widehat{\mathbf{h}}_{m} = -\widehat{\mathbf{C}}_{m}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\widehat{\mathbf{h}}_{m}$$
$$\mathbf{e}_{M} = \mathbf{L}_{E}\mathbf{e}'$$
(6.18)

Dyskretyzując przy użyciu różnic centralnych oś czasu w powyższych równaniach różniczkowych drugiego rzędu otrzymuje się następujący macierzowy problem różnicowy:

$$-\mathbf{B}_{m}\frac{\mathbf{e}_{M}^{\tau}-\mathbf{e}_{M}^{\tau-1}}{\Delta_{t}}+\widehat{\Gamma}_{m}\widehat{\mathbf{h}}_{m}^{\tau-0.5} = -\widehat{\mathbf{C}}_{m}\frac{-2\widehat{\mathbf{h}}_{m}^{\tau-0.5}+\widehat{\mathbf{h}}_{m}^{\tau+0.5}+\widehat{\mathbf{h}}_{m}^{\tau-1.5}}{\Delta_{t}^{2}}$$
$$\mathbf{e}_{M}^{\tau} = \mathbf{L}_{E}\mathbf{e}^{\prime \tau}$$
(6.19)

Po przeprowadzeniu kilku operacji algebraicznych równanie różnicowe *makromodelu* można przekształcić do postaci następujacego schematu iteracyjnego:

$$\widehat{\mathbf{h}}_{m}^{\tau+0.5} = 2\widehat{\mathbf{h}}_{m}^{\tau-0.5} - \Delta_{t}^{2}\widehat{\mathbf{C}}_{m}^{-1}\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{m}\widehat{\mathbf{h}}_{m}^{\tau-0.5} - \widehat{\mathbf{h}}_{m}^{\tau-1.5} + \Delta_{t}\widehat{\mathbf{C}}_{m}^{-1}\mathbf{B}_{m}\left(\mathbf{e}_{M}^{\tau} - \mathbf{e}_{M}^{\tau-1}\right)$$
(6.20)

Warto zaznaczyć, że występująca w powyższej zależności odwrotność macierzy $\hat{\mathbf{C}}_m$ generuje znaczne koszty numeryczne, których można uniknąć stosując *makromodele* symetryzowane (patrz podrozdział 5.5 oraz zależności (5.50), (5.55), (5.56) i (5.57)-(5.60)).

6.2.2 Algorytm *FDTD* z wykorzystaniem *makromodeli*

W schemacie FDTD z włączonymi makromodelami równania podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i makromodelu muszą zostać rozdzielone tak, aby umożliwić łatwą implementację zarówno w przypadku sformułowania jawnego, jak i macierzowego. Wykorzystując (6.15) oraz (6.20) kompletny schemat FDTD z włączonymi makromodelami można przedstawić następująco:

- 1. dodaj pobudzenie i zastosuj warunki brzegowe
- 2. wyznacz wektor próbek pola elektrycznego w $\Omega \setminus \hat{\Omega}$:

$$\mathbf{e}^{\prime \tau} = \mathbf{e}^{\prime \tau - 1} + \Delta_t \mathbf{D}_{\varepsilon}^{\prime - 1} \mathbf{R}_H^{\prime} \mathbf{h}^{\prime \tau - 0.5}$$
(6.21)

3. uwzględnij odpowiedź makromodelu:

$$\mathbf{e}^{\prime \tau} = \mathbf{e}^{\prime \tau} + \Delta_t \mathbf{D}_{\varepsilon}^{\prime - 1} \mathbf{B}_H \mathbf{h}_M^{\tau - 0.5} \tag{6.22}$$

4. wyznacz wektor próbek pola magnetycznego w $\Omega \setminus \hat{\Omega}$:

$$\mathbf{h}^{\prime \ \tau+0.5} = \mathbf{h}^{\prime \ \tau-0.5} - \Delta_t \mathbf{D}^{\prime-1}_{\mu} \mathbf{R}^{\prime}_E \mathbf{e}^{\prime \ \tau}$$
(6.23)

5. wyznacz pobudzenie makromodelu:

$$\mathbf{e}_M^{\tau} = \mathbf{L}_E \mathbf{e}^{\prime \tau} \tag{6.24}$$

- 6. wyznacz zredukowany wektor próbek pola magnetycznego w $\hat{\Omega}$ z równania (6.20)
- 7. wyznacz odpowiedź makromodelu:

$$\mathbf{h}_{M}^{\tau+0.5} = \mathbf{L}_{m}^{T} \hat{\mathbf{h}}_{m}^{\tau+0.5} \tag{6.25}$$

Jak łatwo zauwazyć, w punktach 1, 2 i 4 powyższego algorytmu przeprowadzane są standardowe iteracje *FDTD* dla podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ zapisane przy użyciu sformułowanie macierzowego². Zależności związane z iteracyjnym schematem *makromodelu* (punkty 3, 5 – 7) zapisane są w oddzielnych równaniach, w związku z czym łatwo jest poprawić efektywność powyższego algorytmu poprzez zastosowanie schematu z jawnymi operacjami rotacji.

 $^{^2 {\}rm Oczywiście}$ w praktycznej implementacji sformułowanie macierzowe w punktach 1, 2 i 4 zastąpić należy klasycznym schematem FDTD.

6.2.3 Algorytm *FDTD* wykorzystujący *makromodele* symetryzowane

Złożoność obliczeniową algorytmu FDTD zawierającego makromodele można dodatkowo zmniejszyć wykorzystując makromodele symetryzowane, których włączenie do operatora globalnego opisują zależności (5.61) i (5.61). Wprowadzenie nowego wektora $\tilde{\mathbf{h}}_m$ w makromodelu (5.52), (5.56), (5.57)-(5.60) wymusza zmianę dwóch ostatnich punktów przedstawionego powyżej schematu. Po niezbędnych modyfikacjach algorytm FDTD wykorzystujący makromodele symetryzowane przedstawia się następująco:

- 1. dodaj pobudzenie i zastosuj warunki brzegowe
- 2. wyznacz wektor próbek pola elektrycznego w $\Omega \setminus \hat{\Omega}$:

$$\mathbf{e}^{\prime \tau} = \mathbf{e}^{\prime \tau - 1} + \Delta_t \mathbf{D}_{\varepsilon}^{\prime - 1} \mathbf{R}_H^{\prime} \mathbf{h}^{\prime \tau - 0.5}$$
(6.26)

3. uwzględnij odpowiedź makromodelu:

$$\mathbf{e}^{\prime \tau} = \mathbf{e}^{\prime \tau} + \Delta_t \mathbf{D}_{\varepsilon}^{\prime - 1} \mathbf{B}_H \mathbf{h}_M^{\tau - 0.5}$$
(6.27)

4. wyznacz wektor próbek pola magnetycznego w $\Omega \setminus \hat{\Omega}$:

$$\mathbf{h}^{\prime \ \tau+0.5} = \mathbf{h}^{\prime \ \tau-0.5} - \Delta_t \mathbf{D}^{\prime-1}_{\mu} \mathbf{R}^{\prime}_E \mathbf{e}^{\prime \ \tau}$$
(6.28)

5. wyznacz pobudzenie makromodelu:

$$\mathbf{e}_M^\tau = \mathbf{L}_E \mathbf{e}^{\prime \tau} \tag{6.29}$$

6. wyznacz zredukowany wektor próbek pola magnetycznego w $\hat{\Omega}$ z równania:

$$\tilde{\hat{\mathbf{h}}}_{m}^{\tau+0.5} = 2\tilde{\hat{\mathbf{h}}}_{m}^{\tau-0.5} - \Delta_{t}^{2}\tilde{\hat{\Gamma}}_{m}\tilde{\hat{\mathbf{h}}}_{m}^{\tau-0.5} - \tilde{\hat{\mathbf{h}}}_{m}^{\tau-1.5} + \Delta_{t}\tilde{\mathbf{B}}_{m}\left(\mathbf{e}_{M}^{\tau} - \mathbf{e}_{M}^{\tau-1}\right)$$
(6.30)

7. wyznacz odpowiedź makromodelu:

$$\mathbf{h}_{M}^{\tau+0.5} = \tilde{\mathbf{L}}_{m}^{T} \tilde{\hat{\mathbf{h}}}_{m}^{\tau+0.5} \tag{6.31}$$

W rezultacie jednoczesnego wykorzystania *makromodeli* symetryzowanych i klasycznego schematu *FDTD* do realizacji kroków 1, 2 i 4 otrzymuje się algorytm, w którym zwiększona zostaje zarówno szybkość przeprowadzanych iteracji, jak i obniżona złożoność obliczeniowa tworzenia równania (6.30). Zastosowanie postaci symetryzowanej pozwala pozbyć się kosztownego numerycznie odwracania macierzy $\hat{\mathbf{C}}_m$, która w tym układzie jest macierzą jednostkową (5.58).

6.2.4 Stabilność schematu iteracyjnego zawierającego makromodele

Stabilność algorytmu jest jednym z najistotniejszych zagadnień związanych z metodą FDTD. Choć oryginalny schemat FDTD jest stabilny przy spełnieniu warunku *Couranta*, to każda modyfikacja może powodować jego niestabilne działanie. W przypadku implementacji *makromodeli* do równań różnicowych zapisanych w postaci algorytmu iteracyjnego, analiza stabilności złożona jest z dwóch zagadnień:

- stabilność iteracyjnego schematu opierającego się na równaniach różnicowych makromodelu,
- stabilność algorytmu FDTD z włączonym makromodelem.

Należy podkreślić, że stabilność każdego ze schematów osobno nie oznacza automatycznie stabilności algorytmu połączonego.

Stabilność iteracyjnego schematu makromodelu

Iteracyjny schemat różnicowy oparty na równaniach wydzielonej podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ (3.6) jest stabilny jeśli spełnione są warunki stabilności metody *FDTD* przedstawione w podrozdziale 2.2.1 (patrz (2.14) i (2.15)). Modyfikacja oryginalnych równań różnicowych poprzez zastosowanie metod redukcji rzędu modelu, w celu zmniejszenia liczby zmiennych, może powodować powstanie niestabilności w wynikowym zmodyfikowanym algorytmie iteracyjnym.

Algorytmy redukcji rzędu modelu takie jak *PRIMA* czy *ENOR* zachowują pasywność systemu poddawanego redukcji [57, 76] w dziedzinie częstotliwości. Oznacza to, że jeśli system przed redukcją (5.8) był pasywny, to system zredukowany (5.9) będzie również pasywny. W przypadku stosowanego w niniejszej rozprawie algorytmu *ENOR*, przekłada się to na zachowanie w procesie redukcji matematycznych cech rzutowanych macierzy – symetrii i dodatniej półokreśloności, które mają bezpośredni związek z pasywnym charakterem redukowanego systemu [76].

Związki przedstawione w podrozdziale 2.3.2 określają warunki stabilności iteracyjnego schematu *FDTD* (2.49), (2.50). Algorytm ten może zostać zapisany również w postaci zdyskretyzowanych w czasie równań różnicowych drugiego rzędu i w takim układzie będzie operował tylko na jednym z wektorów próbek pól [67]. Na tej podstawie, sposób tworzenia z równań *makromodelu* (6.18) algorytmu iteracyjnego (6.20) może być przeanalizowany przy użyciu związków przedstawionych w podrozdziale 2.3.2.

Analizując zależności (2.69)-(2.72) i zakładając niezmienność wektora \mathbf{e}_M w czasie, natychniast otrzymuje się warunki stabilności iteracyjnego schematu *makromodelu*, które wiążą się z symetryzowaną postacią operatora $\widehat{\mathbf{\Gamma}}_m$ zdefiniowaną równaniem (5.57). Iteracyjny schemat makromodelu (6.20) będzie stabilny, jeżeli spełniony będzie warunek:

$$\Delta_t \leqslant \frac{2}{\sqrt{||\hat{\Gamma}_m||}} \tag{6.32}$$

a operator $\tilde{\widehat{\Gamma}}_m$ będzie symetryczny i dodatnio półokreślony.

Stabilność algorytmu FDTD z włączonym makromodelem

Warunek (6.32) oznacza, że pojedynczy makromodel uzyskany w wyniku redukcji równań różnicowych podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ algorytmem ENOR, będzie zawsze stabilny, jeśli tylko krok dyskretyzacji osi czasu Δ_t będzie miał odpowiednią wartość, a wektor \mathbf{e}_M zawierający pobudzenie nie będzie się zmieniał w czasie.

W rzeczywistych aplikacjach makromodel najczęściej nie występuje oddzielnie, lecz włączony jest do równań algorytmu *FDTD* [38, 39]. Z tego powodu analiza stabilości musi uwzględniać interakcję pomiedzy oboma schematami, w postaci sprzężeń pomiędzy próbkami pól podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$, gdyż w przeciwnym razie może pojawić się niestabilność w postaci rosnących eksponencjalnie wartości próbek pól [39].

Analiza stabilności schematu iteracyjnego *FDTD* z włączonym *makromodelem* jest możliwa dzięki sformułowaniu operatorowemu tego algorytmu [41–43]. Wykorzystując w (3.11) oraz (3.12) podstawienia:

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{D}_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}$$

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{D}_{\mu}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h}$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{e}}} = \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{e}}$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{h}}} = \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{h}}$$

$$(6.33)$$

i stosując przekształcenia dane równaniami (2.59)-(2.62) otrzymuje się symetryzowaną formę operatora globalnego z wydzieloną podprzestrzenią o następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}'_E & 0\\ \tilde{\mathbf{S}}_E & \tilde{\mathbf{R}}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}'\\ \tilde{\tilde{\mathbf{e}}} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}'\\ \tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix}$$
(6.34)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H} \\ 0 & \tilde{\mathbf{R}}_{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}' \\ \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix}$$
(6.35)

gdzie symetryzowane macierze dane są zależnościami:

$$\tilde{\mathbf{R}}_{E} = \mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_{E} \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}
\tilde{\mathbf{R}}_{E} = \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{R}}_{E} \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}
\tilde{\mathbf{S}}_{E} = \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{S}}_{E} \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}
\tilde{\mathbf{R}}_{H} = \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_{H} \mathbf{D}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}
\tilde{\mathbf{R}}_{H} = \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{R}}_{H} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}
\tilde{\mathbf{S}}_{H} = \mathbf{D}_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{H} \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-\frac{1}{2}}$$
(6.36)

Redukcja równań stanu podprzestrzeni $\Omega \backslash \hat{\Omega}$ przy użyciu algorytmu ENOR pozwala uzyskać bazę ortonormalną $\tilde{\widehat{\mathbf{V}}}$ [76], która wykorzystywana jest podczas włączania makromodelu do operatora globalnego. Projekcja (6.34) i (6.35) z wykorzystaniem macierzy $\tilde{\widehat{\mathbf{V}}}$ prowadzi do:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}'_E & 0\\ \tilde{\mathbf{V}}^T \tilde{\tilde{\mathbf{S}}}_E & \tilde{\mathbf{V}}^T \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}'\\ \tilde{\tilde{\mathbf{e}}} \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}'\\ \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_m \end{bmatrix}$$
(6.37)

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}'_H & \tilde{\mathbf{S}}_H \widehat{\mathbf{V}} \\ 0 & \tilde{\mathbf{R}}_H \widehat{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}' \\ \tilde{\mathbf{h}}_m \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}' \\ \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix}$$
(6.38)

gdzie $\tilde{\hat{\mathbf{h}}}_m = \tilde{\hat{\mathbf{V}}}^T \tilde{\hat{\mathbf{h}}}$ jest zredukowanym zsymetryzowanym wektorem próbek pól podprzestrzeni $\hat{\Omega}$.

Analiza stabilności metodą przedstawioną w [55] wymaga przekształcenia powyższej postaci do równania różniczkowego drugiego rzędu (patrz (2.69)-(2.72)). Przekształcając (6.37), (6.38) do dziedziny czasu i wykonując proste przekształcenia uzyskuje się:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}'_E & 0\\ \tilde{\mathbf{V}}^T \tilde{\mathbf{S}}_E & \tilde{\mathbf{V}}^T \tilde{\mathbf{R}}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}'_H & \tilde{\mathbf{S}}_H \tilde{\mathbf{V}}\\ 0 & \tilde{\mathbf{R}}_H \tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}'\\ \tilde{\mathbf{h}}_m \end{bmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}'\\ \tilde{\mathbf{h}}_m \end{bmatrix} = 0$$
(6.39)

Stabilność iteracyjnego schematu związanego z powyższym równaniem różniczkowym związana jest z symetrią i dodatnią półokreślonością operatora \mathbf{L} oraz spełnieniem zależności (2.70). Analizie należy zatem poddać operator \mathbf{L} , który można zapisać jako:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}'_{E}\tilde{\mathbf{R}}'_{H} & \tilde{\mathbf{R}}'_{E}\tilde{\mathbf{S}}_{H}\widehat{\mathbf{V}} \\ \tilde{\widehat{\mathbf{V}}}^{T}\tilde{\widehat{\mathbf{S}}}_{E}\tilde{\mathbf{R}}'_{H} & \tilde{\widehat{\mathbf{V}}}^{T}\tilde{\widehat{\mathbf{R}}}_{E}\tilde{\widehat{\mathbf{R}}}_{H}\tilde{\widehat{\mathbf{V}}} + \tilde{\widehat{\mathbf{V}}}^{T}\tilde{\widehat{\mathbf{S}}}_{E}\tilde{\mathbf{S}}_{H}\tilde{\widehat{\mathbf{V}}} \end{bmatrix}$$
(6.40)

Ponieważ w przypadku włączania pojedynczego makromodelu spełnione są zależności:

$$\tilde{\mathbf{R}}'_E = \tilde{\mathbf{R}}'_H^T \quad \text{oraz} \quad \tilde{\widehat{\mathbf{R}}}_E = \tilde{\widehat{\mathbf{R}}}'_H^T$$

a macier
z $\widehat{\mathbf{V}}$ jest ortonormalna, iteracyjny schema
tFDTDz włączonymi makromodelami jest stabilny, jeżeli:

$$\widehat{\mathbf{S}}_E = \widetilde{\mathbf{S}}_H^T \tag{6.41}$$

Przy spełnieniu tego warunku operator \mathbf{L} będzie iloczynem dwóch macierzy niesymetrycznych pozostających do siebie w relacji transpozycji. Z algebry liniowej wiadomo, że iloczyn takich macierzy jest macierzą symetryczną i dodatnio półokreśloną [52].

Drugim elementem warunkującym stabilną pracę algorytmu *FDTD* zawierającego makromodel jest odpowiednio dobrany krok dyskretyzacji osi czasu Δ_t , który związany jest z normą macierzy **L**. Zapisując operator **L** za pomocą następującej sumy:

$$\mathbf{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{\hat{V}}}^T \tilde{\mathbf{\hat{S}}}_E \tilde{\mathbf{S}}_H \tilde{\mathbf{\hat{V}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}^I} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{R}}'_E \tilde{\mathbf{S}}_H \tilde{\mathbf{\hat{V}}} \\ \tilde{\mathbf{\hat{V}}}^T \tilde{\mathbf{\hat{S}}}_E \tilde{\mathbf{R}}'_H & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}^{II}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}'_E \tilde{\mathbf{R}}'_H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{\hat{V}}}^T \tilde{\mathbf{\hat{R}}}_E \tilde{\mathbf{R}}_H \tilde{\mathbf{\hat{V}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}^{III}} \quad (6.42)$$

można w prosty sposób estymować wartość Δ_t wykorzystując aproksymację norm macierzy \mathbf{M}^I , \mathbf{M}^{II} , \mathbf{M}^{II} [43]. W pracy [43] pokazano drogą analityczną, że norma operatora \mathbf{L} jest znacznie mniejsza niż norma operatora $\tilde{\mathbf{R}}_E \tilde{\mathbf{R}}_H$, co oznacza, że krok czasowy algorytmu z makromodelem jest dużo większy niż krok czasowy wynikający z warunku *Couranta* dla siatki zagęszczonej.

Znacznie dokładniejszą metodą określania maksymalnego kroku czasowego jest numeryczne oszacowanie maksymalnej wartości własnej operatora **L**. Wymaga to wykonania paru prostych iteracji [52] i umożliwia automatyzację doboru kroku czasowego dla analizy *FDTD* z wykorzystaniem makromodeli. Jeśli λ_{max} jest największą wartością własną operatora **L**, to z zależności (2.70) określającej związek pomiędzy krokiem dyskretyzacji zapewniającym stabilną pracę algorytmu *FDTD* można wyznaczyć krok Δ_t schematu *FDTD* zawierającego makromodele:

$$\Delta_t \leqslant \frac{2}{\sqrt{\lambda_{max}}} \tag{6.43}$$

Warunki stabilność schematów zawierających makromodele zagnieżdżone i zwielokrotnione są odbiciem relacji dla pojedynczego makromodelu. Krok czasowy określany jest poprzez szacowanie normy operatora **L** analizowanego zagadnienia różnicowego, zaś stabilność będzie zagwarantowana jeżeli warunek (6.41) będzie spełniony dla każdego z makromodeli. Warto jeszcze dodać, że choć włączenie makromodelu wiąże się zwykle ze skróceniem kroku czasowego w stosunku do oryginalnego schematu *FDTD* dla przestrzeni obliczeniowej Ω , to skrócenie to jest wielokrotnie mniejsze niż w przypadku subgriddingu. Na rys. 6.1 przedstawiono skrócenie kroku Δ_t w obu przypadkach. Jak łatwo zauważyć, dzięki użyciu makromodelu możliwe jest silne zagęszczenie siatki Yee bez konieczności znacznego skrócenia kroku czasowego. Dla przykładu przy r = 13 w subgriddingu należy trzynastokrotnie skrócić krok Δ_t , podczas gdy stosując makromodel wystarczy go skrócić dwukrotnie. Efekt ten



Rysunek 6.1: Skrócenie kroku dyskretyzacji osi czasu dla przypadku *subgriddingu* oraz algorytmu *FDTD* z włączonym *makromodelem*.

jest obok znacznej redukcji liczby zmiennych, największą zaletą stosowanie technik MOR, gdyż umożliwia wysokorozdzielczą analizę FDTD. W pracy [78] dla lokalnego zagęszczenia z r = 495 dzięki zastosowaniu makromodeli uzyskano skrócenie kroku Δ_t jedynie 2.45 raza (zamiast 495 w przypadku subgriddingu).

6.3 Algorytm *FDTD* zawierający *makromodel* działający z różnymi krokami czasowymi

Iteracyjny algorytm *FDTD* zawierający *makromodele* w swej oryginalnej formie (patrz podrozdziały 6.2.2 i 6.2.3) wykorzystuje ten sam krok czasowy dla wszystkich równań różnicowych.

Zwykle podprzestrzeń $\hat{\Omega}$ pokrywana jest siatką gęstszą niż siatka oryginalnej przestrzeni obliczeniowej Ω . W związku z tym algorytm *FDTD* zawierający *makromodele* będzie działał z krokiem dyskretyzacji osi czasu nieco krótszym niż dla schematu *FDTD* operującego wyłącznie na siatce rzadkiej (bez *makromodelu*), a cała analiza trwać będzie przez to dłużej.

Choć skrócenie kroku Δ_t w analizie *FDTD* zawierającej *makromodele* związane jest wyłącznie z obecnością *makromodelu*, to z tym samym krokiem iterowane są zarówno równania ściśle związane z *makromodelem*, jak i równania siatki rzadkiej podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$, które, jak wiadomo, moga używać kroku dłuższego. W praktyce możliwe jest wykorzystanie techniki stosowanej w subgriddingu [31,58,80], która polega na rozdzieleniu iteracji przeprowadzanych dla siatki rzadkiej i gęstej. Dzięki temu w schemacie operującym na równaniach rzadkiej siatki podprzestrzeni będzie mógł być użyty dłuższy krok dyskretyzacji osi czasu, podczas gdy równania gęstej siatki podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ iterowane będą z krótszym Δ_t . W rezultacie otrzymuje się schemat, w którym wykonanywanych jest znacznie mniej iteracji.

Z uwagi na podobieństwo do *subgriddingu*, dla zachowania klarowności prezentowanego w niniejszym podrozdziale algorytmu *FDTD* z włączonym *makromodelem*, rozważania poprzedzone zostaną analizą schematu *FDTD* z lokalnie zagęszczoną siatką Yee.

6.3.1 Algorytm *FDTD* zawierający lokalnie zagęszczoną siatkę Yee

Rozważmy równania (3.11) i (3.12), które zapisane w dziedzinie czasu przyjmą następującą formę:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_E & 0\\ \widehat{\mathbf{S}}_E & \widehat{\mathbf{R}}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}'\\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_\mu & 0\\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}'\\ \widehat{\mathbf{h}} \end{bmatrix}$$
(6.44)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{H} & \mathbf{S}_{H} \\ 0 & \widehat{\mathbf{R}}_{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}' \\ \widehat{\mathbf{h}} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \widehat{\mathbf{e}} \end{bmatrix}$$
(6.45)

Na podstawie (2.54)-(2.56), dyskretyzacja osi czasu z krokiem Δ_t w powyższych równaniach pozwala zapisać schemat *FDTD* jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}^{\prime \tau+0.5} \\ \widehat{\mathbf{h}}^{\tau+0.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{\prime \tau-0.5} \\ \widehat{\mathbf{h}}^{\tau-0.5} \end{bmatrix} - \Delta_t \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{\prime}_{\mu} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\mu} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{\prime}_E & 0 \\ \widehat{\mathbf{S}}_E & \widehat{\mathbf{R}}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\prime \tau} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{\tau} \end{bmatrix}$$
(6.46)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\prime \tau+1} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{\tau+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\prime \tau} \\ \widehat{\mathbf{e}}^{\tau} \end{bmatrix} + \Delta_t \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\varepsilon}^{\prime} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_H^{\prime} & \mathbf{S}_H \\ 0 & \widehat{\mathbf{R}}_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{\prime \tau+0.5} \\ \widehat{\mathbf{h}}^{\tau+0.5} \end{bmatrix}$$
(6.47)

gdzie τ , $\tau + 1$, $\tau - 0.5$ i $\tau + 0.5$ oznaczają dyskretne chwile czasu, w których obliczane są wektory próbek pól \vec{E} i \vec{H} .

Dla opisanej zdyskretyzowanymi równaniami *Maxwella* (3.1) przestrzeni Ω , w której wydzielana jest podprzestrzeń $\hat{\Omega}$, krok dyskretyzacji Δ^{Ω} związany jest poprzez równanie (2.15) (warunek *Couranta*) z odpowiednim krokiem dyskretyzacji osi czasu Δ_t^{Ω} . Samo wydzielenie podprzestrzeni $\hat{\Omega}$, nie zmienia kroku dyskretyzacji osi czasu podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$. Jednak już zagęszczenie siatki Yee w $\hat{\Omega}$ powoduje, że z operatorem globalnym związane będą dwa kroki dyskretyzacji przestrzeni:

- krok dyskretyzacji siatki rzadkiej poddziedziny $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ wynoszący $\Delta^{\Omega \setminus \widehat{\Omega}} = \Delta^{\Omega}$,
- krok dyskretyzacji siatki gęstej podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ wynoszący $\Delta^{\hat{\Omega}}$,

zaś ich stosunek równy $r = \frac{\Delta^{\Omega}}{\Delta^{\Omega}}$ nazywany jest *współczynnikiem zagęszczenia* i jest zwykle liczbą naturalną większą od 1³.

Ponieważ krok $\Delta^{\widehat{\Omega}}$ jest mniejszy od $\Delta^{\Omega \setminus \widehat{\Omega}}$, odpowiedni dopuszczalny krok czasowy dla siatki gęstej $\Delta_t^{\widehat{\Omega}}$ jest mniejszy niż krok czasowy dla siatki rzadkiej $\Delta_t^{\Omega \setminus \widehat{\Omega}}$. W najprostszym algorytmie wykorzystującym siatki różnej gęstości (równania (6.46) i (6.47)), krok czasowy musi być określony przez najgęstszą siatkę [58, 60, 80]. W rozważanym przypadku będzie zatem wynosił $\Delta_t = \min(\Delta_t^{\Omega \setminus \widehat{\Omega}}, \Delta_t^{\widehat{\Omega}}) = \Delta_t^{\widehat{\Omega}}$.

Iteracje z różnymi krokami czasowymi w wydzielonych podprzestrzeniach

Alternatywnym sposobem iteracji FDTD uwzględniającym poddziedzinę ze zmniejszonym krokiem dyskretyzacji przestrzeni jest zastosowanie dwóch różnych kroków czasowych w $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ [31,58,80]. Metoda ta wykorzystuje fakt, że równania FDTD związane z podprzestrzenią $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ mogą pracować z krokiem Δ_t^{Ω} , podczas, gdy schemat związany z $\hat{\Omega}$ używa r-krotnie mniejszego $\Delta_t^{\hat{\Omega}}$. Dzieląc równania (6.46)-(6.47) na oddzielne schematy iterujące próbki pól z podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ otrzymuje się:

$$\mathbf{h}^{\prime \tau+0.5} = \mathbf{h}^{\prime \tau-0.5} - \Delta_t \mathbf{D}^{\prime-1}_{\mu} \mathbf{R}^{\prime}_E \mathbf{e}^{\prime \tau}$$
(6.48)

$$\mathbf{e}^{\prime \tau+1} = \mathbf{e}^{\prime \tau} + \Delta_t \mathbf{D}_{\varepsilon}^{\prime-1} \Big(\mathbf{R}_H^{\prime} \mathbf{h}^{\prime \tau+0.5} + \underbrace{\mathbf{S}_H \widehat{\mathbf{h}}}_{\mathbf{h}_{\mu}^{\tau+0.5}} \Big)$$
(6.49)

$$\widehat{\mathbf{h}}^{\tau+0.5} = \widehat{\mathbf{h}}^{\tau-0.5} - \Delta_t \widehat{\mathbf{D}}_{\mu}^{-1} \Big(\underbrace{\widehat{\mathbf{S}}_E \mathbf{e}'^{\tau}}_{\widehat{\mathbf{e}}_b^{\tau}} + \widehat{\mathbf{R}}_E \widehat{\mathbf{e}}^{\tau} \Big)$$
(6.50)

$$\widehat{\mathbf{e}}^{\tau+1} = \widehat{\mathbf{e}}^{\tau} + \Delta_t \widehat{\mathbf{D}}_{\varepsilon}^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_H \widehat{\mathbf{h}}^{\tau+0.5}$$
(6.51)

Zakładając, że w (6.48)-(6.49) $\Delta_t = \Delta_t^{\Omega}$, a w (6.50)-(6.51) użyty krok czasowy wynosi $\Delta_t = \Delta_t^{\widehat{\Omega}}$, możliwe staje się zapisanie następującego algorytmu:

- 1. dodaj pobudzenie i zastosuj warunki brzegowe
- 2. z równania (6.49) przy kroku $\Delta_t=\Delta_t^\Omega$ wyznacz wektor próbek pola elektrycznego w $\Omega\backslash\widehat\Omega$
- 3. z równania (6.48) przy kroku $\Delta_t=\Delta_t^\Omega$ wyznacz wektor próbek pola magnetycznego w $\Omega\backslash\widehat\Omega$

 $^{^{3}\}mathrm{W}$ prezentowanych w niniejszej rozprawie przykładach przyjmuje się, że współczynnik zagęszczenia jest liczbą nieparzystą, a więc wynosi 3, 5, 7, 9,... itd.



Rysunek 6.2: Subgridding działający z jednym krokiem dyskretyzacji osi czasu. Próbki siatki rzadkiej $(\Omega \setminus \hat{\Omega})$ i gęstej $(\hat{\Omega})$ uaktualniane są synchronicznie. Gruba jasnoszara linia oznacza sprzężenie próbek *pobudzenia* z podprzestrzenią $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ oraz próbek *odpowiedzi* z $\hat{\Omega}$.



Rysunek 6.3: Subgridding działający z osobnym krokiem Δ_t dla siatki rzadkiej podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i siatki gęstej $\hat{\Omega}$, przy r = 3. W trakcie każdej pełnej iteracji próbek siatki rzadkiej wykonuje się trzy iteracje dla próbek siatki gęstej, w trakcie których używa się jednej wartości pobudzenia.

- 4. przeprowadź r razy:
 - (a) z równania (6.51) przy kroku $\Delta_t = \Delta_t^{\widehat{\Omega}}$ wyznacz wektor próbek pola elektrycznego w $\widehat{\Omega}$
 - (b) z równania (6.50) przy kroku $\Delta_t = \Delta_t^{\widehat{\Omega}}$ wyznacz wektor próbek pola magnetycznego w $\widehat{\Omega}$

W trakcie każdej iteracji równań poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ wykonywane jest r iteracji związanych z podprzestrzenią $\hat{\Omega}$ przy założonej stałej wartości wektora brzegowego $\hat{\mathbf{e}}_b^{\tau} = \hat{\mathbf{S}}_E \mathbf{e}^{\prime \tau}$ zawierającego brzegowe wartości próbek pól dla $\hat{\Omega}$ (patrz podrozdział 3.1 i zależności (3.7)-(3.9)). Po przeprowadzeniu r iteracji równań podprzestrzeni $\hat{\Omega}$, z próbek pól $\hat{\mathbf{h}}^{\tau+0.5}$ otrzymuje się wektor $\mathbf{h}_b^{\tau+0.5} = \mathbf{S}_H \hat{\mathbf{h}}^{\tau+0.5}$ z warunkami brzegowymi dla poddziedziny $\Omega \setminus \hat{\Omega}$. Porównanie *subgriddingu* działającego z jednym krokiem dyskretyzacji osi czasu oraz schematu wykorzystującego osobny krok Δ_t dla siatki rzadkiej i gestej przedstawiono na rys. 6.2 i 6.3.

Powstały algorytm umożliwia znaczne przyśpieszenie pracy algorytmu FDTD, w którym w Ω wydzielono podprzestrzeń $\hat{\Omega}$ o mniejszym kroku dyskretyzacji przestrzeni, w stosunku

do schematu pracującego z tym samym krokiem Δ_t . Niestety wadą tego podejścia jest brak kontroli nad stabilnościa schematu. Do tej pory brak jest spójnej teorii stabilności tego typu algorytmów. Niektórzy autorzy posługują się heurystyką skracając obydwa kroki czasowe [84,85]. Z tego powodu równie często używa się dwóch różnych kroków dyskteryzacji w celu przyśpieszenia obliczeń uzyskiwanych metodą *FDTD* [58,80], jak i wolniejszego lecz stabilnego algorytmu bazującego na jednym kroku dyskretyzacji osi czasu [60].

6.3.2 Schemat FDTD zawierający makromodele

Podobnie jak w przypadku algorytmu FDTD o lokalnie zmniejszonym kroku dyskretyzacji przestrzeni, schemat FDTD zawierający makromodele można przyśpieszyć stosując różne kroki dyskretyzacji osi czasu dla iteracyjnych równań podprzestrzeni Ω i makromodelu. Zasadniczą zaletą jest tu fakt, że niezależnie od współczynnika zagęszczenia r krok dyskretyzacji osi czasu makromodelu jest zwykle jedynie 2 – 3 razy mniejszy [14,39], niż krok czasowy związany z warunkiem Couranta dla siatki rzadkiej.

Zakładając, że krok dyskretyzacji osi czasu dla równań podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ wynosi Δ_t^{Ω} , a poddziedzina $\hat{\Omega}$, której równania różnicowe będą redukowane, jest zagęszczona r krotnie, można wyznaczyć krok czasowy Δ_t^m algorytmu FDTD z włączonym makromodelem. Wykorzystując stosunek $\Delta_t^{\Omega}/\Delta_t^m$ określający skrócenie kroku czasowego w schemacie FDTD z makromodelem w stosunku do oryginalnej metody FDTD zapisać można nowy algorytm, w którym użyte są dwa kroki dyskretyzacji osi czasu. Oznaczając przez r_m zaokrągloną w górę wartości $\Delta_t^{\Omega}/\Delta_t^m$, uzyskuje się następujący schemat (patrz podrozdział 6.2.2):

- 1. dodaj pobudzenie i zastosuj warunki brzegowe
- 2. z równań (6.21) i (6.22) dla $\Delta_t = \Delta_t^\Omega$ wyznacz wektor próbek pola elektrycznego w $\Omega \backslash \hat{\Omega}$
- 3. przyjmując $\Delta_t=\Delta_t^\Omega$ z (6.23) wyznacz wektor próbek pola magnetycznego w $\Omega\backslash\widehat\Omega$
- 4. wyznacz pobudzenie makromodelu przy użyciu (6.24)
- 5. oblic
z r_m razy kolejne wektory próbek pola magnetycznego w
 $\widehat{\Omega}$ wykorzystując równanie (6.20) pracujące z krokiem czasowy
m Δ_t/r_m
- 6. z zależności (6.25) wyznac
zodpowiedź makromodeluużywając ostatniego uzyskanego w poprzednim punkcie wektor
a $\hat{\mathbf{h}}_m^{\tau+0.5}$

Podobnie jak w poprzednim przypadku w powyższym algorytmie pojawi się problem stabilności, która bez spójnej teorii nie może być kontrolowana. Jednak w tym przypadku znacznie mniejsze dysproporcje pomiędzy krokami dyskretyzacji osi czasu sprawiają, że w przypadku wielu zagnieżdżonych i zwielokrotnionych *makromodeli* praca z jednakowym krokiem Δ_t nie jest kosztowna obliczeniowo.

Rozdział 7

Testy numeryczne

Wprowadzona w niniejszej rozprawie metodologia włączania technik redukcji rzędu modelu do schematów *FDTD* i *FDFD* zakłada zwiększenie ich efektywności poprzez wykorzystanie zagnieżdżonych i zwielokrotnionych *makromodeli*. Aby testy numeryczne pozwoliły przeanalizować każdy aspekt związany z używaniem *makromodeli* dobrano odpowiedni zestaw zestaw struktur testowych, których analiza standardowymi metodami różnicowymi napotyka trudności.

W pierwszej kolejności zweryfikowane zostaną trzy przedstawione w niniejszej rozprawie schematy *subgriddingu*, a następnie przeprowadzone zostaną testy porównawcze obejmujące standardowy algorytm *FD*, *subgridding* oraz pojedyncze, zwielokrotnione i zagnieżdżone *makromodele*. Warto przy tym zaznaczyć, że w celu uzyskania wiarygodnego porównania analizowanych metod, podczas analizy czasowej stosowano algorytmy estymacji widma na podstawie ograniczonej liczby próbek z iteracji *FDTD* [30], zaś podczas analizy częstotliwościowej używano algorytmu *Jacobiego-Davidsona* [2] pozwalającego na szybkie obliczenie kilku pierwszych wartości własnych.

7.1 Porównanie schematów sprzegania poddziedzin

W trakcie łączenia poddziedzin, których siatki Yee mają różną gęstość, konieczne jest określenie sposobu interpolacji próbek pól na granicy pomiędzy nimi. Próbki pola \vec{E} , stanowiące pobudzenie, sprzęgane są z próbkami pola magnetycznego poddziedziny $\hat{\Omega}$. Z kolei z próbek pola \vec{H} z podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ uzyskuje się odpowiedź będącą warunkiem brzegowym dla podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ na granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$. Prawidłowo działający algorytm sprzęgania próbek pól poddziedzin $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ jest transparentny dla fal rozchodzących się w dyskretnej przestrzeni obliczeniowej. Im mniejszy jest poziom odbić od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$, tym większa dokładność jest możliwa do osiągnięcia stosując subgridding czy makromodele. W praktyce całkowite wyeliminowanie odbić od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ nie jest możliwe, gdyż odbicia spowodowane są, na skutek różnic w prędkościach fazowych, już samą różnicą w krokach dyskretyzacji sprzęganych podprzestrzeni.

Ponieważ poziom odbić od granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$ zależy od kąta pod jakim pada na nią fala elektromagnetyczna propagująca się w siatce Yee, dla każdej z przedstawionych w pracy metod sprzęgania podprzestrzeni przeprowadzone zostaną dwa testy – badanie współczynnika odbicia w linii płaskorównoległej (LP) oraz w falowodzie prostokątnym (FP). W każdym z testów zagęszczona poddziedzina umieszczona będzie symetrycznie wewnątrz badanej prowadnicy. Przeprowadzane badania uwzględniać będą trzy, przedstawione w rozdziale 4 niniejszej rozprawy, algorytmy sprzęgania poddziedzin:

- stabilny (ST),
- niskoodbiciowy (NO),
- stabilny o zwiększonej dokładności (STD).

Uwzględnione zostaną ich implementacje zarówno w schematach dwuwymiarowych (polaryzacja TE i TM), jak i w schemacie trójwymiarowym. Dodatkowo, przeprowadzone zostały numeryczne badania stabilności wybranych technik.

7.1.1 Dwuwymiarowy algorytm różnicowy - polaryzacja TE

Badanie metod sprzęgania podprzestrzeni w dwuwymiarowym schemacie różnicowym dla polaryzacji *TE* (rys. 2.10) przeprowadzone zostało w oparciu o linię płaskorównoległą. Szerokość LP zdyskretyzowanej z krokiem $\Delta = 0.25mm$ wynosi 5mm, zaś jej długość 25mm. Obszar o wymiarach $2.5mm \times 2.5mm$ umieszczony centralnie wewnątrz linii zagęszczono *r*-krotnie. Poniżej na rys. 7.1 przedstawiono moduł współczynniki odbicia dla każdego z rozważanych schematów. Jak łatwo zauważyć największej dokładności można oczekiwać od schematu niskoodbiciowego, w którym $|\Gamma|$ nie przekracza -40dB, nawet na częstotliwości 120 GHz ($\frac{\lambda}{\Delta} \approx 10$) stanowiącej umowną granicę dokładności schematów różnicowych.

Dla schematu stabilnego zaproponowanego w [81] i [31] moduł współczynnika odbicia $|\Gamma|$ przekracza -30dB powyżej częstotliwości 47 GHz ($\frac{\lambda}{\Delta} \approx 25$), lecz wraz ze zwiększaniem zagęszczenia granica ta się przesuwa (rys. 7.2). W przypadku schematu stabilnego o poprawionej dokładności (algorytm STD), można zaobserwować $|\Gamma|$ mniejszy niż -30dB w całym rozważanym pasmie częstotliwości, dla każdego współczynnika zagęszczenia r (rys. 7.3). Dodatkowo, $|\Gamma|$ wzrasta ponad -40dB dopiero powyżej częstotliwości 80 GHz ($\frac{\lambda}{\Delta} \approx 15$).

Zmiana współczynnika zagęszczenia lokalnej siatki w przypadku schematu niskoodbiciowego nie wpływa na charakterystykę $|\Gamma|$ przedstawioną na rys. 7.1. Odmienne zachowanie można zaobserwować dla schematu stabilnego (rys. 7.2), dla którego na skutek zwiększającego się błędu dyslokacji zwiększa się poziom odbić. Z kolei poprawa dokładności, jaką przynosi schemat STD, wiąże się z redukcją błędu dyslokacji. Świadczy o tym niewielka zmiana charakterystyki odbiciowej wraz ze wzrostem współczynnika zagęszczenia (rys. 7.3)



Rysunek 7.1: Moduł współczynnika odbicia od lokalnie zagęszczonej siatki Yee (r = 3) dla dwuwymiarowego algorytmu różnicowego o polaryzacji TE (patrz opis w tekście).



Rysunek 7.2: Moduł współczynnika odbicia dla rosnącego zagęszczenia w *subgriddingu* wykorzystującego schemat stabilny z [81] i [31] (patrz opis w tekście).



Rysunek 7.3: Moduł współczynnika odbicia przy rosnącym współczynnika zagęszczenia dla schematu STD (patrz opis w tekście).

7.1.2 Dwuwymiarowy algorytm różnicowy - polaryzacja TM

Strukturą testową w przypadku dwuwymiarowego algorytmu różnicowego o polaryzacji *TM* jest falowód prostokątny (FP) o szerokości 5mm i długości 25mm. Przestrzeń dwuwymiarowa została zdyskretyzowana z krokiem $\Delta = 0.25mm$. Następnie centralnie położony obszar o wymiarach $2.5mm \times 2.5mm$ pokryto siatką z krokiem dyskretyzacji $\frac{\Delta}{r}$. Wyniki analizy numerycznej przeprowadzonej dla trzech schematów sprzęgania podprzestrzeni pokazano na rys. 7.4. Także i w tym przypadku najmniejsze współczynniki odbicia osiągane są dla schematu NO, które do 90 GHz ($\frac{\lambda}{\Delta} \approx 16$) nie przekraczają -50dB, podczas gdy Weilandowski [81] schemat stabilny charakteryzuje się znacznymi (-20dB) odbiciami od granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$. Nowy algorytm STD, znacznie poprawia dokładność subgriddingu, nawet dla r > 3 (rys. 7.5 i 7.6).

Jak łatwo zaobserwować, w przypadku polaryzacji TM poziom odbić jest wyższy, niż dla *subgriddingu* w dwuwymiarowym schemacie różnicowym o polaryzacji TE. Powodem tego jest zarówno inny rozkład rodzaju podstawowego w poprzek każdej prowadnic jak i kąt padania fali elektromagnetycznej propagującej się w siatce Yee. Dla linii płaskorównoległej kąt padania wynosi 0°, zaś dla fali elektromagnetycznej w FP zmienia się w zakresie 0°-90°.



Rysunek 7.4: Moduł współczynnika odbicia od poddziedziny zagęszczonej trzykrotnie umieszczonej w falowodzie prostokątnym analizowanym za pomocą dwuwymiarowego schematu różnicowego o polaryzacji TM (patrz opis w tekście).



Rysunek 7.5: Współczynnik odbicia dla rosnącego zagęszczenia w *subgriddingu* wykorzystującego schemat stabilny Weilanda (patrz opis w tekście).



Rysunek 7.6: Współczynnik odbicia przy rosnącym współczynnika zagęszczenia dla schematu STD (patrz opis w tekście).

7.1.3 Trójwymiarowy algorytm różnicowy

Ze względu na swoje ogromne praktyczne zastosowanie, testy schematów sprzęgania podprzestrzeni dla trójwymiarowego subgriddingu mają największe znaczenie. Aby prawidłowo ocenić jakość prezentowanych algorytmów, przeprowadzone badania uwzględniają wyniki uzyskane przez Okoniewskiego [58], gdzie wysoką dokładność dla współczynnika zagęszczenia r = 2 uzyskano poprzez interpolację pól na granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ wykorzystującą funkcje sklejane. Algorytm ten jest jednak dużo bardziej złożony, i co więcej niestabilny, tak więc nie nadaje się do wykorzystania w komercyjnym oprogramowaniu.

Testy w linii płaskorównoległej

Pierwszy z testów przeprowadzany jest w linii płaskorównoległej w wymiarach poprzecznych 15mm × 10mm, która pokryta została siatką Yee. Krok dyskretyzacji w kierunku poprzecznym wynosi $\Delta_x = \Delta_y = 1mm$, zaś w kierunku propagacji $\Delta_z = 2mm$, co oznacza, że długość fali spełniać będzie warunek ($\frac{\lambda}{\Delta} = 10$) na częstotliwości 15 GHz. W takiej strukturze umieszczono centralnie, zagęszczoną *r*-krotnie, podprzestrzeń $\hat{\Omega}$ o wymiarach $8mm \times 4mm \times 10mm$. Wyniki przedstawione na rys. 7.7 pokazują, że dla niskoodbiciowego (niestabilnego) algorytmu z prostą interpolacją liniową wartość współczynnika odbicia nie przekracza -60dB dla częstotliwości poniżej 15 GHz, przy czym obserwuje się jedynie nieznaczne zmiany przy wzroście *r*. Otrzymane rezultaty są porównywalne z wynikami uzyskanymi w [58] dla dwukrotnego zagęszczenia wydzielonej poddziedziny i bardziej złożonej interpolacji wykorzystującej funkcje sklejane.

Porównanie trzech przedstawionych w niniejszej rozprawie schematów sprzęgania poddziedzin widoczne jest na rys. 7.8. Zastosowanie schematu schematu stabilnego o poprawionej dokładności pozwala osiągnąć współczynnik odbicia na poziomie -40dB w całym



Rysunek 7.7: Porównanie współczynników odbicia w lini płaskorównoleg
łej dla subgriddingu wykorzystującego schemat nisko
odbiciowy (różne wartości r) ze schematami zaproponowanymi w [58] (jako odniesienie).



Rysunek 7.8: Współczynniki odbicia uzyskane w lini płaskorównoległej dla schematów sprzęgania poddziedzin: niskoodbiciowego, stabilnego i stabilnego o poprawionej dokładności.

rozważanym pasmie częstotliwości. Różnica w poziomie współczynnika odbicia od granicy $\Omega \setminus \hat{\Omega} - \hat{\Omega}$ pomiędzy algorytmem STD a standardowym schematem wynosi około 10dB, przyczym różnica ta powiększa się ze wzrostem częstottliwości.

Testy w falowodzie prostokątnym

Drugi test wykorzystuje falowód prostokątny o wymiarach poprzecznych $20mm \times 7mm$. Krok dyskretyzacji przestrzeni jest w tym przypadku identyczny jak dla linii płaskorównoległej i wynosi $\Delta_x = \Delta_y = 1mm$ w kierunku poprzecznym i $\Delta_z = 2mm$ wzdłuż osi propagacji. Warunek graniczny związany z dokładnością metod różnicowych ($\frac{\lambda}{\Delta} = 10$) spełniony będzie tym razem na częstotliwości 19 GHz. W tak zdefiniowanej przestrzeni obliczeniowej umieszczono centralnie zagęszczoną *r*-krotnie podprzestrzeń $\hat{\Omega}$ o wymiarach $16mm \times 3mm \times 40mm$.

Rysunek 7.9 przedstawia niestabilnego niskoodbiciowego algorytmu (NO) opartego na interpolacji liniowej z niestabilnym algorytmem z funkcjami sklejanymi. Analizując współczynnik odbicia przedstawiony na rys. 7.9 łatwo zauważyć, że poniżej 19 GHz jego wartości nie przekraczają -47dB, a zmiany związane ze wzrostem r są nieznaczne. Wyższe niż w lini płaskorównoległej odbicia związane są ze zmianą rozkładów pól w kierunku poprzecz-



Rysunek 7.9: Porównanie współczynników odbicia dla rodzaju TE_{10} w falowodzie prostokątnym dla *subgriddingu* wykorzystującego schemat niskoodbiciowy (różne wartości r) ze schematami zaproponowanymi w [58] (jako odniesienie).



Rysunek 7.10: Współczynniki odbicia uzyskane w falowodzie prostokątnym przy propagacji rodzaju TE_{10} dla trzech schematów sprzęgania pól na granicy poddziedzin pokrytych siatką o róznej gęstości: niskoodbiciowego, stabilnego [31, 81] i stabilnego o poprawionej dokładności.

nym, jednak pomimo tego są one porównywalne z odbiciami występującymi w [58] dla dwukrotnego zagęszczenia wydzielonej poddziedziny i interpolacji wykorzystującej funkcje gładkie.

Zastosowanie schematu schematu stabilnego o poprawionej dokładności, podobnie jak w poprzednim przypadku, prowadzi do dużo niższych, niż w oryginalnym algorytmie stabilnym Weilanda (rys. 7.8), poziomów odbić od granicy $\Omega \setminus \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}$. Tym razem współczynnik odbicia schematu STD nie przekracza -30dB w całym rozważanym pasmie częstotliwości.

Numeryczne testy stabilności

Aby zweryfikować stabilność wprowadzonego w niniejszej pracy stabilnego subgriddingu o poprawionej dokładności, przeprowadzono analizę numeryczną rezonatora prostokątnego z cienkim przewodem (rys. 7.11). Przestrzeń obliczeniową zdyskretyzowano z krokiem $\Delta = 1mm$, a lokalnie zagęszczona poddziedzina o wymiarach $2\Delta \times 2\Delta \times 2\Delta$ obejmuje ostrze cienkiego doskonale przewodzącego metalu. W tak zdefiniowanej strukturze testowej w okolicy ostrza przewodu wzbudzi się szeroka gama wyższych rodzajów. Bliskie umieszczenie



Rysunek 7.11: Rezonator prostokątny z cienkim metalowym przewodem. Środek lokalnie zagęszczone siatki Yee o wymiarach $2\Delta \times 2\Delta \times 2\Delta$ pokrywa się z końcem przewodu.

ścianek zagęszczanej objętości powoduje, że interpolacji podlegać będą próbki związane z silnie zmiennymi rozkładami pól. Jeżeli schemat interpolacyjny jest niestabilny, to fakt ten powinien ujawnić się w trakcie symulacji prowadzonych metodą *FDTD* przez wzrost energii sygnałów w funkcji czasu.

Dla trzykrotnego zagęszczenia lokalnej podprzestrzeni pokazanej na rys. 7.11 przeprowadzono testy numeryczne polegające na długotrwałej analizie rezonatora metodą *FDTD*. W każdym z testów posłużono się jednym z trzech zaprezentowanych w rozdziale 4 rozprawy schematów interpolacyjnych. Iteracje prowadzono stosując identyczny krok czasowy w całej przestrzeni obliczeniowej. Wyniki analizy przedstawiono na rys. 7.12 i 7.13.

Zgodnie z teorią, schematy oryginalny Weilandowski (ST) i zmodyfikowany o wyższej dokładności (STD) nie wykazują żadnych oznak narastania sygnału po przeprowadzeniu 1800000 iteracji. Schemat niskoodbiciowy jest zgodnie z przewidywaniami niestabilny, przy czym efekt niestabilności uwidacznia się już po 1500 iteracjach.

7.2 Analiza dwuwymiarowych struktur elektromagnetycznych przy wykorzystaniu *makromodeli*

Dwuwymiarowe problemy elektromagnetyczne pozwalają w prosty sposób porównać standardowe algorytmy różnicowe z analizą wykorzystującą *makromodele* zagnieżdżone i zwielokrotnione. Jako struktury testowe wybrano układy z cienkimi doskonale przewodzącymi przesłonami. Na krawędzi płaszczyzn przewodzących występują osobliwości [25,51] niektórych składowych pola elektromagnetycznego, co powoduje, że błąd aproksymacji pochod-



Rysunek 7.12: Wartość zarejestrowanej próbki pola elektrycznego dla niestabilnego niskoodbiciowego schematu interpolacyjnego.



Rysunek 7.13: Wartość zarejestrowanej próbki pola elektrycznego dla stabilnych schematów interpolacyjnych (algorytmy ST i STD).

nych ilorazem różnicowym jest duży.

Często proponowanym w takiej sytuacji podejściem pozwalającym uzyskać satysfakcjonującą dokładność symulacji jest użycie rzadkiej siatki z dala od krawędzi i zastosowanie wyrażeń analitycznych w pobliżu [7,25,51,67]. Daje to bardzo dobre rezultaty [7,25], jednak kosztem ogólności i elastyczności algorytmu. Celowe wydaje się poszukiwanie technik podwyższania dokładności przy zachowaniu ogólności. W tym kontekście warto zauważyć, że standardowy algorytm różnic skończonych może również zostać użyty o ile stosuje się gęstą siatkę. Ponieważ wysoka rozdzielczość siatki potrzebna jest jedynie w pobliżu krawędzi, wyrażenie analityczne można zastąpić *makromodelami* lub algorytmem *subgriddingu*. Te trzy podejścia, niewymagające określenia żadnych związków analitycznych opisujących osobliwość i zachowujące prostotę i ogólność wyjściowego sformułowania różnicowego z siatką Yee, zostaną porównane na podstawie wyników symulacji rezonatorów i filtrów falowodowych.

7.2.1 Rezonator z pojedynczą cienką przesłoną metalową

Rezonator z pojedynczą przesłoną metalową przedstawiony na rys. 7.14 analizowany w dziedzinie częstotliwości pozwala porównać wyniki uzyskiwane algorytmem *FDFD* w przypadku oryginalnej implementacji, lokalnego zagęszczenia siatki Yee oraz zastosowania *makromodelu*. Na przykładzie tej struktury możliwa będzie również weryfikacja dwóch sposobów włączania *makromodelu* opisanych w podrozdziale 5.3: bezpośrednio do równań różnicowych oraz poprzez projekcję części operatora globalnego.

Zakładając jednorodność pól wzdłuż kierunku z i polaryzację TE otrzymuje się dwuwymiarowe zagadnienie elektromagnetyczne opisane równaniem siatkowym (2.101)-(2.102). Przedstawiona na rys. 7.15 siatka Yee pokrywająca rozważany rezonator w płaszczyźnie XY


Rysunek 7.14: Rezonator z pojedynczą symetrycznie umieszczoną cienką metalową przesłoną.



Rysunek 7.15: Siatka Yee przestrzeni obliczeniowej Ω dla $\Delta = 0.5mm$. Składowe E_x, E_y rozważanych rodzajów TE ułożone są wzdłuż linii siatki.

składa się z N = 143 węzłów siatki pola elektrycznego (I = 11, J = 13). Oznacza to, że krok dyskretyzacji przestrzeni obliczeniowej wynosi $\Delta = 0.5mm$.

Wykorzystując dyskretne równania Maxwella zapisane dla przestrzeni Ω można łatwo skonstruować odpowiedni problem własny. Rozmiar macierzy problemu różnicowego drugiego rzędu sformułowanego ze względu na pole H_z przy $\Delta = 0.5mm$ wynosi 120×120 . Do jego rozwiązania użyty został iteracyjny algorytm Jacobiego-Davidsona [2]. Extrapolowane wartości częstotliwości rezonansowych rodzajów nieparzystych (TE_o) i parzystych (TE_e) uzyskane w [67] zestawiono w tab. 7.1.

Ze względu na symetrię (ścianka elektryczna wzdłuż cienkiej przesłony), częstotliwości rezonansowe rodzajów nieparzystych TE_{o1} - TE_{o4} są identyczne jak w przypadku pustego rezonatora prostokątnego. Dla rodzajów parzystych TE_{e1} - TE_{e4} , nieskonczenie cienka przesłona o długości 2mm powoduje powstanie osobliwości jednej składowej pola elektrycznego w okolicy krawędzi. Jest to źródłem znacznych błędów w analizie różnicowej przy niedo-

Tabela 7.1: Zestawienie ekstrapolowanych wartości częstotliwości rezonansowych rezonatora prostokątnego z pojedynczą cienką przesłoną metalową [67] (patrz rys. 7.14).

rodzaj	TE_{e1}	TE_{o1}	TE_{e2}	TE_{o2}	TE_{e3}	TE_{o3}	TE_{o4}	TE_{e4}
f [GHz]	19.6686	30.0000	35.6614	50.0000	56.3326	58.3095	60.0000	65.1046

statecznie gęstej siatce Yee.

Najprostszym sposobem poprawy dokładności jest zagęszczanie przestrzeni Ω (zagęszczenie dyskretnej siatki problemu), co pozwoli zwiększyć dokładność odwzorowania rozkładów pola w całej przestrzeni, a więc również wokół przesłony. Wpływ zagęszczania siatki Yee na dokładność analizy metodą *FDFD* przedstawia tab. 7.2, przy czym bazowy krok dyskretyzacji przestrzeni (dla r = 1) wynosi w tym przypadku $\Delta = 0.1mm$.

Zagęszczanie przestrzeni Ω zmniejsza błąd związany z nieliniowością rozwiązania w okolicy krawędzi przesłony. Dane zawarte w tabeli potwierdzają ten fakt: względny błąd wyznaczania częstotliwości rezonansowej rodzaju TE_{e1} maleje od 0.78 do 0.09. Niestety zagęszczanie wiąże się również z silnym wzrostem liczby zmiennych stanu (z kwadratem współczynnika zagęszczenia r) oraz normy macierzy. Wzrost normy oznacza pogorszenie zbieżności iteracyjnego algorytmu Jacobiego-Davidsona. Zgodnie z teorią iteracyjnych schematów rozwiązywania wielkich układów równań liniowych [2, 73], zbieżność algorytmu iteracyjnego uzależniona jest od relacji pomiędzy największą i najmniejszą wartością własną. Zagęszczenie siatki powoduje, że rośnie norma związana z największą wartością własną, podczas gdy najmniejsza wartość własna zmienia się nieznacznie. W konsekwencji dla gęstej siatki algorytm Jacobiego-Davidsona wymaga większej liczby iteracji do osiągnięcia założonej dokładności.

Tabela 7.2: Porównanie rozmiaru problemu (N), liczby iteracji (iter) potrzebnych do uzyskania rozwiązania problemu własnego, normy operatora (norma) oraz względnych błędów częstotliwości rezonansowej (err) rodzaju TE_{e1} w zależności od współczynnika zagęszczenia siatki przestrzeni Ω dla przypadku standardowego zagadnienia różnicowego (FDFD). Dla r = 1 krok dyskretyzacji wynosi $\Delta = 0.1mm$.

r	N	iter	err[%]	norma
1	3000	447	0.78	$7.2 \cdot 10^{25}$
3	27000	2140	0.26	$6.5\cdot10^{26}$
5	75000	2918	0.16	$1.8\cdot 10^{27}$
7	147000	3542	0.11	$3.5\cdot10^{27}$
9	243000	4159	0.09	$5.8\cdot10^{27}$



Rysunek 7.16: Lokalnie zagęszczona siatka przestrzeni Ω umiejscowiona wokół krawędzi cienkiej metalowej przesłony. Obok fragment podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ z włączoną poddziedziną $\hat{\Omega}$ ukazujący proporcje siatek dla współczynnika zagęszczenia r równego 3 i 9. Bazowy krok dyskretyzacji przestrzeni wynosi $\Delta = 0.5mm$.

7.2.2 Poprawienie dokładności metody *FDFD* poprzez lokalne zagęszczenie siatki

Ponieważ w rozważanym przykładzie błędy związane są przede wszystkim z silnie nieliniową zmiennością pól w okolicy krawędzi przesłony, poprawę dokładności można uzyskać stosując algorytm lokalnego zagęszczenia siatki Yee znany w literaturze jako subgridding¹. Usuwając obszar o wymiarach $2\Delta \times 2\Delta$ w przestrzeni Ω zdyskretyzowanej z krokiem $\Delta = 0.1mm$, którego środkiem jest krawędź przesłony i wstawiając zamiast niego zagęszczoną przestrzeń $\hat{\Omega}$ uzyskuje się lokalnie zagęszczoną siatkę Yee. Przykład takiego zagęszczenia dla rzadszej siatki bazowej przedstawiono na rys. 7.16.

Następnie, posługując się techniką przedstawioną w podrozdziale 6.1.1, z operatorów globalnych zawierających *makromodel* utworzono problem własny o postaci danej równaniem (6.4). Macierze sprzężeń $\hat{\mathbf{S}}_E$, \mathbf{S}_H zbudowano w oparciu o niskoodbiciowy algorytm interpolacji (podrozdział 4.2). Wyniki analizy problemu własnego, przedstawiono w tab. 7.3.

Lokalne zagęszczenie siatki Yee przestrzeni Ω poprawia dokładność analizy nie powodując przy tym tak znacznego, jak przy zagęszczanu całej przestrzeni Ω , przyrostu liczby zmiennych. Dla *subgriddingu* obszaru $2\Delta \times 2\Delta$ usuwane są cztery próbki składowej H_z pola magnetycznego znajdujące się wewnątrz, a w ich miejsce trafia 4^{r.r} zmiennych stanu

 $^{^{1}}Subgridding$ najczęściej stosowany jest dla schematów czasowych, lecz oczywiście można go również użyć w sformułowaniu częstotliwościowym.

Tabela 7.3: Rozmiar problemu (N), liczba iteracji (*iter*) potrzebnych do uzyskania rozwiązania problemu własnego, norma operatora (*norma*) oraz względny błąd częstotliwości rezonansowej (*err*) rodzaju TE_{e1} względem współczynnika zagęszczenia siatki r - porównanie standardowego algorytmu *FDFD* oraz schematu *FDFD* z lokalnie zagęszczoną siatką Yee. Dla r = 1 krok dyskretyzacji wynosi $\Delta = 0.1mm$.

		DFD		$FDFD_{subgr.}$				
r	N	iter	err[%]	norma	N	iter	err[%]	norma
1	3000	447	0.78	$7.2 \cdot 10^{25}$	3000	447	0.78	$7.2 \cdot 10^{25}$
3	27000	2140	0.26	$6.5\cdot10^{26}$	3032	1073	0.28	$4.8\cdot10^{26}$
5	75000	2918	0.16	$1.8 \cdot 10^{27}$	3096	1577	0.17	$1.6 \cdot 10^{27}$
7	147000	3542	0.11	$3.5\cdot10^{27}$	3192	2421	0.13	$3.4\cdot10^{27}$
9	243000	4159	0.09	$5.8\cdot10^{27}$	3320	3629	0.10	$5.6\cdot10^{27}$

zagęszczonej podprzestrzeni $\hat{\Omega}$. Podczas lokalnego zagęszczania siatki Yee uzyskuje się więc algorytm, w którym dla problemów dwuwymiarowych liczba zmiennych stanu wewnątrz $\hat{\Omega}$ rośnie z kwadratem współczynnika zagęszczenia.

Pomimo, że liczba zmiennych w algorytmie FDFD wykorzystującym lokalnie zagęszczoną siatkę została ograniczona w stosunku do oryginalnego sformułowania FDFD, podobnie jak poprzednio obserwuje się znaczne pogorszenie zbieżności iteracyjnego algorytmu Jacobiego – Davidsona. Choć dla trzykrotnego zagęszczenia podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ liczba zmiennych stanu problemu wzrosła jedynie o 32, w celu uzyskania wyniku przeprowadzono dwa razy więcej iteracji. Powodem tego jest wzrost normy operatorów spowodowany gęstą siatką w podprzestrzeni $\hat{\Omega}$. Zagęszczając podprzestrzeń r-krotnie uzyskuje się r^2 -krotny wzrost normy, co jest przyczyną szybkiego wzrostu liczby iteracji w schemacie FDFD. Połączenie w operatorach globalnych równań stanu podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ z podprzestrzenią $\hat{\Omega}$ powoduje, że sumaryczna norma problemu dyskretnego z lokalnie zagęszczoną poddziedziną jest bliższa większej z norm, co powoduje z kolei wzrost liczby iteracji w algorytmie Jacobiego-Davidsona.

7.2.3 Analiza FDFD wykorzystująca makromodele

Metody poprawy dokładności obliczeń poprzez zagęszczanie całej siatki Yee, bądź tylko jej fragmentu posiadają dwa zasadnicze ograniczenia. Pierwszym z nich jest rosnąca liczba zmiennych. Drugim z ograniczeń jest zależność normy operatorów od współczynnika zagęszczenia r, co wpływa na zbieżność iteracyjnych algorytmów algebry liniowej stosowanych w numerycznym rozwiązywaniu zagadnienia macierzowego powstającego w sformułowaniu *FDFD*, a efekcie znacząco wydłuża czas analizy. W niniejszym podrozdziale pokazane zostanie, że makromodele pozwalają przezwyciężyć powyższe trudności. Szkic procesu włączania makromodelu do analizy *FDFD* rozważanego rezonatora dla rzadszej, niż używana w testach numerycznych, siatki ($\Delta = 0.5mm$) przedstawiono na rys. 7.17.

W przypadku przestrzeni obliczeniowej zdyskrety
zowanej z krokiem $\Delta=0.1mm$ wy-

...



Rysunek 7.17: Etapy włączania makromodelu do siatki Yee dla rezonatora z pojedynczą cienką metalową przesłoną. Podprzestrzeń $\hat{\Omega}$, w której występuje silna nieliniowość pola, jest zagęszczana. Utworzony z otrzymanych równań różnicowych makromodel jest następnie włączany do operatora globalnego. Bazowy krok dyskretyzacji przestrzeni wynosi $\Delta = 0.5mm$.

korzystano makromodel o rzędzie wynoszącym q = 1. Z uwagi na niewielki obszar pokryty siatką o większej gęstości makromodel o tak niskim rzędzie aproksymuje z wystarczającą dokładnością elektromagnetyczną funkcję przejścia $\mathbf{H}(s)$ opisującą interakcję pomiędzy pobudzeniem a odpowiedzią elektromagnetyczną modelowanego obszaru. Wyniki analizy FDFD rezonatora z cienką przesłoną metalową z makromodelem włączonym poprzez redukcję operatora (podrozdział 5.3.2) przedstawiono w tab. 7.4.

Tabela 7.4: Porównanie rozmiaru problemu (N), liczby iteracji (iter), względnych błędów częstotliwości rezonansowej (err) rodzaju TE_{e1} oraz normy (norm) dla przypadku standardowego zagadnienia różnicowego (FDFD), równań FDFD zawierających operatory lokalnie zagęszczonej podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ $(FDFD_{subgr})$ oraz algorytmu FDFD z włączonym makromodelem $(FDFD_{macrom})$ w zależności od współczynnika zagęszczenia siatki r. Dla r = 1 krok dyskretyzacji $\Delta = 0.1mm$.

	F'DF'D		$F'DF'D_{subgr.}$			$F'DF'D_{macrom.}$					
r	N	iter	err[%]	N	iter	err[%]	norm	N	iter	err[%]	norm
1	3000	447	0.78	3000	447	0.78	$7.2 \cdot 10^{25}$	3000	447	0.78	$7.2 \cdot 10^{25}$
3	27000	2140	0.26	3032	1073	0.28	$4.8\cdot10^{26}$	3000	460	0.30	$2.9\cdot10^{26}$
5	75000	2918	0.16	3096	1577	0.17	$1.6 \cdot 10^{27}$	3000	470	0.19	$4.5 \cdot 10^{26}$
7	147000	3542	0.11	3192	2421	0.13	$3.4\cdot10^{27}$	3000	460	0.14	$5.4 \cdot 10^{26}$
9	243000	4159	0.09	3320	3629	0.10	$5.6\cdot10^{27}$	3000	438	0.11	$5.9\cdot10^{26}$

Na podstawie danych zawartych w tabeli można stwierdzić, że *makromodel* zagęszczonej podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ pozwala w znaczny sposób poprawić wyniki analizy metodą *FDFD*. Błąd związany z nieliniowością rozwiązania w okolicy krawędzi przesłony jest redukowany wraz z zagęszczaniem siatki *makromodelu* podobnie jak w przypadku *subgriddingu*, lecz tym razem zagęszczanie nie wiąże się ani z dodatkowym wzrostem liczby zmiennych, ani z pogorszeniem zbieżności iteracyjnego algorytmu *Jacobiego-Davidsona*.

Porównanie technik włączania makromodeli w sformułowaniu FDFD

Zgodnie z dyskusją przedstawioną w podrozdziale 5.3, możliwe są dwa sposoby włączania makromodeli do analizy metodą *FDFD*. Pierwszy ze sposobów, zaproponowany przez *Cangellarisa* dla metody elementów skończonych [97], jest intuicyjny i polega na włączeniu do równań *FDFD* zredukowanej funkcji przejścia $\mathbf{H}_m(s)$ w jawnej postaci (sformułowanie (5.14)). Drugi, wprowadzony w [41], wykorzystuje zależności pomiędzy dyskretnymi operatorami różnicowymi a transmitancją $\mathbf{H}(s)$ pozwalając na włączenie makromodeli w sposób niejawny poprzez projekcję części operatorów różnicowych. Choć obie z metod mogą być stosowane w częstotliwościowym sformułowaniu różnic skończonych, wyniki nie będą identyczne.

Analizując problem włączenia makromodelu do algorytmu FDFD należy zauważyć, że iteracyjne rozwiązywanie zagadnień własnych wymaga jawnego określenia operatorów różnicowych [2]. Jeżeli wartości własne macierzy związane są z częstotliwością, to elementy tej macierzy nie mogą być zależne od częstotliwości. Zgodnie z (5.14) transmitancja $\mathbf{H}_m(s)$ musi więc zostać wyliczona dla ustalonej wartości pulsacji ω . Tak wygenerowany makromodel jest makromodelem statycznym, gdyż opisuje zależności pomiędzy próbkami pól na granicy makromodelu wyłącznie na jednej częstotliwości. Dla porównania sposobu włączania do równań FDFD makromodelu w sposób statyczny (równanie (5.14)) i dynamiczny



Rysunek 7.18: Względny błąd czterech pierwszych częstotliwości rezonansowych rodzajów parzystych rezonatora z cienką przesłoną metalową otrzymanych przy wykorzystaniu *makromodelu* statycznego (po lewej) i dynamicznego (patrz opis w tekście).

(poprzez projekcję części operatora zdefiniowaną równaniami (5.20) i (5.21)) obie metody wykorzystano w problemie przedstawionego na rys. 7.14 i 7.17 (bazowy krok dyskretyzacji $\Delta = 0.5mm$).

Włączenie makromodelu statycznego wymaga wyliczenia macierzy $\mathbf{H}(s)$, a więc niezbędne jest określenie częstotliwości analizy. W rozważanym problemie przyjęto $s = j2\pi f_0$, gdzie $f_0 = 19GHz$ jest przybliżoną wartością częstotliwości rezonansowej uzyskaną z analizy *FDFD* oryginalnego problemu bez zagęszczenia (r = 1). Rezultaty przy obu sposobach włączania makromodeli przedstawiono na rys. 7.18.

Jak łatwo zauważyć analiza przy użyciu makromodelu statycznego pozwala osiągnąć poprawę dokładności jedynie dla pierwszego z rezonansów, którego częstotliwość jest bliska $f_0 = 19GHz$. Włączanie makromodeli poprzez redukcję operatora przynosi poprawę dla każdego z rozważanych rodzajów, a dodatkowo nie wymaga wstępnego określania częstotliwości makromodelu i obliczania $\mathbf{H}(s)$, Z tego powodu podejście to jest dalece bardziej efektywne, niż włączanie makromodeli statycznych.

7.3 Dwuwymiarowy schemat różnicowy wykorzystujący *makromodele* zagnieżdżone

Opracowanie metodologii włączania *makromodeli* do schematów różnicowych poprzez redukcję operatora pozwala przeprowadzić zagnieżdżanie *makromodeli*. Umożliwia ono silne zagęszczenie siatki Yee w obszarze, w którym wymagana jest wysoka rozdzielczość. Procedura, przedstawiona szczegółowo w podrozdziale 5.4, jest przeprowadzana hierarchicznie, przy czym należy pamiętać, iż tworzenie *makromodeli* rozpoczyna się w tym przypadku od obszaru najsilniej zagnieżdżonego. Dzięki temu, w każdym kroku *makromodele* będą tworzone dla poddziedziny zawierającej małą liczbę zmiennych stanu.

Wykorzystanie zagnieżdżania *makromodeli* w analizie *FD* zaprezentowane zostanie na przykładzie rezonatora z cienkimi metalowymi przesłonami oraz struktury filtrującej.

7.3.1 Rezonator z cienkimi metalowymi przesłonami

Rozważmy rezonator przedstawiony na rys. 7.19, dla którego czestotliwość rezonansowa rodzaju podstawowego wynosi 15.93GHz (wartość ekstrapolowana w [66]). Zakładając polaryzację *TE* problem elektromagnetyczny można sprowadzić do dwuwymiarowego schematu *FDFD*, sformułowanego w postaci zagadnienia własnego.

Przy kroku dyskretyzacji $\Delta=0.5mm$ siatka problemu opisana będzie przy użyciu N=143węzłów próbek pola $\vec{E}~(I=11,~J=13).$ Wokół każdej z krawędzi przesłony wydzielony został obszar $\hat{\Omega}$ o wymiarach $2\Delta\times 2\Delta$, który następnie zagęszczono r-krotnie. Następnie wewnątrz poddziedziny $\hat{\Omega}$, wydzielono i zagęszczono (z tym samym współczynnikiem zagęszczenia) podprzestrzeń $\hat{\hat{\Omega}}$ o wymiarach $2\frac{\Delta}{r}\times 2\frac{\Delta}{r}$. W rezultacie efektywny współczynnik zagęszczenia siatki Yee wokół przesłony wynosi r^2 .



Rysunek 7.19: Względny błąd częstotliwości rezonansowej rodzaju podstawowego rozważanego rezonatora względem *współczynnika zagęszczenia makromodelu* pojedynczego (linia przerywana) i zagnieżdżonego (linia ciągła) [42].

Jak zaznaczono powyżej, konstrukcja *makromodelu* zagnieżdżonego odbywa się w odwrotnej kolejności, niż wydzielanie podprzestrzeni. Z tego powodu najpierw generowany jest *makromodel* dla podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ (q = 1), który włączany jest do równań poddziedziny $\hat{\Omega}$. Ze względu na stosunkowo niewielka liczbę zmiennych stanu w systemie poddawanym redukcji (tab. 7.3.1), *makromodel* uzyskiwany jest szybko. W następnym kroku redukcji podlegają równania różnicowe podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ zawierające *makromodel* obszaru $\hat{\Omega}$. Ze względu na przeprowadzoną w poprzednim kroku redukcję, liczba zmiennych stanu opisujących poddziedzinę $\hat{\Omega}$ jest również niewielka (tab. 7.3.1). Wygenerowany w ten sposób zagnieżdżony *makromodel* jest dołączany do operatorów globalnych podprzestrzeni $\Omega \setminus \hat{\Omega}$. Rezultaty analizy zagadnienia różnicowego z włączonym pojedynczym i zagnieżdżonym *makromodelem* przedstawiono na rys. 7.19 i w tab. 7.3.1.

Jak łatwo zauważyć przewaga zagnieżdżonych *makromodeli* nad ich niezagnieżdżonym odpowiednikiem jest ogromna. Pojedynczy *makromodel* szybko osiąga punkt, w którym redukcja staje się nieefektywna z powodu zbyt dużej liczby zmiennych stanu. W przypadku redukcji hierarchicznej w każdym z kroków redukowany jest problem opisany małą liczbą zmiennych, a dzięki temu cały proces generacji *makromodelu* jest szybki. Dla przykładu czas potrzebny na utworzenie zagnieżdżonego *makromodelu* (każda z poddziedzin zagęszczana

Tabela 7.5: Porównanie liczby zmiennych pojedynczego i zagnieżdżonego makromodelu pozwalających uzyskać ten sam względny błąd częstotliwości rezonansowej. W przypadku makromodelu zagnieżdżonego podane są rozmiary problemów podlegających redukcji na każdym z dwóch etapów. W nawiasie podano wartości współczynnika zagęszczenia każdej z poddziedzin.

Względny	Liczba zmiennych poddawanych redukcji				
błąd [%]	pojedynczy makromodel	zagnieżdżony makromodel			
1	324(9)	40 & 36 (3,3)			
0.3	1444(19)	104 & 100 (5,5)			
0.15	6724 (41)	328 & 324 (9,9)			
0.03	33124 (91)	$3368 \& 3364 \ (29,29)$			

29 razy) jest czterokrotnie krótszy, niż w przypadku pojedynczego makromodelu (r = 91).

7.3.2 Struktura filtrująca z cienkimi metalowymi przesłonami

Aby w pełni zaprezentować efektywność zagnieżdżania *makromodeli*, wyznaczono przy ich wykorzystaniu współczynnik odbicia dla struktury filtrującej złożonej z pięciu sekcji symetrycznie ułożonych cienkich metalowych przesłon (rys. 7.20).

Dla rozważanej struktury filtrującej krok dyskretyzacji $\Delta = 0.5mm$ jest niewystarczający dla osiągnięcia odpowiednio dokłądnych wyników. Z tego powodu w okolicy każdej z pięciu przesłon wydzielono obszar o wymiarach $10\Delta \times 2\Delta$, dla którego zbudowano zagnieżdżony makromodel².

Konstrukcja makromodelu zagnieżdżonego opiera się na wydzielonej w pierwszym kroku podprzestrzeni $\hat{\Omega}$ zagęszczonej *r*-krotnie o wymiarach $10\Delta \times 2\Delta$ (rys. 7.20). Wewnątrz niej wyodrębniono zagęszczone *r*-krotnie obszary $\hat{\hat{\Omega}}$ o wymiarach $2\frac{\Delta}{r} \times 2\frac{\Delta}{r}$ wokół każdego z ostrzy, a następnie wewnatrz nich wydzielono kolejny obszar o wymiarach $2\frac{\Lambda}{r^2} \times 2\frac{\Lambda}{r^2}$, również *r*-krotnie zagęszczony. Przykładowe wzajemne rozmieszczenie siatek dla współczynnika zagęszczenia r = 3 przedstawiono na rys. 7.20.

Na koniec, równania *Maxwella* dla całej siatki w strukturze zawierającej pięć zagnieżdżonych *makromodeli* poddane zostały redukcji, co odpowiada zastosowaniu techniki *Fast Frequency Sweep (FFS)* [63]. Wyniki analizy przedstawione na rys. 7.20 pokazują, że charakterystyki otrzymane przy użyciu redukcji rzędu modelu są praktycznie nierozróżnialne od wyników samego *subgriddingu*, który w tym przykładzie służy za odniesienie. Największy błąd względny, jaki lokalnie występuje nie przekracza 0.45% (zaznaczony na rys. 7.20).

Porównanie parametrów przeprowadzanych symulacji zebrano w tab. 7.3.2. Jak łatwo zauważyć stosowanie *makromodeli* prowadzi do znacznej redukcji liczby zmiennych, co powoduje, że analiza przeprowadzana jest szybko (25-krotne skrócenie czasu symulacji). Jednocześnie, wyniki symulacji są prawie identyczne, jak w przypadku, gdy stosowany był

 $^{^2 {\}rm Ponieważ}$ przesłony są identyczne, zbudowany został jeden zagnieżdżony makromodel,który następnie sklonowano.



Rysunek 7.20: Współczynnik odbicia od struktury filtrującej uzuskany przy użyciu subgriddingu (linia przerywana) i makromodeli połączonych z analizą FFS (linia ciągła).

Tabela 7.6: Porównanie efektywności algorytmu *FDFD* przy zastosowaniu *subgrid-dingu* (SG), zagnieżdżonych *makromodeli* (MM) oraz zagnieżdżonych *makromodeli* z wykorzystaniem techniki *FFS* (MM-FFS).

	SG	MM	MM-FFS
Rozmiar problemu	43910	3690	210
Błąd maksymalny $[\%]$	0	0.44	0.45
Błąd średni [%]	0	0.003	0.003
Czas obliczeń $[s]$	595.2	70.6	18.9

subgridding, o czym świadczą niskie poziomy wartości średniej i maksymalnej błędu względnego.



Rysunek 7.21: Wykorzystanie zagnieżdżonego *makromodelu* w analizie *FDTD* rezonatora z pojedynczą cienką metalową przesłoną (patrz opis w tekście).

7.3.3 Wysokorozdzielcza analiza *FDTD* rezonatora z pojedynczą cienką metalową przesłoną

Aby zaprezentować możliwości jakie daje używanie *makromodeli* w schematach różnicowych w dziedzinie czasu (*FDTD*), analizie poddana będzie struktura rezonatora z rys. 7.14. Tym razem jednak zagnieżdżone *makromodele* wykorzystane zostaną do uzyskania bardzo wysokiego zagęszczenia siatki wokół krawędzi przesłony.

Dyskretyzacja przestrzeni obliczeniowej z krokiem $\Delta = 0.5mm$ (rys. 7.14) jest niewystarczająca do uzyskania dużej dokładności analizy różnicowej. W tej sytuacji można zastosować makromodel zagnieżdżony, który generowany jest w oparciu o przedstawione na rys. 7.21 hierarchicznie zagnieżdżone podprzestrzenie. Wokół krawędzi przesłony wydzielono podprzestrzeń $\hat{\Omega}$ o wymiarach $2\Delta \times 2\Delta$, którą zagęszczono $r^{\hat{\Omega}}$ -krotnie.

Dla obszaru $2\frac{D}{r^{\widehat{\Omega}}} \times 2\frac{D}{r^{\widehat{\Omega}}}$ zagęszczonego $r^{\widehat{\widehat{\Omega}}}$ -krotnie wygenerowano makromodel i włączono go do operatorów podprzestrzeni $\widehat{\Omega}$. Następnie, redukcji poddano równania poddziedziny $\widehat{\Omega}$ zawierające makromodel. Przykład wzajemnego ułożenia siatek poddziedzin $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$, $\widehat{\Omega}$ i $\widehat{\widehat{\Omega}}$ dla $r^{\widehat{\Omega}} = r^{\widehat{\widehat{\Omega}}} = 3$ przedstawiono na rys. 7.21.

Wyniki dla rozważanej struktury uzyskano za pomocą algorytmu *FDTD*, w którym interpolacji pól na granicy dokonano przy użyciu schematu stabilnego o poprawionej dokładności (podrozdział 4.3). Zgodnie z teorią w trakcie obliczeń nie zauważono żadnych oznak niestabilności. Rezultaty analizy zebrane w tab. 7.3.3 pokazują, że wykorzystując *makromodele* możliwe jest uzyskanie lokalnie przeszło tysiąckrotnego efektywnego zagęszczenia siatki. Granicę osiągalnej dokładności stanowi w tym przypadku błąd związany z dyspersją numeryczną siatki bazowej, który wynosi około 0.1%, co przejawia się w stagnacji błędu dla efektywnego zagęszczenia równego 441 i 1089. Na podkreślenie zasługuje

$r^{\widehat{\Omega}}$	$r^{\widehat{\widehat{\Omega}}}$	$r_{efektywne}$	błąd [%]	$\frac{\underline{\Delta}_t^{\Omega \setminus \Omega}}{\underline{\Delta}_t^{\widehat{\Omega}}}$
-	-	1	3.939	1
3	3	9	0.461	2.37
9	9	81	0.083	4.93
21	21	441	0.046	6.60
33	33	1089	0.042	7.05

Tabela 7.7: Błąd względny częstotliwości rezonansowej dla wysokorozdziel
czego algorytmuFDTDwykorzystującego zagnieżdzone
 makromodele.

fakt, że krok czasowy nawet dla tysiąc
krotnego efektywnego zagęszczenia siatki pozostaje na poziomie porównywalnym z krokie
m $\Delta_t^{\Omega\setminus\widehat{\Omega}}$ wynikającym z warunku Couranta dla siatki rzadkiej.

7.4 Trójwymiarowe struktury elektromagnetyczne

Złożoność rzeczywistych problemów elektrodynamiki obliczeniowej najczęściej nie pozwala uprościć analizy elektromagnetycznej do dwuwymiarowego problemu różnicowego. Zagęszczanie trójwymiarowej siatki Yee prowadzi do gwałtownego wzrostu liczby zmiennych i kosztu numerycznego. Z tego wzgkędu *makromodele* są szczególnie atrakcyjne dla poprawy efektywności symulacji elektromagnetycznej wymagającej wysokorozdzielczej siatki Yee. Należy zwrócić uwagę, że liczba równań stanu, które podlegają redukcji, jest co najmniej o rząd wielkości większa niż w przypadku analizy dwuwymiarowej.

W niniejszym podrozdziale zaprezentowane zostanie wykorzystanie pojedynczych i zagnieżdżonych *makromodeli* w analizie czasowej (*FDTD*) filtrów falowodowych. Dla każdego z zamieszczonych przykładów podany zostanie krok czasowy wymagany dla stabilnej pracy algorytmu. Niezależnie od stopnia zagęszczenia we wszystkich przypadkach skrócenie kroku czasowego w relacji do warunku *Couranta* dla siatki rzadkiej nie było większe niż 2.

7.4.1 Analiza filtru z cienkimi metalowymi przesłonami umieszczonymi symetrycznie w płaszczyźnie *E*

Aby zaprezentować efektywność makromodeli w analizie trójwymiarowej, użyta zostanie struktura dwubiegunowego filtru falowodowego o przekroju poprzecznym $6mm \times 2mm$ z centralnie umieszczonymi cienkimi przesłonami metalowymi (patrz rys. 7.22). Struktura testująca łatwo wpasowuje się w węzły siatki Yee, więc nie wystąpi tu błąd związany z aproksymacją rozkładu pola w pobliżu ścianki elektrycznej.

Aby otrzymać wyniki odniesienie przeprowadzono analizę metodą dopasowania rodzajów, przy czym liczba funkcji rozwinięcia była zwiększana do momentu, gdy wyniki stały



Rysunek 7.22: Dwubiegunowy filtr falowodowy użyty w trakcie testów numerycznych (patrz opis w tekście).



Rysunek 7.23: Wyniki uzyskane z analizy *FDTD* dla filtru falowodowego dla dwóch kroków dyskretyzacji przestrzeni. Odniesienie stanowią wyniki uzyskane metodą dopasowania rodzajów (MM).

się wiarygodne [20]. Charakterystyki transmisyjne i odbiciowe filtru otrzymane metodą dopasowania rodzajów są wąskopasmowe (patrz rys. 7.23), a pozycje dwóch biegunów filtru są praktycznie nierozróżnialne.

Rezultaty klasycznej analizy FDTD dla trzech kroków dyskretyzacji przestrzeni poka-

FDTD rozmiar $\Delta^{\Omega}_t[ps]$ $\Delta[mm]$ problemu iteracje czass 1 614 1.929000 22.186700 18000 0.50.96 148.77 0.2561208 0.4836000 1773.98 $\Delta = 1$ mm $\Delta = 0.5 \text{mm}$ $\Delta = 0.25 \text{mm}$

Tabela 7.8: Liczba zmiennych, czas analizy, krok Δ_t analizowanego filtru falowodowego względem zagęszczenia siatki.

Rysunek 7.24: Makromodele wokół krawędzi przesłon gd
y $\Delta=1mm,\,\Delta=0.5mm,\,\Delta=0.25mm$

zują dużą rozbieżność w porównaniu z wynikami referencyjnymi, duże różnice we współczynnikach odbicia i znaczne przesunięcie w częstotliwości środkowej filtru. Odpowiedzi filtru poprawiają się wraz ze wzrostem zagęszczenia siatki, jednak czas analizy staje się wtedy znacznie dłuższy (patrz tab. 7.8). Dla kroku $\Delta = 0.25mm$ analiza trwała prawie 30 minut, czyli około 80 razy dłużej, niż dla siatki rzadkiej ($\Delta = 1mm$). Zagęszczanie siatki Yee sprawia, że parametry filtru zbiegają się do wartości odniesienia, ale nawet dla gęstej siatki ($\Delta = 0.25mm$) rezultaty są dalekie od akceptowalnych. Tak duże niedokładności spowodowane są złą aproksymacją pól w okolicy wierzchołków przesłon.

Pojedyncze makromodele

Aby poprawić efektywność algorytmu *FDTD* wygenerowanych zostało 6 makromodeli wokół krawędzi przesłon. Dla kroku dyskretyzacji $\Delta = 0.5mm$ rozmiary makromodeli wyniosły $2\Delta \times 2\Delta \times 4\Delta$, tak jak pokazano na rys. 7.24.

Dla wszystkich makromodeli przyjęto rząd q = 1, liczba portów (węzłów siatki rzadkiej uwzględnianych podczas sprzęgania siatek) wynosiła p = 56, a współczynnik zagęszczenia r zmieniał się od 3 do 7. Czas tworzenia makromodelu zależy od współczynnika zagęszczenia i rozmiaru makromodelu (patrz tab. 7.4.1), jednak całkowita liczba zmiennych po redukcji pozostała niezmienna i wynosi $p \cdot q = 56$. To sprawia, że całkowity rozmiar za-

r	początkowy rozmiar problemu	rozmiar makromodelu	czas generacji[s]
3	1116	56	0.94
5	5500	56	7.46
7	15484	56	46.88

Tabela 7.9: Czasy tworzenia pojedynczych makromodeli (patrz tekst).

•				. /
	rozmiar	$\underline{\Delta}_t^{\Omega}$	iteracje	
r	$\operatorname{problemu}$	$\Delta_t^{\widehat{\Omega}}$	FDTD	czas[s]
3	7800	1.52	27350	371.5
5	7800	1.7	30559	432.5
7	7800	1.79	32325	440.8

Tabela 7.10: Porównanie parametrów analiz FDTD z włączonym makromodelem dla różnych współczynników zagęszczenia (patrz tekst).

gadnienia FDTD zawierającego makromodele nie zależy od współczynnika zagęszczenia r (patrz tab. 7.4.1).

Po włączeniu *makromodeli* do schematu *FDTD* krok dyskretyzacji przestrzeni musiał zostać zmniejszony dla zachowania stabilności algorytmu, ponieważ $\frac{\Delta_t^{\Omega}}{\Delta_t^{\Omega}}$ zależy od współczynnika zagęszczenia i rzędu modelu. W najgorszym przypadku Δ_t nie przekroczył połowy bazowego kroku czasowego $(\frac{\Delta_t^{\Omega}}{\Delta_t^{\Omega}} \leq 2)$ (trzecia kolumna tab. 7.4.1).

Rezultaty otrzymane metodą FDTD z włączonymi makromodelami przedstawiono na rys. 7.25. Wraz ze wzrostem współczynnika zagęszczenia makromodelu charakterystyki przybliżają się do wyników uzyskiwanych metodą dopasowania rodzajów, co obserwowane jest dla wszystkich parametrów filtru. Nawet dla makromodeli o najmniejszym współczynniku zagęszczenia r = 3 wyniki są znacznie lepsze, niż dla oryginalnego schematu FDTDo kroku dyskretyzacji $\Delta = 0.25mm$. Zastosowanie gęstszych siatek makromodeli jeszcze bardziej te wyniki poprawia (patrz rys. 7.26).

Makromodele zagnieżdżone

Dodatkowa poprawa efektywności metody *FDTD* zawierającej *makromodele* może być uzyskana poprzez wykorzystanie *makromodeli* zagnieżdżonych. Rozważmy filtr z cienkimi przesłonami metalowymi, w którym przesłona nie wpasowuje się w węzły siatki (patrz rys. 7.27). Dla takiej struktury wystąpią duże błędy związane z niedostatecznie dokładną dyskretyzacją, chyba że użyte zostaną schematy lokalne lub zagęszczenie siatki wokół krawędzi przesłon.

W tym przykładzie bazowy krok dyskretyzacji oryginalnego algorytmu *FDTD* wynoszący $\Delta = 0.5mm$ powoduje znaczny błąd w charakterystyce odbiciowej filtru (ciągła szara linia na rys. 7.29, 14000 iteracji, krok czasowy $\Delta_t^{\Omega} = 0.96ps$). Aby zredukować te błędy, wykorzystano wysokorozdzielcze *makromodele*. Najpierw użyto pojedynczych *makromodeli* o rzędzie q = 1 i współczynniku zagęszczenia r = 7, które stworzono wokół krawędzi przesłon. Dla analizy *FDTD* wykorzystującej tak wygenerowane *makromodele* krok czasowy musiał zostać zmniejszony do wartości $\Delta_t^{\widehat{\Omega}} = \Delta_t^{\Omega}/1.8$, a analiza trwała 2.8 raza dłużej niż dla standardowego algorytmu *FDTD* wykorzystującego rzadką siatkę Yee (stosownie do skróconego kroku czasowego należało zwiększyć liczbę iteracji do 25200). W rezultacie otrzymano poprawę (patrz rys. 7.29 cienka linia kreska-kropka), lecz wyniki ciągle znacznie



Rysunek 7.25: Amplitudy elementów macierzy rozproszenia uzyskanych metodą *FDTD* zawierającą *makromodele* dla różnych współczynników zagęszczenia.



Rysunek 7.26: Wyniki dla filtru falowodowego otrzymane trzema typami analizy *FDTD* (patrz tekst).

się różnią od charakterystyk referencyjnych.

Aby otrzymać jeszcze większe zagęszczenie siatki wokół krawędzi przesłony zastosowano makromodele zagnieżdżone. Makromodele o r = 5, q = 1 o wymiarach $2 \times 2 \times 12$ zostały zagnieżdżone wewnątrz makromodeli o wymiarach $2 \times 2 \times 4$ oraz o r = 3 i q = 2 (patrz rys. 7.28). Tym sposobem otrzymano efektywne zagęszczenie siatki wokół wierzchołków o wartości $r_{eff.} = 15$. Dla analizy *FDTD* wykorzystującej zagnieżdżone makromodele krok czasowy wynosi $\Delta_t^{\Omega}/1.9$, a czas obliczeń dla 26000 iteracji jest 3.8 raza dłuższy niż dla standardowej analizy *FDTD* i rzadkiej siatki. Wyniki analizy *FDTD* z makromodelami zagnieżdżonymi są już bardzo bliskie charakterystykom referencyjnym (patrz czarna linia



Rysunek 7.27: Filtr falowodowy o wymiarach $6mm \times 2mm$ z cienkimi przesłonami metalowymi (wymiary w mm) i siatka Yee zawierająca sześć makromodeli.



Rysunek 7.28: Pozycje zagnieżdżonych makromodeli.



Rysunek 7.29: Charakterystyki dopasowania filtru obliczone z wykorzystaniem metody dopasowania rodzajów, algorytmu *FDTD* wykorzystującego rzadką siatkę ($\Delta = 0.5mm$) i schematu *FDTD* z włączonym makromodelem. Współczynniki lokalnego zagęszczenia siatki wynoszą r = 7 i $r_{eff.} = 15$ odpowiednio dla pojedynczego i zagnieżdżonego makromodelu.

na rys. 7.29).

7.4.2 Analiza filtru z metalowymi przesłonami rezonansowymi umieszczonymi w płaszczyźnie H

Weryfikacja dokładności subgriddingu poprzez analizę pojedynczej przesłony

Aby sprawdzić skuteczność i dokładność lokalnego zagęszczania siatki przeprowadzono test pojedynczej przesłony rezonansowej umieszczonej w płaszczyźnie H. Zagęszczona objętość przecina metal, co jest krytycznym testem każdego algorytmu lokalnego zagęszczania siatki Yee [8], ponieważ metal wprowadza bardzo silne odbicia i poważne błędy fazy.

Struktura rezonansowa składająca się z przesłony o grubości 1.27mm przedstawiona na rys. 7.30 została zdyskretyzowana z krokiem $\Delta = 1.27mm$, który jest wystarczający dla pierwszych kilku rodzajów, które mogą wzbudzić się w pobliżu nieciągłości.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, lokalne zagęszczenie wprowadzono w czterech objętościach otaczających krawędzie przesłony (patrz rys. 7.30). Rozmiar zagęszczonych objętości wynosi $2\Delta \times 3\Delta \times 4\Delta$ dla krawędzi pionowych i $8\Delta \times 3\Delta \times 2\Delta$ dla poziomych. Takie ustawienie zagęszczanych objętości stanowi duże wyzwanie dla każdego algorytmu lokalnego zagęszczania siatki Yee, gdyż metalowe płaszczyzny wielokrotnie przecinają rejon pokryty gęstą siatką. Dodatkowo w okolicy krawędzi przesłon istnieje silna zmienność pola w każdym z kierunków.

Rozważana struktura przeanalizowana została za pomocą dwóch różnych metod: standardowego algorytmu *FDTD* oraz schematu *FDTD* z *subgriddingiem*. Dla standardowe-



Rysunek 7.30: Rezonator prostokątny o wymiarach $10.16 \times 22.86 \times 36.83$ mm użyty do badania dokładności lokalnego zagęszczania siatki wraz z pozycjami zagęszczonych objętości (r = 3).

	standar	dowe FDTD	FDTD	subgr.
r	$\operatorname{err}[\%]$	czas[s]	$\operatorname{err}[\%]$	czas[s]
1	-1.67	13	-1.67	13
2	-0.82	257		
3	-0.56	1317	-0.55	47
4	-0.45	4193		
5	-0.38	10100	-0.37	328
7			-0.28	1408

Tabela 7.11: Porównanie względnego błędu i czasu symulacji w standardowym algorytmie *FDTD* oraz przy wykorzystaniu lokalnie zagęszczonych objętości.

go algorytmu FDTD siatka zagęszczana była w całej dziedzinie, a rezultaty dla różnych współczynników zagęszczenia zprezentowane zostały w tab. 7.4.2. Częstotliwość odniesienia 9.4794GHz została obliczona przy użyciu metody dopasowania rodzajów dla wystarczająco dużej liczby rodzajów. Wraz ze wzrostem r, błąd względny maleje, co wskazuje, że granica pomiędzy podprzestrzeniami $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ i $\hat{\Omega}$ nie wprowadza znaczącyc błędów fazy i odbić, a analiza z wykorzystaniem lokalnego zagęszczenia siatki jest przeprowadzona znacznie szybciej, niż dla przypadku standardowego algorytmu FDTD (patrz tab. 7.4.2).

Analiza filtru z wykorzystaniem makromodeli

Uzyskanie poprawy dokładności dla pojedynczej przesłony przy użyciu *subgriddingu* potwierdza przydatność wprowadzonych w niniejszej rozprawie schematów lokalnego zagęszczania siatki Yee, które stanowią punkt wyjściowy analizy z wykorzystaniem *makromodeli*. Aby zweryfikować efektywność *makromodeli*, przeprowadzono analizę numeryczną filtru zawierającego cztery przesłony rezonansowe, których apertury umieszczone są centralnie (patrz rys. 7.31).

W siatce bazowej został użyty krok dyskretyzacji $\Delta = 1.27mm$. Przekrój falowodu opisany jest za pomocą 19 × 9 węzłów siatki Yee, a przesłony o grubości 1.27mm zerują



Rysunek 7.31: Falowód o przekroju poprzecznym 22.86m
 \times 10.16mm z przesłonami rezonansowymi.



Rysunek 7.32: Rzadka siatka podstawowa i pozycje *makromodeli* wokół krawędzi przesłon.



Rysunek 7.33: Moduł współczynnika odbicia (w dB) dla filtru falowodowego przedstawionego na rys. 7.31 obliczony przy użyciu metody dopasowania rodzajów (MM), metody *FDTD* bazującej na rzadkiej siatce i algorytmu *FDTD* z włączonymi makromodelami.

próbki składowych stycznych dwóch sąsiednich węzłów.

Dla tak skonstruowanej siatki Yee przeprowadzono 20000 iteracji trójwymiarowej ana-

lizy FDTD z krokiem dyskretyzacji osi czasu $\Delta_t^{\Omega} = 2.44ps$ i uzyskano wyniki przedstawione na rys. 7.33 (kreskowana linia). Jak łatwo zauważyć krok dyskretyzacji przestrzeni $\Delta = 1.27mm$ nie wystarcza, aby uzyskać dokładne wyniki. Aby poprawić rezultaty analizy, wokół każdej z apertur wstawiono cztery makromodele ustawione jak na rys. 7.32. Dla pionowych krawędzi przesłony wraz z rogami wygenerowano makromodele o rozmiarach $2 \times 3 \times 4$ i liczbie portów wejściowych p = 104. Poziome makromodele mają natomiast wymiary $6 \times 3 \times 2$ (p = 144) i $8 \times 3 \times 2$ (p = 184) odpowiednio dla węższej i szerszej apertury. Pojedyncze makromodele o rzedzie q = 1 mają współczynniki zagęszczenia r = 9dla pionowych i r = 5 dla poziomych makromodeli. Dla takiego zagęszczenia krok czasowy został ustawiony na $\Delta_t^{\Omega}/1.95$. Otrzymanie wyników wymagało przeprowadzenia 39000 iteracji przy całkowitym koszcie numerycznym 3.5 raza wyższym, niż dla standardowego schematu FDTD z rzadką siatką. Wyniki oznaczone na rys. 7.33 za pomocą ciągłej szarej linii pokazują znaczną poprawę rezultatów analizy FDTD przy akceptowalnym wzroście czasu obliczeń.

Rozdział 8

Podsumowanie

W pracy przedstawiono metodologię poprawiania efektywności metod *FDTD* i *FDFD* poprzez zastosowanie technik redukcji rzędu modelu. Pokazano, że użycie *makromodeli* w różnicach skończonych w trójwymiarowej analizie problemów elektromagnetycznych jest koncepcyjnie równie proste jak *subgridding*, a przy tym nie jest związane z ograniczeniami prowadzącymi do obniżenia efektywności analizy różnicowej. W rozprawie szczegółowo przedyskutowano trudności związane z generacją i włączaniem makromodeli ze szczególnym naciskiem na ogólność (zwielokratnianie i zagnieżdżanie *makromodeli*) i automatyzację procesu (krok czasowy analizy *FDTD* dobierany automatycznie), a także zaproponowano nowe metody interpolacji pól pomiędzy siatkami różnej gęstości, które można stosowaćdo konstrukcji wysokorozdzielczych *makromodeli* lub do lokalnego zagęszczania siatki techniką *subgriddingu*.

W wyniku badań związanych z niniejszą rozprawą doktorską osiągnięto następujące rezultaty:

- opracowano efektywny sposob włączania makromodeli do analizy FDTD i FDFD,
- zwiększono efektywność *makromodeli* poprzez wprowadzenie możliwości ich zwielokratniania, zagnieżdżania i klonowania,
- zaproponowano dwa nowe schematy interpolacji pól (niskoodbiciowy oraz stabilny o poprawionej dokładności) pomiędzy siatkami Yee różnej gęstości,
- przedstawiono teorię stabilności *makromodeli*, która pozwala m.in. na automatyczne określanie kroku czasowego analizy *FDTD* wykorzystującej *makromodele*,
- udowodniono, że wprowadzenie *makromodeli* polepsza zbieżność schematów iteracyjnych i pozwala stosować krok dyskretyzacji czasu porównywalny do kroku wynikającego z warunku *Couranta* dla siatki rzadkiej,
- pokazano, że możliwe jest łączenia makromodeli z popularnymi algorytmami przyśpieszającymi analizę metodą różnic skończonych, a w szczególności ze schematami

lokalnymi, siatkami niejednorodnymi i szybkim przemiataniem częstotliwościowym (FFS).

Proponowane kierunki rozwoju

W rozprawie przedstawiono podstawowe zagadnienia związane z wykorzystaniem *makromodeli* w schematach różnicowych. Wprowadzone techniki mogą być zarówno łatwo rozwijane, jak i stosowane w innych metodach numerycznych elektrodynamiki obliczeniowej. Poniżej przedstawiono najważniejsze zdaniem autora kierunki przyszłych badań.

Nowe klasy i metody generacji makromodeli

W pracy wyczerpująco omówione zostały *makromodele* struktur bezstratnych. Kolejnym krokiem powinno być stworzenie algorytmów generacji *makromodeli* z uwzględnieniem strat.

Inne ograniczenie *makromodeli* związane jest z liczbą zmiennych modelowanego problemu oraz liczbą wejść i wyjść w równaniach różnicowych go opisujących. Przedstawiona w niniejszej rozprawie metodologia zagnieżdżania i zwielokratnienia *makromodeli* stanowi punkt wyjściowy dla nowej klasy metod *MOR*, które nie podlegają obecnym ograniczeniom, a w rezultacie będą mogły być powszechnie stosowane na każdym z etapów projektowania układów.

Optymalizacja z wykorzystaniem makromodeli

Zagadnieniem nie poruszanym w niniejszej rozprawie jest szybka optymalizacja struktur mikrofalowych przy użyciu schematów różnicowych. Optymalizacja jest możliwa poprzez stosowanie tzw. *makromodeli sparametryzowanych*, czyli *makromodeli*, które w łatwy i szybki sposób są zmieniane w zależności od parametrów struktury, które opisują. Dodatkowe przyśpieszenie procesu optymalizacji można uzyskać poprzez opisanie całej podprzestrzeni za pomocą *makromodeli*, a następnie sukcesywne wymienianie tylko tych z nich, które zmieniaja się podczas optymalizacji.

Metody hybrydowe

Ponieważ *makromodele* stanowią zwarty opis przestrzeni obliczeniowej, zwłaszcza, gdy użyte zostaną projekcje modalne, naturalna wydaje sie możliwość łaczenia *makromodeli* z analizą ciągłą. Dzięki takiemu połaczeniu duże podprzestrzenie mogą być analizowane metodami rozwijającymi pola w mody (np. metoda PEE (ang. *Partial Eigenvalue Expansion*) [86,87]), zaś podprzestrzenie zawierające złożone struktury - za pomocą *makromodeli*.

Makromodele w analizie obwodowej i innych metodach siatkowych

Metodologia tworzenia i włączania makromodeli bazuje na równaniach stanu problemu różnicowego. Podobne równania można łatwo zapisać zarówno przy pomocy metody MNA (ang. Modified Nodal Analysis) służącej do opisu obwodów analogowych, jak i za pomocą metod FEM (ang. Finite Element Method) oraz TLM (ang. Transmission Line Matrix) będących alternatywą dla metod FDTD i FDFD. Ponieważ powyższe metody polegają na rozwiązywaniu problemu zapisanego za pomocą równań różnicowych w dziedzinie często-tliwości, wszystkie mechanizmy, poczawszy od zwielokratniania, a skończywszy na zagnież-dżaniu i klonowaniu makromodeli, można wykorzystać także w tych metodach.

Dodatek A Algorytmy redukcji rzędu modelu

Z punktu widzenia potencjalnego zastosowania w problemach różnicowych elektrodynamiki obliczeniowej najczęściej stosowanymi algorytmami redukcji rzędu modelu są *PRIMA* (*Passive Reduced-order Interconnect Macromodeling Algorithm*) [57] oraz *ENOR* (*Efficient Nodal Order Reduction*) [76]. W zależności od sformułowania problemu wyjściowego, do redukcji wykorzystany może zostać jeden z nich. Jeżeli macierzowa funkcja przejścia $\mathbf{H}(s)$ przyjmuję formę problemu pierwszego rzędu, używany jest algorytm *PRIMA*. Jeśli drugiego rzędu – *ENOR*.

Algorym PRIMA

,

Rozpatrzmy macierzową funkcję przejścia $\mathbf{H}(s)$ zapisaną w postaci problemu drugiego rzędu:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{L}^T (\mathbf{G} + s\mathbf{C})^{-1} \mathbf{B}$$
(A.1)

Implementacja algorytmu *PRIMA* dla punktu rozwinięcia s_0 przedstawia się następująco:

- 1. przeprowadź dekompozycję LU macierzy $(\mathbf{G} + s_0 \mathbf{C})$,
- 2. korzystając z rozkładu LU rozwiąż układ równań ze względu na macierz \mathbf{R}

$$\left(\mathbf{G} + s_0 \mathbf{C}\right) \mathbf{R} = \mathbf{B}$$

- 3. wyznacz pierwszy blok wektorów bazy $\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{R}}{\|\mathbf{R}\|}$,
- 4. zmieniającj=1:qwykonaj kroki
 - (a) korzystając z dekompozycji LU wyznaczonej w kroku 1 rozwiąż układ równań znajdując kolejny blok **W**:

$$-\left(\mathbf{G}+s_{0}\mathbf{C}\right)\mathbf{W}=\mathbf{C}\mathbf{V}_{j}$$

- (b) wykorzystując procedurę ortogonalizacji Grama-Schmidta zortogonalizuj każdy z wektorów macierzy \mathbf{W} względem wszystkich wektorów powstałych w procesie generacji macierzy \mathbf{V} ,
- (c) wyznacz kolejny blok wektorów bazy $\mathbf{V}_{j+1} = \frac{\mathbf{W}}{\|\mathbf{W}\|}$,
- 5. utwórz macierz projekcji z otrzymanych bloków: $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1 \dots \mathbf{V}_q].$

Wykorzystując otrzymaną bazę \mathbf{V} do projekcji wyjściowej transmitancji (A.1) uzyskuje się problem zredukowany o postaci:

$$\mathbf{H}_{m}(s) = \mathbf{L}_{m}^{T} \left(\mathbf{G}_{m} + s \mathbf{C}_{m} \right)^{-1} \mathbf{B}_{m}$$
(A.2)

gdzie

$$\begin{split} \mathbf{L}_m &= \mathbf{V}^T \mathbf{L}, \\ \mathbf{B}_m &= \mathbf{V}^T \mathbf{B}, \\ \mathbf{G}_m &= \mathbf{V}^T \mathbf{G} \mathbf{V}, \\ \mathbf{C}_m &= \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}. \end{split}$$

Algorytm ENOR

W algorytmie ENOR wykorzystuje się macierzową funkcję przejścia $\mathbf{H}(s)$ zapisaną w postaci problemu drugiego rzędu o następującej postaci:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{L}^{T} \left(\mathbf{C}s + \mathbf{G} + \Gamma \frac{1}{s} \right)^{-1} \mathbf{B}$$
(A.3)

przy czym macierze \mathbf{C} , \mathbf{G} i $\mathbf{\Gamma}$ powinny być symetryczne i dodatnio określone, co jest ważną zaletą tej reprezentacji. Poniżej przedstawiony został kompletny algorytm *ENOR* w formie gotowej do implementacji dla ustalonego punktu rozwinięcia s_0 .

- 1. ustaw $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$,
- 2. dokonaj rozkładu *Cholesky*'ego macierzy $\mathbf{C}s_0 + \mathbf{G} + \frac{\mathbf{\Gamma}}{s_0}$,
- 3. podstaw za prawą stronę równania $\mathbf{P} = \mathbf{B}$,
- 4. zmieniając $j = 1 \dots q$ wykonaj kroki:
 - (a) wykorzystując dekompozycję Cholesky'ego rozwiąż układ równań liniowych ze względu na wektor ${\bf X}$

$$\left(\mathbf{C}s_0 + \mathbf{G} + \frac{\mathbf{\Gamma}}{s_0}\right)\mathbf{X} = \mathbf{P}$$

- (b) podstaw $\mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{X}$,
- (c) zortogonalizuj wektory macierzy \mathbf{X} względem wszystkich wektorów powstałych w procesie generacji macierzy \mathbf{V} , wykorzystując procedurę Grama-Schmidta, zmieniając też w ten sam sposób macierz \mathbf{Y}
 - $\rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{V}_i) \mathbf{V}_i$ $\rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{Y} (\mathbf{X}^T \mathbf{V}_i) \mathbf{V}_i$
- (d) podstaw $\mathbf{X} = \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|}, \ \mathbf{Y} = \frac{\mathbf{Y}}{\|\mathbf{X}\|},$
- (e) wyznacz kolejny blok wektorów bazy $\mathbf{V}_j = \mathbf{X}$,
- (f) podstaw za prawą stronę równania $\mathbf{P} = \mathbf{C}s_0\mathbf{X} \Gamma\frac{\mathbf{Y}}{s_0}$,
- 5. utwórz macierz V z uzyskanych bloków: $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1 \dots \mathbf{V}_q].$

Wykorzystując otrzymaną macierz \mathbf{V} , poprzez projekcję ortonormalną równania (A.3) otrzymuje się zredukowaną funkcję przejścia o następującej postaci:

$$\mathbf{H}_{m}(s) = \mathbf{L}_{m}^{T} \left(\mathbf{C}_{m} s + \mathbf{G}_{m} + \mathbf{\Gamma}_{m} \frac{1}{s} \right)^{-1} \mathbf{B}_{m}$$
(A.4)

gdzie

$$\begin{split} \mathbf{L}_m &= \mathbf{V}^T \mathbf{L} \\ \mathbf{C}_m &= \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \\ \mathbf{G}_m &= \mathbf{V}^T \mathbf{G} \mathbf{V} \\ \mathbf{\Gamma}_m &= \mathbf{V}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{V} \\ \mathbf{B}_m &= \mathbf{V}^T \mathbf{B} \end{split}$$

Bibliografia

- [1] Advanced Design System (ADS). http://eesof.tm.agilent.com/products/ads_main.html.
- [2] Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe, H. van der Vorst. *Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide*. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [3] L. Balewski, A. Ćwikła, P. Kowalczyk, P. Kozakowski, L. Kulas, A. Lamęcki, M. Mrozowski, K. Nyka, P. Sypek, M. Wiktor. Advances in Computational Electromagnetics. 15th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications, MIKON-2004, wolumen 2, strony 613–625, maj 2004.
- [4] J. E. Bracken, D. K. Sun, Z. J. Cendes. S-Domain Methods for Simultaneous Time and Frequency Characterization of Electromagnetic Devices. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 46:1277–1290, wrzesień 1998.
- [5] W. L. Briggs, V. E. Henson, S. F. McCormick. A multigrid tutorial. SIAM, Philadelphia, wydanie 2nd, 2000.
- [6] A. C. Cangellaris, L. Zhao. Rapid FDTD simulation without time stepping. IEEE Microwave Guided Wave Lett., 9:4–6, styczeń 1999.
- [7] M. Celuch-Marcysiak, W.Gwarek. Higher order modelling of media interfaces for enhanced FDTD analysis of microwave circuits. *Proc. 24th European Microwave Conference*, strony 1530–1535, wrzesień 1994.
- [8] M. W. Chevalier, R. J. Luebbers, V. P. Cable. FDTD Local Grid with Material Traverse. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 45:411–421, marzec 1997.
- [9] L. O. Chua, P. Lin. Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques. Prentice Hall, Eaglewood Clifs, NJ, 1975.
- [10] V. Cingoski, K. Tsubota, H. Yamashita. Investigation of the efficiency of the multigrid method for finite element electromagnetic field computations using nested meshes. *IEEE Trans. Magn.*, 35:3751–3753, wrzesień 1999.
- [11] CST Microwave Studio. http://www.cst.com/Content/Products/MWS/Overview.aspx.

- [12] A. Cwikla, M. Mrozowski, M. Rewienski. Finite-difference analysis of a loaded hemispherical resonator. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 51:1506–1511, maj 2003.
- [13] B. Denecker, F. Olyslager, L. Knockaert, D. De Zutter. Automatic generation of subdomain models in 2-D FDTD using reduced order modeling. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, 10:301–303, sierpień 2000.
- [14] B. Denecker, F. Olyslager, L. Knockaert, D. De Zutter. Generation of FDTD subcell equations by means of reduced order modeling. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 51:1806–1817, sierpień 2003.
- [15] S. Dey, R. Mittra. A Locally Conformal Finite Difference Time Domain Algorithm for Modelling Curved Three Dimensional Perfectly Conducting Objects. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, 7:273–275, wrzesień 1997.
- [16] H. Benisty et al. Models and Measurements for the Transmission of Submicron-Width Waveguide Bends Defined in Two-Dimensional Photonic Crystals. *IEEE J. Quantum Electron.*, 38:770–785, lipiec 2002.
- [17] P. Feldmann, R. W. Freund. Efficient linear circuit analysis by Padé approximation via Lanczos process. *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, 14:639–649, maj 1995.
- [18] R. W. Freund. Krylov-subspace methods for reduced-order modeling in circuit simulation. Journal of Computational and Applied Mathematics, strony 395–421, 2000.
- [19] R. W. Freund, P. Feldmann. Reduced-order modeling of large passive linear circuits by means of the SyPVL algorithm. *Technical Digest of the 1996 IEEE ACM International Conference on Computer-Aided Design*, strony 280–287, 1996.
- [20] R. Sorrentino G. Conciauro, M. Guglielmi. Advanced Modal Analysis. John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [21] S. D. Gedney. An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 44:1630–1639, grudzień 1996.
- [22] W. K. Gwarek. Analysis of arbitrarily shaped two-dimensional microwave circuits by finite-difference time-domain method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 36:738– 744, kwiecień 1988.
- [23] W. K. Gwarek, M. Celuch-Marcysiak. Wide-Band S-Parameter Extraction From FDTD Simulations for Propagating and Evanescent Modes In Inhomogeneous Guides. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 51:1920–1928, sierpień 2003.
- [24] High Frequency Structure Simulator. http://www.ansoft.com/products/hf/hfss/index.cfm.

- [25] N. H. Huynh, W. Heinrich. FDTD accuracy improvement by incorporation of 3D edge singularities. Proc. Of Int. Microwave Symposium, IMS-1999, strony 1573–1576, czerwiec 1999.
- [26] N. Kaneda, B. Houshmand, T. Itoh. FDTD analysis of dielectric resonators with curved surfaces. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 45:1645–1649, wrzesień 1997.
- [27] L. Knockaert, D. De Zutter. Laguerre-SVD reduced-order modeling. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 48:1469–1475, wrzesień 2000.
- [28] P. Kozakowski, M. Mrozowski. Automated CAD of Coupled Resonator Filters. IEEE Microwave Wireless Compon. Lett., 12:470–472, grudzień 2002.
- [29] P. Kozakowski, M. Mrozowski. Gradient Based Optimization of Filters Using FD-TD Software. *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.*, 12:388–391, październik 2002.
- [30] P. Kozakowski, M. Mrozowski. Low-Order Models from FD-TD Time Samples. *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.*, 12:438–440, listopad 2002.
- [31] K. M. Krishnaiah, C. J. Railton. A stable subgridding algorithm and its application to eigenvalue problems. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 47:620–628, maj 1999.
- [32] K. Krohne, R. Vahldieck. A fast filter optimization scheme based on model order reduction. Proc. IEEE Int. Microwave Symp., strony 21–24, czerwiec 2003.
- [33] L. Kulas, F.A. Fernandez. A Simple Finite Difference Approach Using Unstructured Meshes From *FEM* Mesh Generators. 15th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications, MIKON-2004, wolumen 2, strony 585–588, maj 2004.
- [34] L. Kulas, M. Mrozowski. Reduced-order models in FDTD. IEEE Microwave Wireless Compon. Lett., 11:422–424, październik 2001.
- [35] L. Kulas, M. Mrozowski. Implementing the concept of a macromodel in the *FDTD* method. 14th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications, MIKON-2002, wolumen 2, strony 537–540, maj 2002.
- [36] L. Kulas, M. Mrozowski. A Simple High-Accuracy Subgridding Scheme. Proc. 33rd European Microwave Conference, strony 347–350, październik 2003.
- [37] L. Kulas, M. Mrozowski. Reduced order models of refined yee's cells. *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.*, 13:164–166, kwiecień 2003.
- [38] L. Kulas, M. Mrozowski. 3D Macromodels in the *FDTD* Filter Analysis. 15th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications, MIKON-2004, wolumen 2, strony 710–713, maj 2004.

- [39] L. Kulas, M. Mrozowski. A Fast High-Resolution 3-D Finite-Difference Time-Domain Scheme With Macromodels. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 52:2330–2335, wrzesień 2004.
- [40] L. Kulas, M. Mrozowski. Accelerated Analysis of Resonators by a Combined Domain Decomposition – Model Order Reduction Approach. 34rd European Microwave Conference, EuMC-2004, strony 585–588, październik 2004.
- [41] L. Kulas, M. Mrozowski. Macromodels in the Frequency Domain Analysis of Microwave Resonators. *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.*, 14:94–96, marzec 2004.
- [42] L. Kulas, M. Mrozowski. Multilevel model order reduction. *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.*, 14:165–167, kwiecień 2004.
- [43] L. Kulas, M. Mrozowski. Stability of the FDTD Scheme Containing Macromodels. IEEE Microwave Wireless Compon. Lett., 14:484–486, październik 2004.
- [44] L. Kulas, M. Mrozowski. Yee's Macrocells In Three Dimensions. Proc. Of Int. Microwave Symposium, IMS-2004, strony 1717–1720, czerwiec 2004.
- [45] L. Kulas, M. Mrozowski. Low-reflection subgridding. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 53:1587–1592, maj 2005.
- [46] L. Kulas, M. Mrozowski. Simple and Accurate Field Interpolation in Finite Difference Methods. 16th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications, MIKON-2006, wolumen 2, strony 711–714, maj 2006.
- [47] L. Kulas, P.Sypek, M. Mrozowski. Makromodele w metodzie różnic skończonych. zeszyty naukowe wydziału ETI Politechniki Gdańskiej, number 3 serii Technologie Informacyjne, maj 2005.
- [48] L. Kulas, P. Sypek, J. Podwalski, M. Mrozowski. Model Order Reduction for Subgridding in *FDTD* Scheme. 17th Int. Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility, EMC-Zurich 2006, strony 18–21, luty 2006.
- [49] Karl. S. Kunz, Raymond J. Lubbers. Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics, int. edition. CRC Press, 1993.
- [50] D. Lukashevich, A. C. Cangellaris, P. Russer. Transmission Line Matrix method reduced order modeling. *Proc. IEEE Int. Microwave Symp.*, strony 1125–1128, czerwiec 2003.
- [51] J. Meixner. The behavior of electromagnetic fields at edges. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 20:442–446, lipiec 1972.
- [52] C. D. Meyer. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM, Philadelphia, 2000.

- [53] Microwave Office. http://web.appwave.com/Products/Microwave_Office/Overview.php.
- [54] M. Mrozowski. A Hybrid PEE-FDTD Algorithm for Accelerated Time Domain Analysis of Electromagnetic Waves in Shielded Structures. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, 4:323–325, październik 1994.
- [55] M. Mrozowski. Stability Condition for the Explicit Algorithms of the Time Domain Analysis of Maxwell's Equations. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, 4:279–281, sierpień 1994.
- [56] G. Mur. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, 23:377–382, listopad 1981.
- [57] A. Odabasioglu, M. Celik, L. T. Pileggi. PRIMA: Passive Reduced-Order Interconnect Macromodeling Algorithm. *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, 17:645–654, sierpień 1998.
- [58] M. Okoniewski, E. Okoniewska, M. A. Stuchly. Three-dimensional subgridding algorithm for FDTD. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 45:422–429, marzec 1997.
- [59] L. T. Pillage, R. A. Rohrer. Asymptotic Waveform Evaluation for Timing Analysis. *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, 9:352–266, kwiecień 1990.
- [60] O. Podebrad, M. Clemens, T. Weiland. New Flexible Subgridding Scheme for the Finite Integration Technique. *IEEE Trans. Magn.*, 39:1662–1665, maj 2003.
- [61] J. Podwalski, L. Kulas, P. Sypek, M. Mrozowski. Analysis of a High-Quality Photonic Crystal Resonator. 16th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications, MIKON-2006, wolumen 2, strony 793–796, maj 2006.
- [62] J. Podwalski, P. Sypek, L. Kulas, M. Mrozowski. Macromodel Cloning Approach in Efficient *FDTD* Analysis of *EBG* structures. *Proc. Of Int. Microwave Symposium*, *IMS-2006*, strony 296–299, czerwiec 2006.
- [63] S.V. Polstyanko, R. Dyezij-Edlinger, Jin-Fa Lee. Fast frequency sweep technique for the efficient analysis of dielectric waveguides. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 45:1118–1126, lipiec 1997.
- [64] J. Przewocki, L. Kulas, M. Mrozowski. Digital System Interconnects Analysis Using Model Order Reduction Methods. 16th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications, MIKON-2006, wolumen 2, strony 577–580, maj 2006.

- [65] P. Przybyszewski, J. Mielewski, M. Mrozowski. A new class of eigenfunction expansion methods for fast frequency domain analysis of waveguides. *IEEE Trans. Micro*wave Theory Tech., 49:558–563, luty 2002.
- [66] P. Przybyszewski, M. Mrozowski. A Conductive Wedge in Yee's Mesh. IEEE Microwave Guided Wave Lett., 8:66–68, luty 1998.
- [67] Piotr Przybyszewski. Fast finite difference numerical techniques for the time and frequency domain solution of electromagnetic problems. Praca doktorska, Politechnika Gdańska, 2001.
- [68] M. Qiu. Micro-cavities in Silicon-on-insulator Photonic Crystal Slabs: Determining Resonant Frequencies and Quality Factors Accurately. Microwave Opt. Techn. Lett., 45:381–385, czerwiec 2005.
- [69] Quickwave-3D. http://www.qwed.com.pl.
- [70] C. J. Railton, I. J. Craddock, J. B. Schneider. The Analysis of General Twodimensional PEC Structures Using a Modified CPFDTD Algorithm. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 44:1728–1733, październik 1996.
- [71] R.F. Remis, P.M. Van Den Berg. A Modified Lanczos Algorithm for the Computation of Transient Electromagnetic Wavefields. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 45:2139–2149, 1997.
- [72] M. Rewienski, M. Mrozowski. Iterative application of boundary conditions in the parallel implementation of the FDFD method. *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.*, 10:362–364, wrzesień 2000.
- [73] Y. Saad. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. PWS Publishing Company, Boston, 1996.
- [74] M. N. O. Sadiku. Numerical Techniques in Electromagnetics. CRC Press, New York, 1992.
- [75] M. Salazar-Palma. Iterative and Self-Adaptive Finite-Elements in Electromagnetic Modeling. Artech House, Boston-London, 1998.
- [76] B. N. Sheehan. ENOR: Model Order Reduction of RLC Circuits Using Nodal Equations for Efficient Factorization. Proc. IEEE 36th Design Automat. Conf., strony 17–21, czerwiec 1999.
- [77] Y. Su, J. Wang, X. Zeng, Z. Bai, C. Zhou. SAPOR: Second-Order Arnoldi Method for Passive Order Reduction of RCS Circuits. *IEEEACM International Conference Computer Aided Design, ICCAD-2004.*, strony 74–79, 2004.

- [78] P. Sypek, L. Kulas, M. Mrozowski. Low Reflection Macromodels for a Stable *FDTD* Scheme Operating with Highly Refined Local Meshes. *Proc. Of Int. Microwave Symposium*, *IMS-2005*, strony 195–198, czerwiec 2005.
- [79] A. Taflove. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Artech House, Boston-London, 1995.
- [80] P. Thoma, T. Weiland. A Consistent Subgridding Scheme for the Finite Difference Time Domain Method. Int. Journ. of Numerical Modelling, 9:359–374, wrzesień 1996.
- [81] P. Thoma, T. Weiland. Numerical Stability of Finite Difference Time Domain Methods. *IEEE Trans. Magn.*, 34:2740–2743, wrzesień 1998.
- [82] L. Thylen, M. Qiu, S. Anand. Photonic Crystals A Step towards Integrated Circuits for Photonics. ChemPhysChem, 5:1268–1283, wrzesień 2004.
- [83] T. Weiland. Maxwells's Grid Equations. Frequenz, 44:9–15, styczeń 1990.
- [84] M. J. White, M. F. Iskander, Z. Huang. Development of a Multigrid FDTD Code for Three-Dimensional Applications. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 45:1512– 1517, październik 1997.
- [85] M. J. White, Z. Yun, M. F. Iskander. A New 3-D FDTD Multigrid Technique with Dielectric Traverse Capabilities. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 49:422–430, marzec 2001.
- [86] M. Wiktor, M.Mrozowski. Efficient analysis of waveguide components using a hybrid PEE-FDFD algorithm. *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.*, 13:396 – 398, wrzesień 2003.
- [87] Michał Wiktor. Zastosowanie metod projekcji w algorytmach różnicowych elektrodynamiki obliczeniowej. Praca doktorska, Politechnika Gdańska, 2006.
- [88] T. Wittig, I. Munteanu, R. Schuhmann, T. Weiland. Two-step Lanczos algorithm for model order reduction. *IEEE Trans. Magn.*, 38:673–676, marzec 2002.
- [89] XFDTD. http://www.remcom.com/xfdtd6.
- [90] K. Xiao, D. J. Pommerenke, J. L. Drewniak. A three-dimensional *FDTD* subgridding algorithm based on interpolation of current density. *International Symposium on Electromagnetic Compatibility EMC 2004*, wolumen 1, strony 118 – 123, sierpień 2004.
- [91] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 14:302–307, maj 1966.

- [92] L. Yin, J. Wang, W. Hong. A Novel Algorithm Based on the Domain-Decomposition Method for the Full-Wave Analysis of 3-D Electromagnetic Problems. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 50:2011–2017, sierpień 2002.
- [93] B. Young. Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide. Prentice Hall, 2001.
- [94] X-M Zhang, J-F Lee. Application of the AWE Method with the 3-D TVFEM to Model Spectral Responses of Passive Microwave Components. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 46:1735–1741, listopad 1998.
- [95] Ziyang Zhang, Min Qiu. Compact in-plane channel drop filter design using a single cavity with two degenerate modes in 2D photonic crystal slabs. *Optics Express*, 13, kwiecień 2005.
- [96] H. Zheng, L. Pileggi. Robust and Passive Model Order Reduction for Circuits Containing Susceptance Elements. Proc. of IEEEACM ICCAD 2002, strony 761–766, 2002.
- [97] Y. Zhu, A. C. Cangellaris. Macro-elements for efficient FEM simulation of small geometric features in waveguide components. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 48:2254–2260, grudzień 2000.
- [98] Y. Zhu, A. C. Cangellaris. A new finite element model for reduced order electromagnetic modeling. *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.*, 11:211–213, maj 2001.
- [99] Z. Zhu, W. Hong. A Generalized Algorithm for the Capacitance Extraction of 3-D VLSI Interconnects. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 47:2027–2030, październik 1999.
- [100] M. R. Zunoubi, K. C. Donepudi, J. M. Jin, W C. Chew. Efficient Time-Domain and Frequency-Domain Finite-Element Solution of Maxwell's Equations Using Spectral Lanczos Decomposition Method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 46:1141– 1149, 1998.
- [101] Łukasz Kulas. Redukcja rzędu modelu w analizie numerycznej układów mikrofalowych metodami różnic skończonych w dziedzinie częstotliwości i czasu. Praca magisterska, Politechnika Gdańska, 2001.

Podziękowania

Chciałbym podziękować mojemu promotorowi prof. Michałowi Mrozowskiemu, za jego ogromny wkład w mój naukowy i osobisty rozwój, pomoc i zaufanie w trudnych chwilach oraz zaangażowanie we wspólne badania naukowe.

Dziękuję również moim kolegom, za ich cenne komentarze, pomoc w rozbudowie moich algorytmów oraz dyskusje, które pomogły mi rozwinąć teorię *makromodeli* - Michałowi Wiktorowi, Piotrowi Sypkowi i Krzyśkowi Nyce.

Specjalne podziękowania chciałbym złożyć mojej całej rodzinie, która w trakcie prac nad niniejszą rozprawą doktorską służyła mi wsparciem, a przede wszystkim: żonie, rodzicom i siostrze.
Copyright note / Prawo rozpowszechniania

Niniejszym wyrażam zgodę na wykorzystanie wyników mojej pracy, w tym tabel i rysunków, w pracach badawczych i publikacjach przygotowywanych przez pracowników Politechniki Gdańskiej lub pod ich kierownictwem. Wykorzystanie wyników wymaga wskazania niniejszej rozprawy doktorskiej jako źródła.

Sylwetka autora

Łukasz Kulas jest absolwentem wydziału Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki Politechniki Gdańskiej (studia ukończone z wyróżnieniem). Jego zainteresowania naukowe związane są z metodami siatkowymi (*FDTD*, *FDFD*, *FEM*) i możliwościami ich łączenia z technikami redukcji rzędu modelu (MOR). Łukasz Kulas jest autorem siedmiu publikacji w czasopismach z listy filadelfijskiej [34,37,39,41–43,45] oraz 14 komunikatów wygłoszonych w trakcie konferencji międzynarodowych [3,33,35,36,38,40,44,46–48,61,62,64,78].

Nagrody i wyróżnienia:

- pierwsza nagroda w Konkursie na Najlepszą Pracę Magisterską organizowanym co dwa lata przez połączone oddziały AP/AES/MTT polskiej sekcji IEEE,
- nagrodę przyznaną przez Prezydenta Miasta Gdańsk i Rektora Politechniki Gdańskiej
- stypendium badawcze *MTT-S Graduate Fellowship* przyznawane przez Microwave Theory and Techniques Society co roku sześciu młodym naukowcom,
- stypendium Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej (2005, 2006),
- sześć wyróżnień i nagród za wystąpienia konferencyjne i badania naukowe.

Staże naukowe:

- Ericsson (Szwecja) w 2001 roku,
- University College Londyn (Wielka Brytania) w 2002 roku.

Autor uczestniczy w sześciu grantach badawczych i badawczo-rozwojowych, które finansowane są przez Komitet Badań Naukowych, Unię Europejską i Armię Stanów Zjednoczonych, prowadzi intensywną współpracę z firmami w dziedzinie komunikacji bezprzewodowej w ramach Centrum Doskonałości WiComm oraz opiekuje się studenckim kołem naukowym "WiComm Yuniors".