

POLITECHNIKA GDAŃSKA
Wydział Elektroniki Telekomunikacji i Informatyki

Praca doktorska pt.

**Metody wielosiatkowe w szybkiej analizie
pasywnych układów mikrofalowych**

mgr inż. Krzysztof Nyka

Promotor:

prof. dr hab. inż. Michał Mrozowski, prof. nadzw. PG

Gdańsk, 15 czerwca 2001

Spis treści

1	Wprowadzenie	7
1.1	Uzasadnienie wyboru tematu	7
1.2	Stan badań	9
1.3	Cel pracy	11
1.4	Główne tezy i zakres pracy	12
2	Metody wielosiatkowe	15
2.1	Wprowadzenie	15
2.2	Podstawowe metody iteracyjne	17
2.2.1	Wybrane własności macierzy	17
2.2.2	Podstawowe algorytmy	17
2.2.3	Zbieżność	19
2.2.4	Właściwości wygładzające	20
2.3	Zasada metod wielosiatkowych	24
2.4	Algorytmy wielosiatkowe	26
2.5	Adaptacyjne metody wielosiatkowe	29
2.6	Algebraiczne metody wielosiatkowe	32
2.7	Prekondycjonowanie wielosiatkowe	33
2.7.1	Niestacjonarne metody iteracyjne	33
2.7.2	Zasada prekondycjonowania	36
2.7.3	Metody wielosiatkowe w prekondycjonowaniu	37
3	Metoda elementów skończonych	39
3.1	Zadanie minimalizacyjne i słaba postać	40
3.1.1	Zasada wariacyjna	40
3.1.2	Metody residuów ważonych	41
3.1.3	Słaba postać	41
3.2	Aproksymacja	43
3.3	Estymacja błędu dyskretyzacji	47
3.3.1	Estymacja ekstrapolacyjna	47
3.3.2	Estymatory rezydualne	48
3.3.3	Estymatory z lokalnym zagadnieniem dla błędu	48

4	Generacja siatki	51
4.1	Charakterystyka geometryczna planarnych układów mikrofalowych	51
4.2	Siatki dla metod elementów skończonych	52
4.2.1	Podstawowe typy siatek	52
4.2.2	Ogólne kryteria wyboru siatek	55
4.2.3	Wybór siatek dla metod wielosiatkowych	56
4.3	Przykładowe generatory siatki trójwymiarowej	57
4.3.1	Generacja siatki regularnej – program tri2tet	57
4.3.2	Generacja siatki nieregularnej – program NETGEN	58
4.3.3	Porównanie siatek i generatorów	59
5	Ekstrapolacyjne poprawianie rozwiązania	65
5.1	Ekstrapolacja Richardsona	65
5.1.1	Asymptotyczne rozwinięcie błędu	67
5.2	Ekstrapolacja Aitkena	68
5.3	Ekstrapolacja energii	68
5.3.1	Ekstrapolacja Richardsona dla energii	69
5.3.2	Korekcja energii błędem estymowanym	71
5.3.3	Ekstrapolacja Richardsona dla energii skorygowanej błędem estymowanym	72
5.3.4	Algorytmy ekstrapolacji energii	72
5.3.5	Metody oceny korekcji błędem	74
5.4	Testy numeryczne	75
6	Podejście quasi-statyczne w analizie układów mikrofalowych	83
6.1	Parametry zastępcze linii quasi-TEM	84
6.1.1	Linia pojedyncza	85
6.1.2	Linie sprzężone	88
6.2	Elementy schematu zastępczego nieciągłości	89
6.2.1	Pojemności	90
6.2.2	Indukcyjności	92
6.3	Wykorzystanie rozwiązań analitycznych	93
6.4	Struktury osiowosymetryczne	94
7	Rozwiązanie trójwymiarowego problemu magnetostatycznego	95
7.1	Skalarny potencjał magnetyczny	96
7.2	Dualny problem elektryczny	97
7.3	Wybór ścianek magnetycznych	98
7.4	Koncepcja powierzchni rozdziału potencjału	99
7.4.1	Implementacja powierzchni rozdziału potencjału w metodzie różnic skończonych	101
7.5	Powierzchnia rozcięcia w metodach elementów skończonych	103
7.5.1	Naturalny warunek ciągłości gradientu	104
7.5.2	Zasadniczy warunek uskoku potencjału	105

7.5.3	Osobliwy układ równań w metodach wielosiatkowych	108
7.6	Testy numeryczne	109
7.6.1	Weryfikacja dwuwymiarowa	109
7.6.2	Przykład trójwymiarowy	112
8	Implementacja metod wielosiatkowych	115
8.1	Procedury numeryczne	115
8.2	Testy wydajności metod wielosiatkowych	116
8.2.1	Rozwiązanie układu równań liniowych	118
8.2.2	Dokładność dyskretyzacji	128
9	Przykładowe zastosowania – analiza statyczna	135
9.1	Parametry przewodnic	135
9.2	Proste nieciągłości	137
9.3	Nieciągłości o złożonym schemacie	139
10	Wprowadzenie do analizy pełnofalowej	149
10.1	Analiza pełnofalowa 2D – zagadnienia własne	149
10.1.1	Sformułowanie zagadnienia własnego	149
10.1.2	Metody wielosiatkowe w zagadnieniach własnych	151
10.1.3	Przykłady zastosowań do problemów ze skalarnym równaniem Helmholtza	154
10.1.4	Falowod prostokątny z niejednorodnym wypełnieniem dielek- trycznym	156
10.1.5	Testy numeryczne	159
10.2	Analiza pełnofalowa 3D	166
10.2.1	Sformułowanie równania falowego	166
10.2.2	Rozwiązanie równań falowych za pomocą metod wielosiatkowych	167
10.2.3	Testy numeryczne	170
11	Podsumowanie	177
	Spis literatury	179

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1 Uzasadnienie wyboru tematu

W komercyjnych programach do analizy złożonych układów mikrofalowych wciąż najbardziej efektywne i rozpowszechnione jest podejście obwodowe, gdzie struktura układu przedstawiana jest w postaci sieci elementów o stałych skupionych i rozłożonych realizowanych z reguły w wybranej technice planarnej. Jednorodne odcinki linii quasi-TEM (np. NLP, linie koplanarne) łączone są za pośrednictwem nieciągłości. Zarówno linie jak i nieciągłości scharakteryzowane są modelami opartymi na analizie statycznej. Modele linii bywają wzbogacone o efekt dyspersji i tłumienia podstawowego rodzaju fali

Ograniczenie dokładności analizy w przybliżeniu statycznym jest ceną, jaką świadomie płaci się za szybkość obliczeń pozwalającą na przeprowadzenie dogłębnej optymalizacji projektowanego układu. Pełnofalowe symulatory elektromagnetyczne są wciąż byt czasochłonne i pamięciochłonne, by stać się podstawowym narzędziem do projektowania złożonych układów mikrofalowych. Ponadto zakres stosowalności przybliżenia statycznego gwałtownie się rozszerza wraz z rozpowszechnianiem się układów monolitycznych (MMUS) oraz układów wykonywanych w technice koplanarnej, gdzie analiza statyczna daje bardzo dobre wyniki nawet do 30 GHz [92, 40]. Z drugiej jednak strony poważnym ograniczeniem istniejących pakietów CAD jest operowanie modelami (najczęściej w postaci banków gotowych charakterystyk lub elementów schematów zastępczych) ściśle określonych elementów i nieciągłości o zadanej geometrii, w których tylko część wymiarów i parametrów może być dobierana przez użytkownika i najczęściej w wąskim zakresie wartości.

Aby wyeliminować tę niedogodność i zapewnić projektantowi większą swobodę w kształtowaniu struktury układu, należałoby wprowadzić sprawną, wykonywaną na bieżąco analizę elementów o dowolnej geometrii. Dodatkowo otworzyłoby to możliwości wykonywania optymalizacji przy użyciu bardzo efektywnych algorytmów genetycznych.

Poszukiwaniem tu kompromisem pomiędzy szybkością a dokładnością jest określanie parametrów schematu zastępczego na podstawie statycznego rozkładu pola elektromagnetycznego w dowolnej strukturze po rozwiązaniu równań falowych me-

todą różnic (FD) lub elementów skończonych (FE). Konieczne jest wówczas również osiągnięcie po optymalne, pod względem efektywności numerycznej, metody obliczania statycznego rozkładu pola w strukturze.

Przydatność takiego podejścia potwierdzono w analizie struktur koplanarnych opartej na metodzie różnic skończonych [92, 91]. Znalazło ono zastosowanie praktyczne w komercyjnej bibliotece elementów koplanarnych dla programu LIBRA. Metoda ta prowadzi do dobrej zgodności z wynikami pomiarowymi dla układów monolitycznych i hybrydowych, ma jednak następujące ograniczenia: zawężenie analizy do elementów o geometrii wpisującej się w prostokątną siatkę dyskretyzacji FD, konieczność arbitralnego (tym samym nieoptymalnego) konstruowania siatki tylko na podstawie geometrii struktury, nie uwzględniające faktycznego rozkładu pola, zastosowanie nieefektywnej metody relaksacyjnej do rozwiązywania układu równań liniowych i wreszcie ograniczenie obliczeń indukcyjności zastępczych do układów o symetrii względem płaszczyzny metalizacji.

Zamierzeniem niniejszej pracy jest zaproponowanie rozwiązań, które usuwają powyższe ograniczenia, a ponadto dodatkowo zwiększają efektywność, wszechstronność i dokładność analizy. Polegają one na:

- zastosowaniu bardzo efektywnych metod wielosiatkowych do rozwiązywania cząstkowych równań różniczkowych
- włączeniu do metod wielosiatkowych algorytmu adaptacyjnego dopasowywania siatki do rozkładu pola
- dyskretyzacji zagadnienia ciągłego za pomocą metod elementów skończonych
- zastosowaniu analitycznego rozwinięcia pola w obszarach jednorodnych
- modyfikacji metody poszukiwania rozkładu pola magnetycznego na użytek struktur niesymetrycznych.
- zwiększaniu dokładności lub przyspieszania rozwiązania w oparciu o estymowany błąd dyskretyzacji i techniki ekstrapolacji

Metody *wielosiatkowe* (multigrid), w swojej podstawowej postaci, służą do szybkiego iteracyjnego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych przekształconych drogą dyskretyzacji w dziedzinie przestrzeni (metodą różnic (FD) lub elementów (FE) skończonych), do postaci wielkich układów równań z macierzami rzadkimi. Charakterystyczną cechą jest poprawa zbieżności iteracyjnych metod rozwiązywania układów równań liniowych poprzez tzw. korekcję na siatce rozrzedzonej. Stosowane są najczęściej do eliptycznych, hiperbolicznych i parabolicznych równań różniczkowych. Od innych metod odróżnia je zdolność rozwiązywania problemów o N niewiadomych z wydatkiem numerycznym, dotyczącym zarówno czasu, jak i pamięci, bliskim optymalnego $O(N)$, dla obszernego zakresu klas zagadnień. Koncepcja metod wielosiatkowych została też uogólniona, jako metody *wielopoziomowe* (multilevel), do przypadków manipulacji różnymi poziomami dokładności aproksymacji zagadnienia ciągłego w celu przyspieszenia rozwiązania zagadnienia dyskretnego. Szczególnym rozwinięciem metod wielosiatkowych są algorytmy z adaptacyjnym

zagęszczaniem siatki dyskretyzacji, pozwalające uzyskać optymalną aproksymację zagadnienia ciągłego.

Jeżeli przybliżenie quasi-statyczne nie zapewnia wymaganej dokładności na wyższych częstotliwościach lub struktura w ogóle nie pozwala na analizę statyczną, niezbędne jest scharakteryzowanie układu w funkcji częstotliwości na podstawie pełnofalowej analizy. Możliwe są tu dwa podejścia – pełnofalowa analiza całego układu lub niezależna analiza poszczególnych elementów (nieciągłości) i odcinków linii. W pierwszym przypadku można otrzymać bardzo dokładne, lecz bardzo wysokim kosztem numerycznym. Drugie rozwiązanie jest pełnofalowym rozwinięciem podejścia quasi-statycznego i szczególnie nadaje się do integracji z obwodowymi symulatorami układów mikrofalowych. Pożądane jest przy tym, aby wyniki symulacji pełnofalowej przedstawiać w postaci szerokopasmowych schematów zastępczych, fizycznych lub matematycznych. Jest to zagadnienie bardzo aktualne, cieszy się stale rosnącym zainteresowaniem lecz nie mieści się w zakresie niniejszej pracy.

Przy skomplikowanej geometrii elementów, jedyną efektywną metodą pełnofalowego modelowania numerycznego jest dyskretyzacja równań Maxwella (w postaci różniczkowej lub całkowej) lub równań falowych i rozwiązanie tak powstałego problemu macierzowego. Podejście takie jest jednak numerycznie bardzo kosztowne, zarówno pod względem czasu obliczeń jak i rozmiarów pamięci, dlatego krytycznym parametrem jest efektywność zaimplementowanych algorytmów. W niniejszej pracy, jako uzupełnienie analizy quasi-statycznej, proponuje się zastosowanie bardzo wydajnych metod wielosiatkowych do rozwiązywania dwuwymiarowych zagadnień własnych i trójwymiarowej analizy pełnofalowej w strukturach zawierających niejednorodne wypełnienie dielektryczne.

Część tematu pracy odnosząca się do metod wielosiatkowych wskazuje zarazem rozwiązanie prowadzące do jednego z celów pracy, co przedstawione jest w podrozdziale 1.3. Uzasadnienie tej części tematu jest zatem dwojakie:

- Znaczne przyspieszenie analizy układów mikrofalowych można osiągnąć dzięki metodom wielosiatkowym.
- Metody wielosiatkowe są atrakcyjne i aktualne na tyle, aby podjąć próbę wykorzystania ich w technice mikrofalowej.

1.2 Stan badań

Pierwsze pojedyncze prace teoretyczne na temat metod wielosiatkowych pojawiały się już w latach 60-tych. Stopniowy wzrost zainteresowań w latach 70-tych doprowadził do prawdziwego rozkwitu, który przypada na lata 80-te. W przeciągu tej dekady liczba publikacji, według spisu bibliografii obejmującego głównie działy matematyki stosowanej i metod numerycznych [51], wzrosła z 31 do 285 rocznie. Z tego okresu pochodzą opracowania zawierające praktyczne wprowadzenie do metod wielosiatkowych [36, 81, 127, 29, 30, 119, 63]. Osiągając szczyt w roku 1994 (396 publikacji) liczba prac teoretycznych i podstawowych zaczęła stopniowo maleć do poziomu 37

w roku 1999. Jednak druga połowa lat 90-tych to z kolei okres największego poziomu „konsumpcji” metod wielosiatkowych w innych dziedzinach nauki, na co wskazuje liczba pozycji literatury przywołanych przez bazę INSPEC na hasło „multigrid”. Można więc powiedzieć, że metody wielosiatkowe, będąc już dojrzałym i rozbudowanym działem matematyki stosowanej i metod numerycznych, mają wciąż świeżą historię intensywnego rozwoju zastosowań praktycznych.

Metody wielosiatkowe posiadają wiele kategorii zależnych od takich parametrów, jak typ zagadnień ciągłych (równania różniczkowe, całkowe, zagadnienia własne), rodzaj równań różniczkowych (eliptyczne, hiperboliczne, paraboliczne, liniowe, nieliniowe), metoda dyskretyzacji (elementy skończone, różnice skończone, elementy brzegowe, objętości skończone), metoda organizacji siatek (bazy hierarchiczne [46, 9], bazy węzłowe, siatki adaptacyjne, siatki złożone). Istnieją też takie odmiany, jak metody algebraiczne [25, 107], metody z dekompozycją dziedziny [38, 53], czy zrównoleglone [26].

Metody wielosiatkowe potwierdziły swe zalety w wielu dziedzinach, z których najliczniej reprezentowanymi są mechanika płynów [117, 64] i termodynamika [33, 1], a inne to fizyka atomowa [130], chemia kwantowa [54], akustyka [55], czy przetwarzanie obrazu [98]. Przytoczone powyżej cytowania stanowią jedynie przykładowy ślad dorobku literaturowego i nie oddają skali zainteresowania tymi tematami.

Stosunkowo słaba jest jednak reprezentacja zagadnień związanych z polem elektromagnetycznym, a w szczególności dotyczących układów i elementów mikrofalowych. Wiele pozycji literaturowych mylnie sugeruje stosowanie metod wielosiatkowych rozumianych jako określone algorytmy poprawy zbieżności iteracyjnego rozwiązywania układów równań linowych. Chodzi tu przede wszystkim o tzw. wielosiatkowe metody TLM [131, 69] i FDTD [129, 87], gdzie termin „multigrid” oznacza jedynie połączenie ze sobą siatek o różnej gęstości (subgridding), tymczasem powinny być określone raczej jako „multiresolution” (multiresolution time domain – MRTD, multiresolution analysis – MRA) [59].

Ściślej związane z metodami wielosiatkowymi są metody rozpowszechnione od niedawna w zagadnieniach dotyczących anten i rozpraszania elektromagnetycznego, które wywodzą się z zaproponowanego w 1991 wielopoziomowego algorytmu rozwiązywania równań całkowych [32] oraz metody momentów [70, 21]. Najbardziej popularną odmianą są oparte na szybkiej metodzie wielobiegunowej (fast multipole method – FMM) [125] wielopoziomowe szybkie algorytmy wielobiegunowe (multilevel fast multipole algorithm – MLFMA), które redukują pamięciochłonność i przyspieszają mnożenie macierzy razy wektor w metodzie gradientów sprzężonych (CG). Po raz pierwszy zastosowane w rozpraszaniu elektromagnetycznym w 1994 [77] notują stały wzrost zainteresowań od 1998, osiągając poziom 17 publikacji w 2000 i 2001 [78, 123]. Wielopoziomowe metody momentów zaproponowano również do analizy pełnofalowej struktur planarnych [134, 99] i zagadnień statycznych [135]. Klasyczną metodę wielosiatkową z elementami skończonymi w rozpraszaniu elektromagnetycznym reprezentuje [2].

Równie krótka, lecz mniej intensywna, jest historia zastosowań metod wielosiatkowych przydatnych w analizie układów i elementów mikrofalowych. Pełna lista cytowań obejmuje następujące zagadnienia:

- analiza elektrostatyczna – [126, 93, 94, 111, 121, 95, 74, 41]
- analiza magnetostatyczna – [73, 42, 71, 112, 61, 88] (pominięto prace dotyczące magnetycznych właściwości materiałów)
- zagadnienia własne (w tym elementy optyki zintegrowanej) – [44, 80, 114, 56]
- równania Maxwella w dziedzinie częstotliwości – [101, 100]
- równania Maxwella w dziedzinie czasu – [65, 17, 18]

Większość z przytoczonych pozycji literatury przypada na ostatnie 3 lata (od 1998), co świadczy o dużej aktualności tej tematyki.

1.3 Cel pracy

Przed pracą stawiane są dwa podstawowe cele

1. Zaproponowanie istniejących oraz stworzenie nowych metod i procedur umożliwiających wszechstronną analizę jak najszerszej klasy pasywnych struktur mikrofalowych, efektywną na tyle, aby nadawała się do sprawnego projektowania złożonych układów z użyciem optymalizacji.
2. Zaproponowanie sposobów wykorzystania bardzo wydajnych i wszechstronnych metod wielosiatkowych w szybkiej analizie układów mikrofalowych w podejściu quasi-statycznym oraz zbadanie możliwości zastosowania metod wielosiatkowych w analizie pełnofalowej.

Przez efektywność należy rozumieć szybkość i dokładność analizy, oszczędne wymagania co do zasobów komputera oraz łatwość przygotowywania zadania. Wszechstronność oznacza zakres klas struktur i zagadnień możliwych do analizy.

Wobec wspomnianego już konfliktu pomiędzy wszechstronnością i efektywnością, ujawniającego się w analizie pełnofalowej, rozsądnym kompromisem prowadzącym do osiągnięcia pierwszego celu pracy jest zastosowanie podejścia quasi-statycznego opartego na schematach zastępczych elementów układu. Należy przy tym wybrać taką formułę analizy quasi-statycznej, która pozwoli zminimalizować jej potencjalne ograniczenia. W przypadku układów stanowiących złożone i „rozległe” (w stosunku do rozmiarów elementów) sieci elementów, otrzymuje się zagadnienie o cechach wieloskalowości, gdzie podejście oparte na schematach zastępczych wydaje się szczególnie uzasadnione [116].

Przed metodami składającymi się na pierwszy cel pracy stawiane są szczegółowe wymagania, które sugerują zarazem podstawowe rozwiązania zaproponowane w pracy:

- możliwość efektywnej analizy i projektowania złożonych i rozległych układów mikrofalowych → **podejście quasi-statyczne**

- elastyczność modelowania pod względem geometrii zagadnienia → dyskretyzacja w dziedzinie przestrzennej, w szczególności metodą **elementów skończonych**
- efektywna dyskretyzacja zagadnienia ciągłego → **adaptacyjne zagęszczanie siatki**
- efektywne rozwiązywanie zagadnienia dyskretnego → **metody wielosiatkowe**

Wymagania powyższe tworzą hierarchię, której rdzeniem są metody wielosiatkowe wskazane właśnie jako drugi cel pracy.

1.4 Główne tezy i zakres pracy

Praca stawia następujące tezy

1. Adaptacyjne metody wielosiatkowe z elementami skończonymi pozwalają na efektywne rozwiązywanie quasi-statycznych zagadnień elektromagnetycznych służące szybkiej analizie pasywnych układów mikrofalowych o dowolnej geometrii wielospójnej.
2. Zastosowanie skalarych potencjałów magnetycznych umożliwia efektywną analizę statyczną pola magnetycznego w strukturach pozbawionych symetrii za pomocą adaptacyjnych metod wielosiatkowych z elementami skończonymi
3. Zastosowanie ekstrapolacji opartej na estymowanym błędzie dyskretyzacji umożliwia znaczącą poprawę efektywności adaptacyjnych metod wielosiatkowych z elementami skończonymi

Jako uzupełnienie analizy quasi-statycznej zaproponowano wykorzystanie metod wielosiatkowych do efektywnej wektorowej analizy pełnofalowej, dwu- i trójwymiarowej, w oparciu o proste procedury analizy skalarnej.

Postać zagadnienia ciągłego. W statycznej analizie pola elektrycznego i magnetycznego poszukuje się rozkładu potencjału skalarne jako rozwiązania równania Laplace’a (ewentualnie Poissona) postaci

$$\nabla k \nabla u = 0,$$

gdzie u jest niewiadomym potencjałem elektrycznym lub magnetycznym, a k to przenikalność elektryczna ε lub magnetyczna μ .

Metody dyskretyzacji. Żeby zaspokoić wymóg elastycznego kształtowania geometrii struktur, do dyskretyzacji zagadnienia ciągłego w analizie statycznej wybrano metodę elementów skończonych – trójkątnych (2D) i czworosiennych

(3D). Ze względu na lepsze możliwości dokładnej estymacji błędu dyskretyzacji, co jest istotne przy ekstrapolacyjnym poprawianiu rozwiązania, ograniczono się do elementów liniowych.

Proponowane metody analizy pełnofalowej zostaną przetestowane dla przypadku dyskretyzacji metodą różnic skończonych na siatce o zmiennym kroku, jednak dopuszczają również stosowanie wprost kompletnych procedur rozwiązywania skalarnych równań różniczkowych cząstkowych z elementami skończonymi.

Struktury układów mikrofalowych. Cele ani tezy pracy nie zawężają zakresu struktur możliwych do analizy bardziej niż wymaga tego podejście quasi-statyczne (struktury wielospójne z dominującym rodzajem quasi-TEM), jednak względy praktyczne każą większą uwagę skupić na układach planarnych. Z tego powodu, bez szkody dla ogólności badań, rozważania będą często osadzone w kontekście techniki mikropaskowej lub koplanarnej.

Rozdział 2

Metody wielosiatkowe

2.1 Wprowadzenie

W najbardziej ogólnym ujęciu metody wielosiatkowe (MG – *multigrid*) [36, 128, 82] należy traktować jako bardzo efektywne *iteracyjne metody* rozwiązywania równań liniowych będących zdyskretyzowaną postacią równań różniczkowych cząstkowych lub równań całkowych. Dyskretyzacja dokonuje aproksymacji zagadnienia zamieniając ciągłą dziedzinę (1D, 2D lub 3D) na dyskretny zbiór punktów przedstawianych w postaci siatki, zaś funkcje niewiadome na wektory niewiadomych wartości funkcji w tych punktach (węzłach siatki). Można w tym celu stosować dowolną metodę umożliwiającą zmianę skali dyskretyzacji, czyli stopnia zagęszczenia siatki. Do najbardziej powszechnych technik należą metody różnic skończonych (FD – *finite difference*), objętości skończonych (FV – *finite volume*) i elementów skończonych (FE – *finite element*) oraz, dla równań całkowych, metody całek skończonych (FI – *finite integrals*) i elementów brzegowych (BE – *boundary elements*). W tych przypadkach metody wielosiatkowe należą do najszybszych spośród obecnie znanych, są przy tym bardzo uniwersalne pod względem złożoności geometrii i warunków brzegowych.

Równanie różniczkowe ze względu na nieznaną funkcję u , po dyskretyzacji na siatce N -węzłowej, przyjmuje w kanonicznym przypadku postać liniowego układu równań $\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{f}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą rzadką $N \times N$. Do rozwiązania tego układu równań stosuje się metody, które dzielą się na dwie zasadnicze klasy – *bezpośrednie* (inaczej *dokładne*) oraz *iteracyjne* (*przybliżone*).

Metody bezpośrednie, do których należą procedura *eliminacji Gaussa* oraz jej modyfikacje (np. metoda *Choleskiego*), wykorzystują rozkład trójkątny LU macierzy i dostarczają rozwiązania dokładnego (w zakresie precyzji maszynowej) w skończonej liczbie operacji arytmetycznych. Dla macierzy pełnej (gęstej) liczba operacji jest $O(N^3)$, zaś zapotrzebowanie na pamięć $O(N^2)$, co w praktyce ogranicza stosowalność metod bezpośrednich do stosunkowo niewielkich macierzy. W przypadku macierzy rzadkich, dla przechowywania samej $\mathbf{A}$ wystarcza już tylko kilka razy N komórek pamięci, jednak gdy $\mathbf{A}$ nie jest wstęgowa lub ma szeroką wstęgę, macierze trójkątne ($\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$) z reguły są pełne. Przykładowo, macierz uzyskana po dyskretyzacji dwuwymiarowego równania Poissona metodą FD na siatce $n \times n$ ($N = n^2$) ma tylko

około $5N$ elementów niezerowych we wstędze o szerokości $2n$, podczas gdy macierze $\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$ mają ich już $2N^{\frac{3}{2}}$. Przy wielkich rozmiarach macierzy, w przypadku konieczności stosowania gęstej dyskretyzacji w celu uzyskania wymaganej dokładności aproksymacji, macierz osiąga wielkie rozmiary i metody bezpośrednie stają się zbyt kosztowne numerycznie. Dodatkowo, w wyniku pogarszającego się uwarunkowania macierzy pojawiają się trudności w samej implementacji metod bezpośrednich. W tych przypadkach ujawniają się zalety metod iteracyjnych.

Iteracyjne rozwiązywanie układu równań liniowych startuje z zadanego przybliżenia początkowego, po czym, w kolejnych krokach, rozwiązanie jest stopniowo poprawiane (aktualizowane) według cyklicznie powtarzanego algorytmu relaksacji. W każdym cyklu poprawiane jest rozwiązanie uzyskane w poprzedniej iteracji stając się coraz lepszym przybliżeniem początkowym dla iteracji następnej. Konieczna liczba iteracji zależy od wymaganej dokładności oraz od szybkości zbieżności samego algorytmu.

Podstawowymi odmianami metod iteracyjnych są procedury stacjonarne (relaksacyjne), takie jak *Jacobiego*, *Gaussa-Seidela* i *SOR* [15]. Są one numerycznie oszczędne (jeśli chodzi o rozmiary pamięci), proste i uniwersalne pod względem struktury macierzy. Jedynym poważnym mankamentem jest stosunkowo powolna zbieżność, co wynika ze specyficznej cechy metod relaksacyjnych polegającej na słabym redukowaniu wolnozmiennych składowych przestrzennego rozwinięcia błędu rozwiązania. Z tego też powodu ich działanie bywa też nazywane *wygładzaniem* (*smoothing*), gdyż błąd, który nie jest do końca usunięty pozostaje wygładzony, a przez to staje się trudny do dalszego redukowania.

Metody wielosiatkowe usuwają tę wadę dzięki cyklicznej zmianie skali dyskretyzacji. Wolnozmienny błąd uzyskany przez wygładzanie na dokładnej siatce, po rzutowaniu na siatkę rozrzedzoną staje się szybkozmienny, a przez to bardziej podatny na wygładzanie, czyli dalszą redukcję. Ze względu na operowanie wieloma *poziomami* dokładności aproksymacji siatek dyskretyzujących metody wielosiatkowe zwane są również *metodami wielopoziomowymi* (*multilevel*), choć nazwa ta czasami rezerwowana bywa dla metod wykorzystujących wielosiatkową koncepcję operowania wieloma poziomami aproksymacji, lecz bez konieczności posługiwania się siatką dyskretyzacji.

Typowym zastosowaniem metod wielosiatkowych są eliptyczne cząstkowe równania różniczkowe, choć mogą być wprost wykorzystane również do bardziej skomplikowanych, niesymetrycznych i nieliniowych układów równań. Wykazują przy tym stałą szybkość zbieżności niezależną od liczby niewiadomych zdyskretyzowanego układu, co wraz z liczbą operacji i zapotrzebowaniem na pamięć bliską $O(N)$ sprawia, że są metodami optymalnymi dla wyjątkowo szerokiej klasy zagadnień. Metody wielosiatkowe mogą być uogólnione dla równań parabolicznych, hiperbolicznych oraz zależnych od czasu.

Koncepcja metod wielosiatkowych została rozszerzona na przypadek, gdzie ani równanie różniczkowe, ani nawet geometryczne podłoże zagadnienia nie są potrzebne do konstruowania wielopoziomowej hierarchii, lecz jedynie macierzowa postać zdyskretyzowanego problemu. Zwane *algebraicznymi metodami wielosiatkowymi* (algebraic multigrid AMG) [107] metody takie dokonują algebraicznego (w odróżnieniu od

geometrycznego) „rozrzadzania” aproksymacji problemu bezpośrednio na macierzy układu równań. Mogą zatem służyć jako uniwersalne metody rozwiązywania równań liniowych z macierzami rzadkimi niezależne od ich geometrycznego pochodzenia. Pewną formą przejściową pomiędzy metodami algebraicznymi i geometrycznymi jest implementacja tzw. *abstrakcyjna* [50], która wymaga dostarczenia kompletu macierzy zagadnienia zdyskretyzowanego „na zewnątrz” procedury wielosiatkowej wraz z macierzami przejść pomiędzy poziomami dyskretyzacji.

2.2 Podstawowe metody iteracyjne

2.2.1 Wybrane własności macierzy

Z punktu widzenia skuteczności wielu metod numerycznych, w tym algorytmów iteracyjnych, ważnych jest kilka cech macierzy $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ($i, j = 1, \dots, N$).

- *rzadka* – wyraźnie przeważają elementy zerowe
- *symetryczna* – $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
- *diagonalnie dominująca*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i}^N |a_{ij}| \quad \text{dla } i = 1, \dots, N$$

- *dodatnio określona (PD)*

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} > 0 \quad \forall \mathbf{u} \neq 0,$$

co oznacza, że wszystkie wartości własne są rzeczywiste i dodatnie; czasami przez dodatnią określoność rozumie się również symetrię (SPD); w macierzy SPD i diagonalnie dominującej $a_{ii} > 0$

- *M-macierz* – SPD oraz $a_{ii} > 0$, $a_{ij} \leq 0$ dla $j \neq i$; przykładem jest macierz równania Laplace’a zdyskretyzowanego metodą FD

2.2.2 Podstawowe algorytmy

Algorytm iteracyjnego rozwiązywania układu równań liniowych $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ polega na przetworzeniu, w m -tym kroku iteracji poprzedniego przybliżenia $\mathbf{u}^{(m-1)}$

$$\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{G}_{(\mathbf{A}, \mathbf{f})}(\mathbf{u}^{(m-1)}) \quad \text{dla } m = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

gdzie $\mathbf{G}$ oznacza schemat iteracji zależny od $\mathbf{A}$ i $\mathbf{f}$, a $\mathbf{u}^{(0)}$ jest przybliżeniem początkowym. Podstawowymi metodami iteracyjnymi są metody *stacjonarne liniowe*, w których $\mathbf{G}$ jest niezmienny w toku iteracji (niezależny od m) i niezależny od $\mathbf{u}^{(m)}$. Ta klasa metod iteracyjnych bywa nazywana *relaksacyjnymi*.

Najprostszą z nich jest *metoda Jacobiego* stosowana dla macierzy o niezerowych elementach na przekątnej. W każdym kroku iteracji rozwiązuje się kolejno równania $i = 1, \dots, N$ ze względu na niewiadomą $u_i^{(m)}$, podczas gdy pozostałe niewiadome $j \neq i$ mają wartości obliczone w poprzedniej iteracji $u_j^{(m-1)}$

$$u_i^{(m)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{(m-1)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} u_j^{(m-1)} \right). \quad (2.2)$$

Wektor $\mathbf{u}^{(m)}$ jest aktualizowany w całości dopiero po rozwiązaniu wszystkich równań. Rozbijając macierz $\mathbf{A}$ na sumę przekątnej $\mathbf{D}$ oraz dolnej i górnej macierzy trójkątnej $-\mathbf{L}$ i $-\mathbf{U}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - (\mathbf{L} + \mathbf{U}), \quad (2.3)$$

(2.2) można przedstawić w formie

$$\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{G}_J \mathbf{u}^{(m-1)} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{f}, \quad (2.4)$$

gdzie

$$\mathbf{G}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \quad (2.5)$$

jest *macierzą iteracji*.

Uogólniając zapis podziału macierzy $\mathbf{A}$ (2.3)

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N} \quad (2.6)$$

można zapisać każdą podstawową metodę iteracyjną jako

$$\mathbf{M} \mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{N} \mathbf{u}^{(m-1)} + \mathbf{f}, \quad (2.7)$$

wtedy macierz iteracji $\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$.

W metodzie Jacobiego $\mathbf{M} = \mathbf{D}$ i $\mathbf{N} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})$.

Poszczególne metody różnią się więc sposobem podziału (2.6), przy czym w każdym przypadku powinien on charakteryzować się łatwym odwracaniem macierzy $\mathbf{M}$.

Dla metody określonej przez (2.6) istnieje wariant *stłumiony* (damped) zwany też *ważonym*, który otrzymuje się przez modyfikację macierzy $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ [128]

$$\mathbf{M}_\omega = \frac{\mathbf{M}}{\omega}, \quad \mathbf{N}_\omega = \mathbf{M}_\omega - \mathbf{A}, \quad (2.8)$$

gdzie ω jest rzeczywistym współczynnikiem wagi.

Ważona metoda Jacobiego ma zatem postać

$$\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{G}_\omega \mathbf{u}^{(m-1)} + \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{f} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{G}_\omega = (1 - \omega) \mathbf{I} + \omega \mathbf{G}_J, \quad (2.10)$$

co w szczególnym przypadku $\omega = 1$ daje prostą metodę Jacobiego (2.4).

Analogicznie skonstruowana jest *metoda Gaussa-Seidela*. Podział macierzy $\mathbf{A}$ w metodzie prostej jest następujący

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{L}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{U} \quad (2.11)$$

Od metody Jacobiego różni się tym, że po rozwiązaniu i -tego równania, nowo obliczona wartość $u_i^{(m)}$ natychmiast aktualizuje wektor $\mathbf{u}^{(m)}$ i wstawiana jest do następnych równań jeszcze w tym samym kroku iteracji. Z tego powodu istotna dla przebiegu iteracji i skuteczności metody jest kolejność przemiatania niewiadomych (kolejność rozwiązywania równań) ze względu na ich położenie na siatce dyskretyzacji, czyli porządek numeracji węzłów siatki. Ponieważ klasyfikacja numeracji odwołuje się do ściśle regularnej siatki (przecięcie kierunków i płaszczyzn stałych współrzędnych), ma ona zastosowanie głównie w metodach różnicowych (np. FD).

Odmianą ważonej metody Gaussa-Seidela jest *metoda SOR* (successive over-relaxations) o następującym podziale macierzy $\mathbf{A}$

$$\mathbf{M}_\omega = \mathbf{D} - \omega\mathbf{L}, \quad \mathbf{N}_\omega = (1 - \omega)\mathbf{D} + \omega\mathbf{U}. \quad (2.12)$$

Metoda ta szczególnie przydatna jest przy macierzach źle uwarunkowanych (o dużym współczynniku uwarunkowania $\text{cond}(\mathbf{A})$). Jednak jej efektywność bardzo zależy od wagi ω . Aby metoda była zbieżna, wymagane jest $\omega \in (0, 2)$ [15], chociaż optymalne dobranie wartości jest zadaniem trudnym. Dla macierzy zdyskretyzowanego eliptycznego równania różniczkowego, przy pewnych typach numeracji $\omega_{\text{opt}} = 2/(1 + \sqrt{1 - \rho^2})$, gdzie ρ jest promieniem spektralnym macierzy Jacobiego $\mathbf{G}_J$. Nawet w tym przypadku pozostaje problem taniego wyznaczenia dominującej wartości własnej.

Odmianą metody SOR dla symetrycznych macierzy $\mathbf{A}$ jest SSOR.

2.2.3 Zbieżność

Dla dowolnej metody o macierzy iteracji $\mathbf{G}$, przybliżenie rozwiązania po m krokach iteracji można określić względem wektora startowego $\mathbf{u}^{(0)}$

$$\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{G}^m \mathbf{u}^{(0)} + C(\mathbf{f}), \quad (2.13)$$

gdzie $C(\mathbf{f})$ oznacza m -krotne przetworzenie wektora $\mathbf{f}$. Oznaczając rozwiązanie dokładne jako $\mathbf{u}_0$ iteracje (2.13) można wyrazić w odniesieniu do wektora błędu $\mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}_0$

$$\mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{G}^m \mathbf{e}^{(0)}, \quad (2.14)$$

gdyż iteracje nie zmieniają $\mathbf{u}_0$. Iteracje zbiegają się do rozwiązania dokładnego $\mathbf{u}^{(m)} \rightarrow \mathbf{u}_0$, gdy $\|\mathbf{e}^{(m)}\| \rightarrow 0$. Zatem iteracje o macierzy $\mathbf{G}$ są zbieżne dla dowolnego $\mathbf{e}^{(0)}$, gdy $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{G}^m\| = 0$, co zachodzi pod warunkiem [128, 36], że promień spektralny macierzy iteracji

$$\rho(\mathbf{G}) < 1. \quad (2.15)$$

Redukcja błędu początkowego o d rzędów wielkości – $\|\mathbf{e}^{(m)}\| \leq \|\mathbf{e}^{(0)}\| 10^{-d}$ wymaga liczby iteracji $m \geq d/R_m$ określonej poprzez *szybkość zbieżności*

$R_m = -\log \|\mathbf{G}^m\|/m$, co przy $m \rightarrow \infty$ zastępuje się *asymptotyczną szybkością zbieżności*

$$R = -\log \rho(\mathbf{G}). \quad (2.16)$$

Zbieżność iteracji jest więc tym szybsza im $\rho(\mathbf{G}) = \max |\lambda(\mathbf{G})|$ jest bliższy zera.

2.2.4 Właściwości wygładzające

Szczegółową analizę wygładzających właściwości metod relaksacyjnych można znaleźć w [128]. Tutaj zostaną one zademonstrowane na przykładzie jednowymiarowego równania Poissona $-\nabla^2 u(x) = f$ dla $x \in (0, 1)$, z jednorodnymi warunkami Dirichleta $u(x=0) = u(x=1) = 0$, zdyskretyzowanego metodą różnic skończonych na siatce równomiernej o kroku h . Różnicowe przybliżenie równania Poissona ma postać

$$\begin{aligned} (2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}) &= h^2 f_j \quad \text{dla } j = 1, \dots, n-1 \quad \text{i} \quad h = \frac{1}{n} \\ u_0 &= u_n = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Macierz współczynników tego równania $\mathbf{A}$ o rozmiarze $N \times N$ ($N = n-1$) jest rzadka i pasmowa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Macierz iteracji ważonej metody Jacobiego (2.9) w tym przypadku oraz jej wartości własne są

$$\mathbf{G}_\omega = \mathbf{I} - \frac{\omega}{2} \mathbf{A} \quad \lambda(\mathbf{G}_\omega) = 1 - \frac{\omega}{2} \lambda(\mathbf{A}).$$

Zestawom wartości własnych obydwu macierzy $\lambda_k(\mathbf{A})$ i $\lambda_m(\mathbf{G}_\omega)$ dla $k = 1, \dots, n-1$ odpowiada ten sam zestaw wektorów własnych $\mathbf{v}_k = \{v_{k,j}\}$ dla $j = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} \lambda_k(\mathbf{G}_\omega) &= 1 - 2\omega \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \\ \mathbf{v}_{k,j} &= \sin \left(\frac{jk\pi}{n} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Koncentrując uwagę na wartościach własnych macierzy iteracji można wprowadzić uproszczone oznaczenie $\lambda_k \equiv \lambda_k(\mathbf{G}_\omega)$.

Błąd po m -tej (w tym $m=0$) iteracji można rozwinąć w szereg Fouriera względem układu wektorów $\mathbf{w}_k$

$$\mathbf{e}^{(0)} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \mathbf{w}_k \quad \mathbf{e}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k^{(m)} \mathbf{w}_k \quad \text{dla} \quad w_{k,j} = \sin \left(\frac{jk\pi}{n} \right). \quad (2.20)$$

Ponieważ w tym przypadku $\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k$, jest to zarazem rozwinięcie względem wektorów własnych macierzy $\mathbf{G}_\omega$. Zmianę współczynników rozwinięcia w jednym kroku iteracji $c_k^{(m)} = g_k c_k^{(m-1)}$ określa g_k zwany *współczynnikiem wzmocnienia* [128] lub *współczynnikiem zbieżności* [36] k -tej składowej (modu) błędu.

Wiedząc, że $\mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{G}_\omega^m \mathbf{e}^{(0)}$ (2.14) dostajemy

$$\mathbf{e}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k (\mathbf{G}_\omega^m \mathbf{w}_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (c_k g_k^m) \mathbf{w}_k, \quad (2.21)$$

co przy $\mathbf{G}_\omega \mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$ oraz $\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k$ oznacza, że

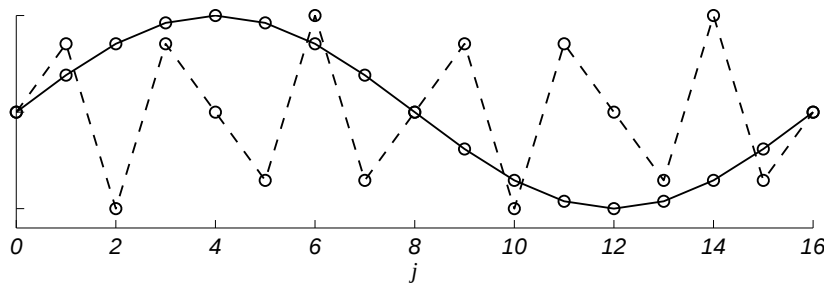
$$\mathbf{e}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \lambda_k^m \mathbf{w}_k, \quad (2.22)$$

więc $g_k = \lambda_k$. Zbieżność iteracji odniesiona do każdej składowej rozwinięcia błędu oddzielnie ($c_k^{(m)} \rightarrow 0$) zachodzi, gdy $|g_k| < 1$, czyli $|\lambda_k| < 1$. Przez analogię do (2.16) można określić asymptotyczną szybkość zbieżności k -tego modu błędu $R_k = -\log |\lambda_k|$.

Przestrzenny rozkład składowej k błędu $\mathbf{e}_k^{(m)} = c_k \mathbf{w}_k$ na siatce o węzłach numerowanych przez j wyznacza zależność $w_{k,j}$ (2.19) od j . Wprowadzając pojęcie liczby falowej β_k określającej przestrzenną częstotliwość zmian $w_{k,j}$

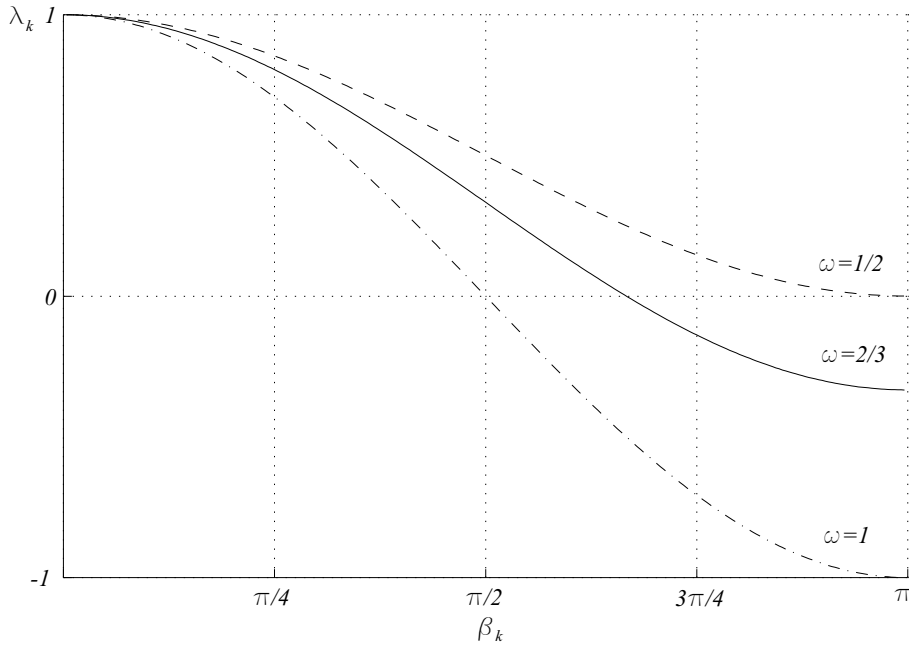
$$\beta_k = \frac{k\pi}{n} \in (0, \pi) \quad w_{k,j} = \sin(j\beta_k), \quad (2.23)$$

w rozwinięciu błędu można wyróżnić składowe *wolnozmiennie* (*gładkie*), o małym β_k , i *szybkozmiennie* (*zgrubne*, *oscylacyjne*), o dużym β_k (rys. 2.1). Dla dyskretyzacji o ustalonej liczbie punktów $n + 1$ równoważnym kryterium tej klasyfikacji jest numer modu k .



Rysunek 2.1: Przykłady modów na siatce $n = 16$; wolnozmienny (gładki) ($k = 2$, $\beta_2 = 0.393$, linia ciągła) i szybkozmienny (oscylacyjny) ($k = 12$, $\beta_{12} = 2.36$, linia przerywana).

Analizując zależność $g_k = \lambda_k$ (2.19) od β_k przy zmieniającym się k (rys. 2.2) wiadać, że wszystkie mody są zbieżne, jeśli tylko $\omega \leq 1$, jednak szybkość ich zbieżności będzie bardzo zróżnicowana. W przypadku prostej metody Jacobiego ($\omega = 1$) zarówno bardzo wolno- jak i bardzo szybkozmiennie składowe wykazują słabą zbieżność.



Rysunek 2.2: Zależność $g_k = \lambda_k(\mathbf{G}_\omega)$ od liczby falowej β_k dla iteracji ważonych Jacobiego przy różnych wartościach ω . Wartość $\beta_k = \pi/2$ jest umowną granicą między modami wolno- i szybkozmiennymi. Dla $\omega = 2/3$ uzyskuje się najlepszą szybkość zbieżności w całym zakresie modów szybkozmiennych.

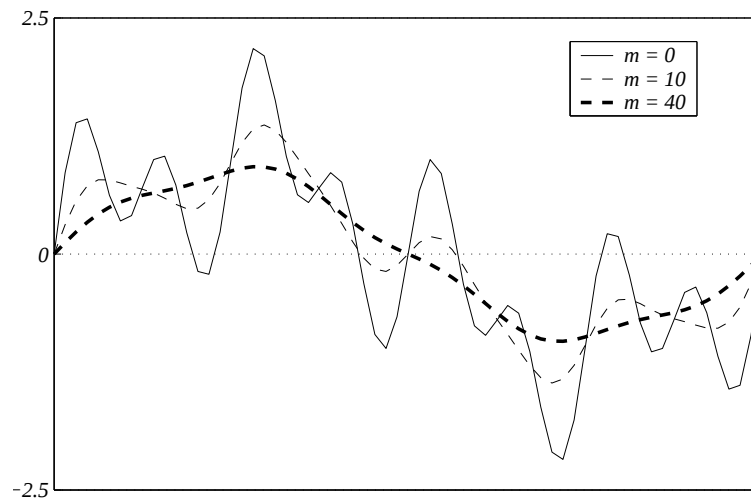
O ile składowe szybkozmiennie można wyraźnie stłumić (przyspieszyć zbieżność) w ważonej odmianie metody, przez odpowiedni dobór ω , to **składowe wolnozmiennie zawsze będą słabozbieżne**.

Taki sam charakter zależności $g_k(\beta_k)$ uzyskuje się dla metody Gaussa-Seidela [36], mimo iż wektory własne macierzy iteracji nie są już równe wektorom rozwinięcia błędu w szereg Fouriera ($v_k \neq w_k$), więc $g_k \neq \lambda_k$.

W trakcie iteracji, z przestrzennego widma błędu w pierwszej kolejności będą efektywnie usuwane składniki szybkozmiennie, zaczną więc dominować elementy wolnozmiennie sprawiając, że rozkład błędu będzie coraz gładszy tym samym stając się coraz bardziej odporny na dalszą redukcję. W konsekwencji zbieżność ulegnie bardzo silnemu spowolnieniu. Właściwość ta, zwana *wygładzaniem*, stanowi istotną wadę, którą dzielą wszystkie standardowe metody relaksacyjne, przez co określa się je jako *wygładzające* (smoothers) (rys. 2.3).

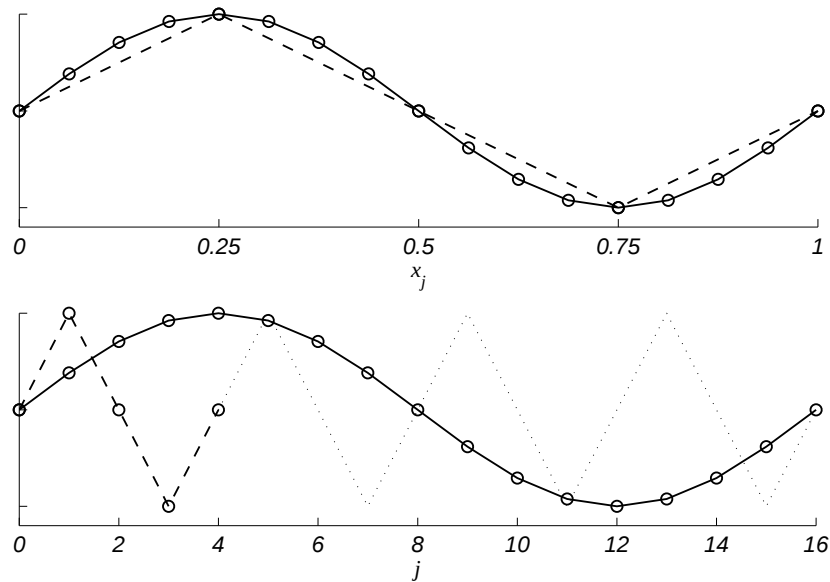
Należy zauważyć, że zbieżność mierzona wielkością $|g_k|$ zależy również od gęstości siatki dyskretyzacji. Zwiększanie liczby punktów n ($h \rightarrow 0$) spowoduje, że $\beta_k \rightarrow 0$, co oznacza $|g_k| \rightarrow 1$. Chcąc zatem poprawić dokładność dyskretnej aproksymacji problemu ciągłego, poprzez zmniejszanie kroku h , będzie się zarazem nieuchronnie pogarszała zbieżność rozwiązania samego problemu dyskretnego.

Z drugiej jednak strony, rozrzedzanie siatki sprawi, że wolnozmienny przebieg błędu, o małym β_k stanie się bardziej oscylacyjny, dzięki wzrostowi β_k , a tym samym szybciej zbieżny. Trzeba przy tym zwrócić uwagę na stosowaną tu interpretację „wolnozmienny” i „szybkozmienny”. Dla tego samego przebiegu w_k szybkość zmian



Rysunek 2.3: Wyglądające działanie metod relaksacyjnych, na przykładzie ważonej metody Jacobiego ($\omega = 2/3$), po m iteracjach. Błąd początkowy ($m = 0$) złożony jest z modów o $k = 1, 4, 8$ na siatce $n = 32$ i amplitudach odpowiednio $c_1 = 1$, $c_4 = 0.7$, $c_8 = 0.7$.

w dziedzinie zdyskretyzowanej fizycznej przestrzeni $\{x_j\}$ jest stała niezależnie do kroku h



Rysunek 2.4: Wolnozmienny (gładki) składnik $k = 2$ na siatce $n = 16$ ($\beta_2 = 0.393$) (linia ciągła) i jego obraz na siatce rozrzedzonej $n = 4$ ($\beta_2 = 1.57$) (linia przerywana). Rozrzedzenie siatki sprawia, że przebieg $w_2(x_j)$ staje się mniej gładki, ale dopiero zależność $w_2(j)$ jest szybciej zmienna (oscylacyjna).

$$w_k(x_j) = \sin\left(x_j \frac{k\pi}{x_n}\right) \quad x_j = jh \quad \text{przy} \quad j = 0, \dots, n, \quad (2.24)$$

gdyż liczba falowa $k\pi/x_n$ nie zależy od h . Nas jednak interesuje szybkość zmian przy skoku do następnego punktu siatki, czyli w dziedzinie samych numerów węzłów dyskretyzacji $\{j\}$

$$w_k(j) = \sin(jk\pi h) \quad j = 0, \dots, n \quad \text{dla} \quad n = \frac{1}{h}, \quad (2.25)$$

a w tym przypadku liczba falowa $\beta_k = k\pi h$ wzrasta z h (rys. 2.4).

Mechanizm poprawy zbieżności poprzez „przyspieszanie” wolnozmiennych przebiegów błędu na rozrzedzonej siatce, wykorzystany w taki sposób, aby nie pogorszyć dokładności aproksymacji, stanowi właśnie podstawę metod wielosiatkowych.

2.3 Zasada metod wielosiatkowych

Koncepcja metod wielosiatkowych oparta jest na poprawie zbieżności iteracji wolnozmiennych składowych błędu rozwiązania układu równań przy wykorzystaniu dyskretyzacji na rozrzedzonej siatce.

Iteracyjne rozwiązywanie układu równań $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ w ν krokach dla przybliżenia początkowego $\mathbf{u}^{(0)}$:

- rozwiązać w ν iteracjach: $\mathbf{u}^{(0)} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{u}^{(\nu)}$

rozbija się na równoważny schemat złożony z dwóch części $\nu = \nu_u + \nu_e$:

- rozwiązać wstępnie, w ν_u iteracjach: $\mathbf{u}^{(0)} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{u}^{(\nu_u)}$
- obliczyć residuum: $\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(\nu_u)}$
- rozwiązać równanie residualne w ν_e iteracjach: $\mathbf{e}^{(0)} = 0 \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{e}^{(\nu_e)}$
- skorygować rozwiązanie $\mathbf{u}$: $\mathbf{u}^{(\nu)} = \mathbf{u}^{(\nu_u)} + \mathbf{e}^{(\nu_e)}$

Takie przedstawienie iteracyjnego rozwiązywania układu równań, a ściślej wprowadzenie etapu korekcji rozwiązania $\mathbf{u}$ błędem $\mathbf{e}$ stanowi punkt wyjścia dla konstruowania algorytmów wielosiatkowych. O ile oryginalny układ równań $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ musi zapewniać założoną dokładność aproksymacji problemu ciągłego poprzez dyskretyzację na dostatecznie gęstej siatce, to równanie residualne $\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{r}$ ma jedynie dostarczyć korekty rozwiązania w postaci przybliżonego błędu, nie podlega więc nakazowi dobrej dokładności aproksymacji. Wobec tego korekta $\mathbf{e}^{(\nu_e)}$ może być uzyskana na zgrubnej (rozrzedzonej) siatce, gdzie składowe wolnozmiennne błędy¹ ulegają „rozruszaniu”, przez co są szybciej redukowane, prowadząc do przyspieszenia zbieżności rozwiązania równania.

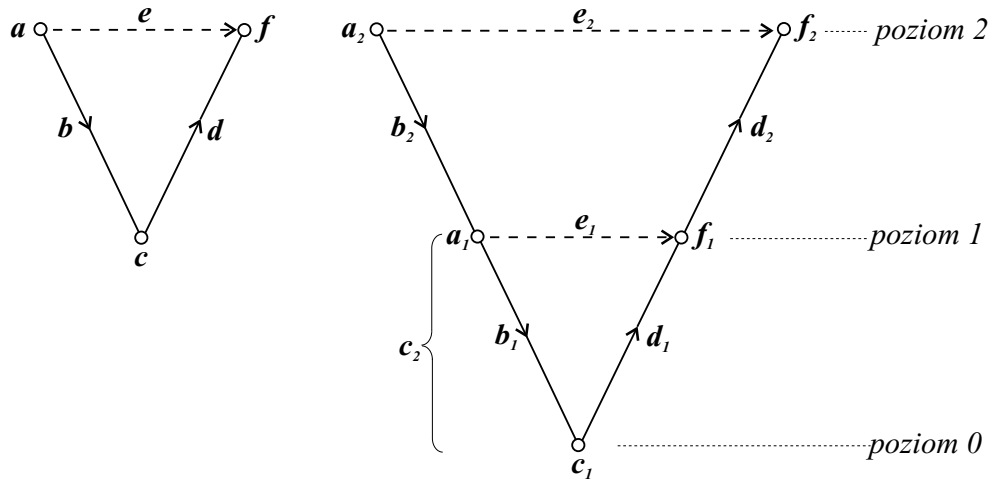
W ten sposób powstanie schemat oparty na tzw. *korekcji zgrubną siatką* (coarse grid correction), która jest charakterystycznym i niezbędnym elementem wszystkich algorytmów wielosiatkowych. Oznaczając siatkę dokładną (gęstą) krokiem h_f ,

¹chodzi o błąd rozwiązania równania residualnego ze względu na błąd $\mathbf{e}$, a nie o sam błąd $\mathbf{e}$

a zgrubną (rzadką) h_c ($h_c > h_f$) dostajemy procedurę, którą można nazwać *dwusiatkową*:

- | | |
|--|---|
| (a) rozwiązać na siatce h_f | |
| w ν_1 iteracjach: | $\mathbf{u}^{(0)} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{u}^{(\nu_1)}$ |
| obliczyć residuum: | $\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(\nu_1)}$ |
| (b) przenieść $\mathbf{r}$ na siatkę h_c : | $\mathbf{r} \rightarrow \tilde{\mathbf{r}}$ |
| (c) rozwiązać równanie residualne na siatce h_c | |
| w ν_c iteracjach: | $\tilde{\mathbf{e}}^{(0)} = 0 \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{r}} \rightarrow \tilde{\mathbf{e}}^{(\nu_c)}$ |
| (d) przenieść $\tilde{\mathbf{e}}^{(\nu_c)}$ na siatkę h_f : | $\tilde{\mathbf{e}}^{(\nu_c)} \rightarrow \mathbf{e}^{(\nu_c)}$ |
| (e) skorygować rozwiązanie $\mathbf{u}$: | $\mathbf{u}^{(\nu_{1c})} = \mathbf{u}^{(\nu_1)} + \mathbf{e}^{(\nu_c)}$ |
| (f) rozwiązać na siatce h_f | |
| w ν_2 iteracjach: | $\mathbf{u}^{(\nu_{1c})} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{u}^{(\nu)}$ |

Procedurę tę przedstawiono graficznie na rysunku 2.5. Zawiera ona dodatkowo rozwiązywanie ($\nu_2 = \nu - \nu_1 - \nu_c$ kroków iteracji) oryginalnego układu na dokładnej siatce po wykonaniu korekcji siatką zgrubną. Służy ono do usunięcia oscylacyjnych składników błędu, jakie pojawiają się przy przenoszeniu rozwiązania z rzadszej siatki.



Rysunek 2.5: Graficzne przedstawienie algorytmu *dwusiatkowego* i jego jednokrotne zagnieżdżenie do postaci *wielosiatkowej* o trzech poziomach gęstości siatek (poziom 0 – siatka zgrubna, poziom 2 – siatka dokładna). Ze względu na kształt postaci graficznej algorytmu są nazywane *cyklami V*. Krok (c_2) w cyklu V z poziomu 2 został zastąpiony dwusiatkowym cyklem na poziomie 1 ($a_1 \dots f_1$).

Iteracje o całkowitej liczbie kroków ν zostały podzielone na 3 etapy, w których kolejno redukowane są różne składowe błędy – szybkozmienne (ν_1), wolnozmienne (ν_c) i znów szybkozmienne (ν_2). Podstawowym celem iteracji ν_1 i ν_2 jest usunięcie składowych szybkozmiennych i nazywane są *wygładzaniem wstępnym* (presmoothing) i *wygładzaniem końcowym* (postsmoothing). Zastosowane metody iteracyjne muszą zatem mieć jak najlepsze właściwości wygładzające, natomiast nie jest istotna ich

zdolność redukowania przebiegów już wygładzonych. O ile do sprawnego wygładzenia błędu wystarcza niewielka liczba kroków ν_1 i ν_2 (zwykle od 1 do 3), to redukcja składowych wolnozmiennych poprzez jednokrotną korekcję na siatce rzadkiej, będzie skuteczna tylko w odniesieniu do ich bardziej oscylacyjnej części, w wyniku czego składowe bardzo gładkie pozostaną słabo stłumione. Nasuwa się wobec tego myśl, aby procedurę korekcji pogłębić poprzez zastąpienie ν_c prostych iteracji rozwiązywania równania residualnego (c) na jednej zgrubnej siatce pełną procedurą (a-f) złożoną z korekcji na siatce jeszcze rzadszej. W ten sposób algorytm dwusiatkowy może zostać wielokrotnie rekurencyjnie zagnieżdżony do postaci *wielosiatkowego*, pogłębiając korekcję do poziomów coraz bardziej rozrzedzonych siatek. Graficznie przedstawiono to na rysunku 2.5 dla jednokrotnego zagnieżdżenia. Schematy te, zwane *cyklami V* stanowią podstawowy element wszystkich algorytmów wielosiatkowych.

2.4 Algorytmy wielosiatkowe

Żeby ułatwić rekurencyjną definicję schematów wielosiatkowych, wprowadzone zostaną następujące oznaczenia.

$\{\Omega^l : l = 0, \dots, L\}$ – sekwencja zagęszczających się siatek o krokach $h_l : h_l < h_{l-1}$, gdzie l to poziom zagęszczenia w stosunku do siatki najrzadszej

$\mathbf{A}^l \mathbf{u}^l = \mathbf{f}^l$ – układ równań problemu zdyskretyzowanego na siatce z poziomu l

$\mathbf{G}^l(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{f}, \nu)$ – ν kroków iteracyjnego (relaksacyjnego) rozwiązania (wygładzającego) układu $\mathbf{A}^l \mathbf{u}^l = \mathbf{f}^l$ dla przybliżenia początkowego $\tilde{\mathbf{u}}$

$\mathbf{P}^l \mathbf{v}^{l-1} \rightarrow \mathbf{v}^l$ – operator *prolongacji* (*interpolacji*) przenoszący wektor $\mathbf{v}$ z poziomu $l-1$ na l

$\mathbf{R}^l \mathbf{v}^l \rightarrow \mathbf{v}^{l-1}$ – operator *restrykcji* przenoszący wektor $\mathbf{v}$ z poziomu l na $l-1$

Algorytm dwusiatkowego cyklu V, czyli najprostszej implementacji zasady korekcji zgrubną siatką, ma postać:

Algorytm (*dwusiatkowy cykl V*): $\mathbf{V2G}^l(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{f}) \rightarrow \mathbf{u}^l$

- (a) $\mathbf{G}^l(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{f}, \nu_1) \rightarrow \mathbf{u}^l$ (*wygładzanie wstępne*)
 $\mathbf{r}^l = \mathbf{f}^l - \mathbf{A}^l \mathbf{u}^l$
- (b) $\mathbf{R}^l \mathbf{r}^l \rightarrow \mathbf{f}^{l-1}$ (*restrykcja*)
- (c) $\mathbf{G}^{l-1}(\tilde{\mathbf{u}}^{l-1} = 0, \mathbf{f}, \nu_c) \rightarrow \mathbf{u}^{l-1}$ (*rozwiązanie na siatce rozrzedzonej*)
- (d) $\mathbf{P}^{l-1} \mathbf{u}^{l-1} \rightarrow \mathbf{e}^l$ (*prolongacja*)
- (e) $\mathbf{u}^l \leftarrow \mathbf{u}^l + \mathbf{e}^l$ (*korekcja rozwiązania*)
- (f) $\mathbf{G}^l(\mathbf{u}, \mathbf{f}, \nu_2) \rightarrow \mathbf{u}^l$ (*wygładzanie końcowe*)

Oznaczenia literowe poszczególnych kroków odpowiadają graficznej formie algorytmu z rysunku 2.5.

Rekurencyjna definicja wielosiatkowego cyklu V na poziomie l powstanie po zastąpieniu w kroku (c) iteracji $\mathbf{G}^{l-1}$ tym samym cyklem V . Jednakże na najniższym, zerowym poziomie (siatka najrzadsza) wykonanie korekcji jeszcze rzadszą siatką jest niemożliwe, więc dla $l = 0$ trzeba zastosować metodę jednosiatkową, np. zwykłą metodą relaksacyjną z ν_c iteracjami. Najczęściej siatka jest na tyle rzadka, że macierz układu $\mathbf{A}^0$ jest wystarczająco mała, aby zastosować jako $\mathbf{G}^0$ dokładną metodę bezpośrednią (np. eliminację Gaussa).

Algorytm (*cykl V*): $\mathbf{V}^l(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{f}) \rightarrow \mathbf{u}^l$

- (a) $\mathbf{G}^l(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{f}, \nu_1) \rightarrow \mathbf{u}^l$
 $\mathbf{r}^l = \mathbf{f}^l - \mathbf{A}^l \mathbf{u}^l$
- (b) $\mathbf{R}^l \mathbf{r}^l \rightarrow \mathbf{f}^{l-1}$
- (c) if($l - 1 > 0$)
 $\mathbf{V}^{l-1}(\tilde{\mathbf{u}} = 0, \mathbf{f}) \rightarrow \mathbf{u}^{l-1}$ (*cykl V na siatce rozrzedzonej*)
 else
 $\mathbf{G}^0(\tilde{\mathbf{u}}^0 = 0, \mathbf{f}, \nu_c) \rightarrow \mathbf{u}^0$
 end
- (d) $\mathbf{P}^{l-1} \mathbf{u}^{l-1} \rightarrow \mathbf{e}^l$
- (e) $\mathbf{u}^l \leftarrow \mathbf{u}^l + \mathbf{e}^l$
- (f) $\mathbf{G}^l(\mathbf{u}, \mathbf{f}, \nu_2) \rightarrow \mathbf{u}^l$

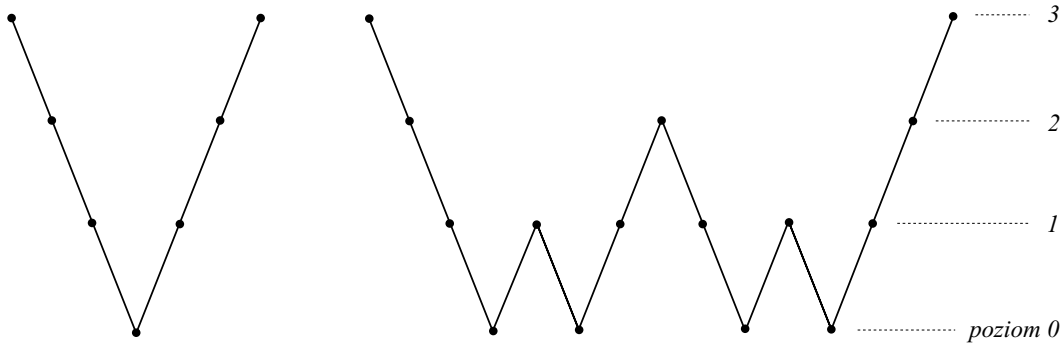
Odmianą cyklu V jest *cykl W*, który różni się jedynie tym, że na każdym poziomie korekcja wykonywana jest dwukrotnie. Jest bardziej wszechstronny, lecz trudniejszy do implementacji zrównoleglonej [128].

Algorytm (*cykl W*): $\mathbf{W}^l(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{f}) \rightarrow \mathbf{u}^l$

- (a) $\mathbf{G}^l(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{f}, \nu_1) \rightarrow \mathbf{u}^l$
 $\mathbf{r}^l = \mathbf{f}^l - \mathbf{A}^l \mathbf{u}^l$
- (b) $\mathbf{R}^l \mathbf{r}^l \rightarrow \mathbf{f}^{l-1}$
- (c) if($l - 1 > 0$)
 $\mathbf{W}^{l-1}(\tilde{\mathbf{u}} = 0, \mathbf{f}) \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}^{l-1}$ (*pierwszy cykl W na siatce rozrzedzonej*)
 $\mathbf{W}^{l-1}(\tilde{\mathbf{u}}^{l-1}, \mathbf{f}) \rightarrow \mathbf{u}^{l-1}$ (*drugi cykl W na siatce rozrzedzonej*)
 else
 $\mathbf{G}^0(\tilde{\mathbf{u}}^0 = 0, \mathbf{f}, \nu_c) \rightarrow \mathbf{u}^0$
 end
- (d) $\mathbf{P}^{l-1} \mathbf{u}^{l-1} \rightarrow \mathbf{e}^l$
- (e) $\tilde{\mathbf{u}}^l \leftarrow \mathbf{u}^l + \mathbf{e}^l$
- (f) $\mathbf{G}^l(\mathbf{u}, \mathbf{f}, \nu_2) \rightarrow \mathbf{u}^l$

Algorytm ten można rozwinąć do jeszcze bardziej ogólnej postaci, gdzie na każdym poziomie l korekcja wykonywana jest μ_l razy. Cykle V i W (rys. 2.6) otrzymuje się dla $\mu_l = 1$ i $\mu_l = 2$, odpowiednio. Jeśli μ_l zmienia się zależnie od l i zależy od osiąganego na bieżąco zbieżności, otrzymamy tzw. *schemat adaptacyjny*² [128].

²Chodzi tu o poprawę dokładności rozwiązywania układu równań, inaczej niż w *adaptacyjnych metodach wielosiatkowych* (rozdział 2.5), gdzie adaptacyjnie zagęszczana jest siatka w celu poprawy dokładności dyskretyzacji



Rysunek 2.6: Graficzna reprezentacja cyklu V ($\mu_l = 1$) i cyklu W ($\mu_l = 2$).

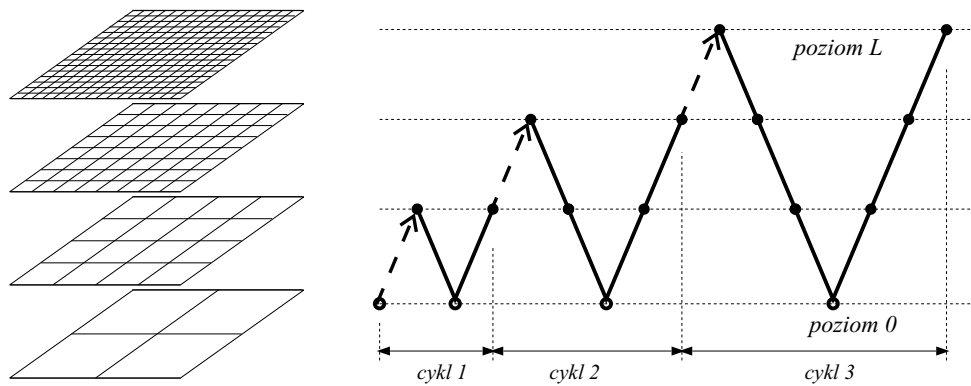
Przedstawione dotychczas algorytmy są odmianami schematu korekcji zgrubną siatką, która pozwala na poprawę rozwiązania uzyskanego na siatce dokładnej. Podejście to można rozwinąć, tak aby dokonywać poprawy rozwiązania otrzymanego na siatce zgrubnej. Algorytm taki startuje z siatki rzadkiej (poziom 0), a więc musi posiadać nowy element – *zagęszczanie siatki*. Rozwiązanie uzyskane na siatce rzadkiej jest prolongowane na siatkę zagęszczoną, gdzie służy jako przybliżenie początkowe. Procedura powtórzona l -krotnie osiąga siatkę na poziomie l . Mimo iż czasami jest ona nazywana schematem *wielosiatkowym jednokierunkowym* (tylko ruch w stronę wyższych poziomów), to nie zawiera jednak elementu stanowiącego atrybut metod wielosiatkowych – korekcji zgrubną siatką eliminującą gładkie składniki błędu. Jeżeli rozwiązanie na kolejno zagęszczanych siatkach wykonywane będzie przy pomocy „prawdziwego” schematu wielosiatkowego – cyklu V, poprawiającego rozwiązanie osiągnięte na dokładnej siatce, to otrzymamy algorytm zwany *pełnym cyklem wielosiatkowym* (FMG) lub *iteracjami zagnieżdżonymi* (nested iterations) – rysunek 2.7.

Rekurencyjna postać algorytmu FMG nie jest tak czytelna, jak w przypadku podstawowych schematów wielosiatkowych (V,W), wygodniej jest więc przedstawić go jako sekwencję kombinacji zagęszczania i cyklu V. Sam cykl V może być po każdym kroku zagęszczania kilkakrotnie powtarzany, aż do osiągnięcia żądanej zbieżności, lub zastąpiony cyklem W. Powtarzanie cyklu V uzależnione od bieżącej dokładności rozwiązania jest najprostszym sposobem na uzyskanie efektu adaptacyjnego kształtowania schematu wielosiatkowego.

Algorytm (FMG): $\text{FMG}^L(\tilde{\mathbf{u}}^0) \rightarrow \mathbf{u}^L$
 $\mathbf{G}^0(\tilde{\mathbf{u}}^0, \mathbf{f}, \nu_c) \rightarrow \mathbf{u}^0$ (rozwiązanie na siatce początkowej)
for ($l = 1, \dots, L$)
 $\mathbf{P}^{l-1} \mathbf{u}^{l-1} \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}^l$ (zagęszczanie)
 $\mathbf{V}^l(\tilde{\mathbf{u}}^l, \mathbf{f}) \rightarrow \mathbf{u}^l$ (cykl V)
end

Algorytm FMG może być wykorzystany na dwa sposoby

- rozwiązanie problemu zadanego na docelowej dokładnej (gęstej) siatce z poziomem L – FMG należy poprzedzić wstępnym rozrzedzeniem problemu (skon-



Rysunek 2.7: Pełny cykl wielosiatkowy oparty na cyklu V. Algorytm jest sekwencją cykli złożonych z zagęszczania (linia przerywana w górę) oraz rozwiązania problemu cyklem V.

struowaniem siatki oraz $\mathbf{A}$ i $\mathbf{f}$) do wszystkich poziomów $l = 0, \dots, L - 1$; technicznie nie różni się to od rozrzedzania występującego w cyklu V

- poprawa rozwiązania na zadanej siatce rzadkiej – FMG trwa aż do osiągnięcia takiego poziomu L , który zagwarantuje wymaganą dokładność dyskretyzacji; najczęściej stosuje się wtedy *adaptacyjne zagęszczanie* siatki.

2.5 Adaptacyjne metody wielosiatkowe

Bardzo atrakcyjnym rozwinięciem pełnego cyklu wielosiatkowego FMG są *adaptacyjne metody wielosiatkowe* [10, 106, 23], w których zagęszczanie siatki ma charakter *adaptacyjny*, to znaczy, automatycznie dopasowuje się do rozkładu bieżącego przybliżenia rozwiązania. Dogęszczanie ma więc też charakter *lokalny*, to znaczy, że rejony o bardziej gwałtownych zmianach funkcji pokrywane są odpowiednio gęstszą siatką. W efekcie otrzymuje się optymalny rozkład węzłów w całym obszarze, czyli optymalną aproksymację problemu ciągłego. Strategia ta daje szczególne korzyści w przypadku istnienia niejednorodności ośrodka wypełniającego dziedzinę i osobliwości geometrii w postaci ostrych załamania powierzchni granicznych. O ile odpowiednie algorytmy generacji siatki są w stanie wstępnie zagęścić okolice osobliwości geometrii, to do właściwej dyskretyzacji innych rejonów o dużych gradientach rozwiązania adaptacyjne zagęszczanie wydaje się niezastąpione. Dodatkową korzyścią stosowania metod adaptacyjnych jest uproszczenie generacji siatki elementów skończonych, gdyż wymagana jest jedynie zgrubna siatka początkowa, dla której dokładność aproksymacji nie jest ważna. Sam algorytm adaptacyjny przejmuje więc częściowo rolę generatora siatki.

Można wyróżnić dwa zasadnicze podejścia do adaptacyjnego precyzowania dyskretyzacji w metodach wielosiatkowych

- metoda adaptacyjna siatek złożonych (fast adaptive composite grid method – FAC) [82] – stosowana głównie przy dyskretyzacji metodami różnicowymi, w

szczegółności metodą różnic skończonych; przypomina technikę selektywnego dogęszczania siatki różnic skończonych zwaną *subgridding* i polega na wielokrotnym dokładaniu do zgrubej siatki „placków” o dokładniejszej dyskretyzacji tworząc hierarchię zagnieżdżonych siatek typową dla metod wielosiatkowych

- adaptacyjne metody wielosiatkowe z elementami skończonymi – najbardziej rozpowszechnione, szczególnie w problemach o złożonej geometrii z licznymi osobliwościami, ze względu na bardzo dużą elastyczność dyskretyzacji; dogęszczanie wykonywane jest poprzez podział wybranych pojedynczych elementów, inaczej niż w adaptacyjnej metodzie siatek złożonych (FAC).

Adaptacyjne metody wielosiatkowe z elementami skończonymi opierają się na technikach adaptacyjnego lokalnego *precyzowania* (refinement) siatki elementów skończonych [5, 48], które tylko w szczególnym (choć najczęściej spotykanym) przypadku polegają na *zagęszczaniu* elementów siatki. W ogólności chodzi o lokalną poprawę dokładności aproksymacji, którą uzyskuje się następującymi sposobami

- precyzowanie typu h – zagęszczanie elementów, czyli redukcja rozmiaru siatki mierzonego parametrem h analogicznym do kroku dyskretyzacji w różnicach skończonych
- precyzowanie typu p – zwiększanie stopnia (p) wielomianów aproksymujących
- precyzowanie typu $h-p$ – techniki mieszane korzystające zarówno z zagęszczania siatki jak i zwiększania stopnia wielomianów aproksymujących.

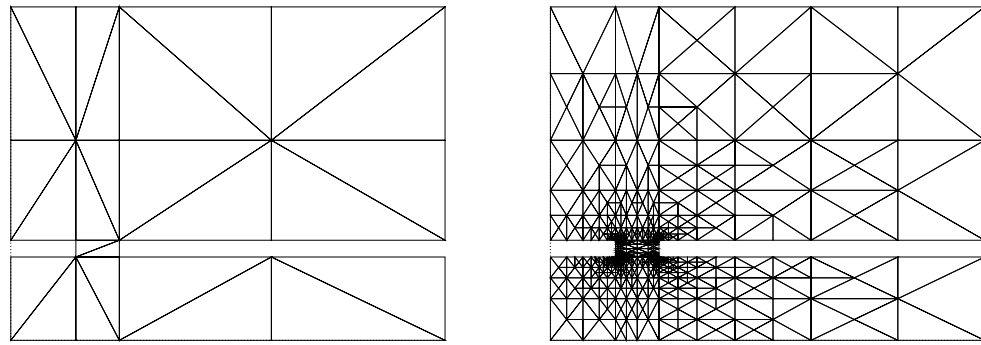
Przywołując pojęcie węzłów aproksymacji odpowiadających stopniom swobody, czyli elementom wektora niewiadomych, można zagadnienie doprecyzowania siatki ujednolicić jako *zagęszczanie węzłów aproksymacji*.

W dalszej części pracy uwaga zostanie skoncentrowana na metodach adaptacyjnych z liniowymi elementami skończonymi i zagęszczaniem typu h .

W tradycyjnej (jednosiatkowej, jednopoziomowej) metodzie z elementami skończonymi uzyskanie efektu adaptacyjności możliwe jest tylko poprzez wielokrotne kompletne rozwiązywanie tego samego zagadnienia dla stopniowo modyfikowanych siatek [109]. Jest to więc proces wielokrotnie bardziej czasochłonny niż przy zastosowaniu adaptacyjnych metod wielosiatkowych. W dalszej części pracy pokazano, iż adaptacyjna metoda wielosiatkowa z elementami skończonymi może być ok. 15 razy szybsza od zwykłej adaptacyjnej metody elementów skończonych (AFE).

Przykładową siatkę 2D dla przekroju struktury planarnej uzyskaną w wyniku adaptacyjnego zagęszczania przedstawia rysunek 2.8. Równomierne zagęszczanie tej samej siatki początkowej przy tej samej liczbie węzłów siatki końcowej daje 1.7 razy gorsze tempo redukcji błędu dyskretyzacji liczone jako nachylenie logarytmicznej zależności błędu od liczby węzłów. Oznacza to, że na poziomie błędu około 1% zagęszczanie adaptacyjne wymaga ponad 10 razy mniej węzłów i niewiadomych niż równomierne.

Typowy cykl wielosiatkowy z adaptacyjnym zagęszczaniem wygląda tak samo jak pełny cykl wielosiatkowy (rys. 2.7). Jedyna różnica polega na stosowaniu algorytmu adaptacyjnego w każdym kroku zagęszczania. Ażeby uzyskać siatkę optymalną,



Rysunek 2.8: Adaptacyjnie zagęszczona siatka (1000 węzłów) dla pola elektrycznego w połowie przekroju linii koplanarnej; zgrubna siatka początkowa ma tylko 25 węzłów [93].

należy, w miarę zagęszczania, utrzymywać możliwie stały rozkład lokalnego błędu dyskretyzacji w całej dziedzinie poprzez dogęszczanie elementów wyróżniających się dużym błędem. Pojedynczy krok adaptacyjnego zagęszczania składa się z następujących etapów.

1. Oszacowanie lokalne błędów dyskretyzacji w każdym elemencie siatki za pomocą *wskaźników błędu* (oszacowanie stopnia poprawy dokładności aproksymacji po ewentualnym rozdrobnieniu elementu [86]) lub *estymatorów błędu* (oszacowanie normy faktycznego lokalnego błędu dyskretyzacji – rozdział 3.3). Wskaźniki błędu są znacznie tańsze numerycznie, lecz nie pozwalają na ekstrapolację rozwiązania poprzez korekcję błędem estymowanym (rozdział 5.3.2). Ponadto, w przeciwieństwie do większości estymatorów, mogą być stosowane przy elementach wyższego rzędu niż liniowe.
2. Określenie wartości progowej błędu – zgodnie z założonym stopniem przewidywanej redukcji błędu dyskretyzacji lub wzrostu liczby elementów
3. Wytypowanie elementów przeznaczonych do zagęszczenia – elementy, dla których estymator lub wskaźnik błędu przekraczają wartość progową oraz ich sąsiedzi.
4. Podział wybranych elementów na mniejsze [104] – najczęściej główny podział odbywa się w oparciu o bisekcję brzegów elementów, czyli na 4 trójkąty (2D) lub 8 czworościanów (3D). Elementy sąsiednie, na których brzegach pojawiły się nowe węzły muszą zostać również dodatkowo podzielone (podział dopełniający – na 2 trójkąty w przypadku 2D) tak, aby węzły te uczynić wierzchołkami elementów. Żeby uniknąć zbytniego spłaszczenia elementów poprzez skumulowanie niepełnych podziałów, wskazane jest uprzednie usunięcie podziałów dopełniających z poprzedniego kroku.

Znane są też bardziej rozbudowane algorytmy, w których oprócz adaptacyjnego zagęszczania siatki redukującego błąd dyskretyzacji, same cykle wielosiatkowych ite-

racji są adaptacyjnie modyfikowane w celu odpowiedniej kontroli błędu algebraicznego (błąd iteracyjnego rozwiązywania układu równań). Podstawową zasadą jest „synchronizowanie” błędów algebraicznego i dyskretyzacji poprzez zbliżenie rzędów ich wielkości. Do tej klasy procedur należą *wielosiatkowa technika adaptacyjna* MLAT (multilevel adaptive technique) [28] i wywodząca się z niej *całkowicie adaptacyjna metoda wielosiatkowa* FAM (fully adaptive multigrid method) oparta na algorytmie *wielopoziomowych iteracji adaptacyjnych* MLAI (multilevel adaptive iteration) [106].

Oprócz poprawy dokładności aproksymacji, adaptacyjne zagęszczanie siatki daje jeszcze jedną korzyść, która dotyczy samego algorytmu wielosiatkowego. Klasyczne metody wielosiatkowe wykazują optymalne obciążenie numeryczne i bardzo dobrą zbieżność głównie dla problemów o dostatecznie regularnym rozwiązaniu [103]. Zbieżność, która pogarsza się w pobliżu osobliwości wywołujących gwałtowne zmiany pola może zostać poprawiona przez dodatkowe lokalne wygładzanie (relaksacje) w tych okolicach [128]. Jednakże efekt wygładzania można osiągnąć również przez lokalne zagęszczanie węzłów dyskretyzacji, co ma miejsce właśnie w adaptacyjnych metodach wielosiatkowych.

2.6 Algebraiczne metody wielosiatkowe

W wielu sytuacjach siatka początkowa może być już bardzo gęsta ze względu na skomplikowaną geometrię dyskretyzowanej dziedziny. Wtedy jest wskazane konstruowanie rodziny siatek idąc w przeciwnym kierunku, niż to ma miejsce w schemacie FMG, to znaczy poprzez rozrzedzanie siatki gęstej początkowej w tyłu krokach, aż otrzymana zostanie siatka o dostatecznie małej liczbie niewiadomych. Procedury takie bazują głównie na samej macierzy układu równań liniowych i dlatego nazwano je *algebraicznymi metodami wielosiatkowymi* (AMG)

Oryginalna koncepcja metod wielosiatkowych, która związana jest z cząstkowymi równaniami różniczkowymi doczekała się więc uogólnienia właśnie do postaci algebraicznej, gdzie nie jest już zadany dyskretny problem różniczkowy lecz jedynie postać algebraiczna, czyli liniowy układ równań. Pierwotna postać zagadnienia ciągłego też nie musi być już określona. Jego dyskretyzacja dokonywana poza samą AMG przy użyciu dowolnie wybranej metody (FD lub FE). Niestety, z tego samego powodu w metodach algebraicznych trudno jest zastosować wprost algorytm adaptacyjny.

W ostatnich kilku latach wzrosło zainteresowanie metodami algebraicznymi dzięki opracowaniu coraz bardziej efektywnych algorytmów algebraicznego rozrzedzania macierzy zdyskretyzowanego problemu ciągłego. Zagadnienie to doczekało się wielu badań [31, 34], które zajmowały się różnorodnymi problemami numerycznymi. Stworzone w ten sposób algorytmy są często bardzo wyrafinowane i różnią się podejściem do problemu. Są to na przykład metody ważonej interpolacji macierzowej [49], metody oparte na niekompletnym rozkładzie LU [14, 13] lub metody agregacji [25, 122]. W większości przypadków do rozrzedzania i komunikacji pomiędzy różnymi poziomami dokładności aproksymacji wykorzystuje się wartości elementów macierzy. Znane są też propozycje opierające się jedynie na samej strukturze macierzy w

postaci tzw. macierzowego grafu rozrzedzania [16].

Z reguły podejście algebraiczne daje mniej skuteczną korekcję wielosiatkową niż rozrzedzanie geometryczne, choć dla problemów o znacznej regularności różnice te mogą być niewielkie. Jednym z niebezpieczeństw metod algebraicznych jest przekłamanie oryginalnego problemu wskutek nadmiernego rozrzedzenia macierzy.

2.7 Prekondycjonowanie wielosiatkowe

Metody wielosiatkowe, według przedstawionej dotychczas koncepcji, można, w dużym uproszczeniu, traktować jako technikę służącą do przyspieszania zbieżności podstawowych (stacjonarnych) iteracyjnych metod rozwiązywania układów równań z wielkimi macierzami rzadkimi.

Inna sfera zastosowań metod wielosiatkowych wiąże się z *niestacjonarnymi* metodami iteracyjnymi, które w porównaniu do metod stacjonarnych są młodsze, szybsze, choć bardziej zawile matematycznie, a w ostatnich latach odnotowują szczególny wzrost zainteresowań. Najpowszechniejszymi reprezentatami tej klasy są metody gradientów sprzężonych (CG) i metody minimalnych residuów (np. GMRES, QMR). Ogólną właściwością metod niestacjonarnych jest uzależnienie tempa zbieżności od dobrego uwarunkowania macierzy. Żeby stworzyć warunki do osiągnięcia szybkiej zbieżności, oryginalny układ równań zastępuje się równoważnikiem o lepszej macierzy, którą uzyskuje się na drodze specjalnych przekształceń zwanych *prekondycjonowaniem*³ (preconditioning). Podstawowym i najkosztowniejszym jego elementem jest przybliżone odwracanie macierzy poprzez przybliżone rozwiązanie pomocniczego układu równań, do czego doskonale nadają się właśnie metody wielosiatkowe. W tym zastosowaniu metody wielosiatkowe można zatem uznać za sposób przyspieszania iteracyjnych metod niestacjonarnych.

2.7.1 Niestacjonarne metody iteracyjne

Niestacjonarne metody iteracyjne zaliczają się do grupy metod *podprzestrzeni Kryłowa*, które wciąż pozostają dziedziną aktywnych badań i zwane są też *metodami projekcji* [15, 58]. Układ równań liniowych

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.26)$$

rozwiązywany jest poprzez minimalizację funkcjonału residualnego, czyli za pomocą równoważnego zadania wariacyjnego. Oryginalnie przeznaczone są więc do układów z macierzami symetrycznymi dodatnio określonymi (SPD). Efektywne stosowanie ich przy innych typach macierzy wymaga szczególnych zabiegów i modyfikacji algorytmów, co w ostatnich latach jest przedmiotem wyjątkowo zaawansowanych badań. Minimalizacja

³chodzi o wstępną poprawę uwarunkowania macierzy układu równań, na co nie ma w języku polskim zwartego określenia; w literaturze polskojęzycznej słowo „prekondycjonowanie” (spolszczone brzmienie nazwy angielskiej) zaproponowano w [72]

zachodzi w specjalnej przestrzeni wektorów, tzw. przestrzeni Kryłowa, która związana jest z sekwencją wektorów ortogonalnych, rozbudowywaną w każdym kroku iteracji.

Metody niestacjonarne przedstawione zostaną na przykładzie ich sztandarowego reprezentanta – metody *gradientów sprzężonych* (conjugate gradients – CG). Minimalizowany jest funkcjonal energetyczny

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (2.27)$$

który związany jest z tzw. *A-normą* $\|\cdot\|_A$, zwaną też *normą energetyczną* $|||\cdot|||$ zbudowaną w oparciu o skalarny iloczyn energetyczny, indukowany przez macierz $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_A &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v} \\ \|\mathbf{u}\|_A &\equiv |||\mathbf{u}||| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_A} = \|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}\|_2, \end{aligned} \quad (2.28)$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i $\|\cdot\|_2$ są euklidesowym iloczynem skalarnym i normą. Macierz $\mathbf{A}$ jest symetryczna dodatnio określona.

Startując z przybliżenia początkowego $\mathbf{u}_0$, kolejne przybliżenia $\mathbf{u}_k$ w iteracjach $k = 1, \dots, N$ otrzymuje się przez przesunięcie wektora niewiadomych $\mathbf{u}_{k-1}$ w kierunku $\mathbf{p}_{k-1}$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1} + \alpha_k \mathbf{p}_k \quad (2.29)$$

na odległość α_k , którą dobiera się tak, aby minimalizować $F(\mathbf{u}_k)$. W metodzie *najszybszego spadku*, z której wywodzi się metoda CG, za kierunek przesunięcia przyjmuje się ujemny gradient funkcjonału, identyczny z wektorem residualnym $\mathbf{r}_{k-1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k &= -\nabla F(\mathbf{u}_{k-1}) = \mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{r}_{k-1} \\ \alpha_k &= \|\mathbf{r}_k\|_2^2 / \|\mathbf{r}_k\|_A^2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Taka strategia, choć w ogólności poprawna, zawodzi jednak dla macierzy o dużym współczynniku uwarunkowania.

Z tego powodu metoda gradientów sprzężonych wprowadza modyfikację kierunków poszukiwań (przemieszczeń), taką aby, rozpoczynając od $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_0$, tworzyły one układ $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}$ *A-ortogonalny* (sprzężony), czyli ortogonalny ze względu na iloczyn energetyczny

$$\langle \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_j \rangle_A = 0 \quad \text{dla } j \neq k,$$

a każdy nowo dodany kierunek $\mathbf{p}_k$ był jednocześnie najbliższy wektorowi residualnemu $\mathbf{r}_{k-1}$. Przy takich założeniach wektory residualne tworzą układ $\{\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_{k-1}\}$ ortogonalny

$$\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j \rangle = 0 \quad \text{dla } j \neq k,$$

który rozpina tę samą podprzestrzeń (jest bazą ortogonalną tej samej podprzestrzeni) co kierunki poszukiwań

$$\text{span}\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\} = \text{span}\{\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_{k-1}\} = K(\mathbf{r}_0, \mathbf{A}, k), \quad \text{gdzie}$$

$K(\mathbf{r}_0, \mathbf{A}, k) = \text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}_0\}$ jest podprzestrzenią Kryłowa. Nowy kierunek poszukiwań jest kombinacją liniową poprzedniego kierunku i bieżącego wektora residualnego

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_{k-1} + \beta_k \mathbf{p}_{k-1},$$

co ostatecznie daje następujący algorytm [58]

Algorytm (*gradienty sprzężone: CG*)

```

wybrać:  $\mathbf{u}_0 = 0, \mathbf{r}_0 = \mathbf{f}$ 
for  $k = 1, \dots, N$ 
    if  $\mathbf{r}_{k-1} = 0$  then  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{k-1}$ ; stop
    if  $k = 1$  then  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_0$ 
    if  $k > 1$  then
         $\beta_k = \|\mathbf{r}_{k-1}\|_2^2 / \|\mathbf{r}_{k-2}\|_2^2$ 
         $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_{k-1} + \beta_k \mathbf{p}_{k-1}$ 
    end
     $\alpha_k = \|\mathbf{r}_{k-1}\|_2^2 / \|\mathbf{p}_k\|_A^2$ 
     $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1} + \alpha_k \mathbf{p}_k$ 
     $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{A}\mathbf{p}_k$ 
end

```

W każdym kroku iteracji wykonywane jest tylko jedno mnożenie macierzy przez wektor – $\mathbf{A}\mathbf{p}_k$. Przy braku błędów zaokrągleń, dokładne rozwiązanie jest osiągnięte w najwyżej N iteracjach, a rekurencyjnie wyliczane residua $\mathbf{r}_k$ są równe prawdziwym (2.30) i są wzajemnie ortogonalne. W praktyce relacje te nie będą spełnione ze względu na skończoną dokładność arytmetyki numerycznej. Faktyczne tempo zbieżności zależy wprost od *wskaźnika uwarunkowania* macierzy A

$$\kappa_2(\mathbf{A}) = \frac{\|A\|_2}{\|A^{-1}\|_2} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}. \quad (2.31)$$

Jeśli $\mathbf{u}^*$ jest rozwiązaniem dokładnym, to norma energetyczna (A -norma) błędu przybliżenia po k iteracjach $\mathbf{u}_k$ zostanie zredukowana w stosunku do przybliżenia początkowego $\mathbf{u}_0$ według zależności [58]

$$\|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}^*\|_A \leq \varepsilon \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}^*\|_A, \quad (2.32)$$

gdzie

$$\varepsilon = 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa_2(\mathbf{A})} - 1}{\sqrt{\kappa_2(\mathbf{A})} + 1} \right)^k \quad (2.33)$$

Ażeby osiągnąć stopień redukcji błędu ε , koniecznych jest $k \geq \frac{1}{2} \sqrt{\kappa_2(\mathbf{A})} \ln(2/\varepsilon)$ iteracji. Najszybszą zbieżność osiąga się, gdy $\kappa_2(\mathbf{A}) \approx 1$. Dobrą zbieżność uzyskuje się nawet, jeżeli wskaźnik uwarunkowania nie jest dostatecznie mały, ale wartości własne pozostają silnie zgrupowane wokół nielicznych ognisk [58].

2.7.2 Zasada prekondycjoningu

Prekondycjoningu polega na zastąpieniu układu równań $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ przez układ równoważny

$$\underbrace{\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_2^{-1}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \underbrace{\mathbf{M}_2\mathbf{u}}_{\tilde{\mathbf{u}}} = \underbrace{\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{f}}_{\tilde{\mathbf{f}}} \quad (2.34)$$

Transformacja w (2.34) zachowuje symetrię macierzy $\mathbf{A}$ jeżeli $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1^T$. W przypadku niesymetrycznej $\mathbf{A}$ można zastosować prostszy prekondycjoningu jednostronny $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}$.

Układ $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}}$ jest następnie rozwiązywany za pomocą metody niestacjonarnej (metody podprzestrzeni Kryłowa) np. gradientów sprzężonych. Wskaźnik uwarunkowania macierzy nowego układu $\kappa_2(\tilde{\mathbf{A}})$ zostanie poprawiony (wartość κ_2 zbliży się do jedności), jeżeli macierz prekondycjoningu $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ będzie dobrym przybliżeniem macierzy $\mathbf{A}$. Macierz $\mathbf{M}$ wraz z obydwooma czynnikami składowymi powinny ponadto być proste i łatwo odwracalne. Jakość prekondycjoningu mierzona może być więc jakością przybliżenia odwrotności $\mathbf{A}$

$$\mathbf{M}^{-1} \approx \mathbf{A}^{-1}, \quad (2.35)$$

na co składa się zarówno stopień przybliżenia jaki i niski koszt numeryczny.

Wstawienie przetransformowanego układu (2.34) do algorytmu gradientów sprzężonych [58] pokazuje, że ani macierz $\mathbf{M}$, ani $\mathbf{M}^{-1}$ nie muszą być podane jawnie. Jej odwrotność ma być dostępna jedynie jako rozwiązanie pewnego pomocniczego układu równań z macierzą $\mathbf{M}$. Prekondycjonowana metoda gradientów sprzężonych z symetryczną dodatnio określoną macierzą $\mathbf{M}$ ma postać następującego algorytmu

Algorytm (*prekondycjonowane gradienty sprzężone: PCG*)

```

wybrać:  $\mathbf{u}_0 = 0, \mathbf{r}_0 = \mathbf{f}$ 
for  $k = 1, \dots, N$ 
    if  $\mathbf{r}_{k-1} = 0$  then  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{k-1}$ ; stop
    rozwiązać:  $\mathbf{M}\mathbf{z}_k = \mathbf{r}_k \rightarrow \mathbf{z}_k$ 
    if  $k = 1$  then  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{z}_0$ 
    if  $k > 1$  then
         $\beta_k = \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{z}_{k-1} \rangle / \langle \mathbf{r}_{k-2}, \mathbf{z}_{k-2} \rangle$ 
         $\mathbf{p}_k = \mathbf{z}_{k-1} + \beta_k \mathbf{p}_{k-1}$ 
    end
     $\alpha_k = \langle \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{z}_{k-1} \rangle / \|\mathbf{p}_k\|_A^2$ 
     $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1} + \alpha_k \mathbf{p}_k$ 
     $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{A}\mathbf{p}_k$ 
end.
```

Algorytm ten jest uogólnieniem metody CG, którą uzyskuje się przez podstawienie $\mathbf{M} = \mathbf{I}$.

Zgodnie z warunkiem (2.35) rozwiązanie równania $\mathbf{M}\mathbf{z} = \mathbf{r}$ można otrzymać przez **przybliżone** rozwiązanie takiego samego układu, lecz z macierzą $\mathbf{A}$. Do tego

celu doskonale nadają się podstawowe (stacjonarne) metody iteracyjne. Przywołując macierzową postać stacjonarnych metod iteracyjnych (2.1) można jawnie odtworzyć $\mathbf{M}^{-1}$ za pomocą macierzy iteracji $\mathbf{G}$

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{G}^\nu \quad \text{dla } \nu \text{ iteracji} \quad , \quad (2.36)$$

lecz jest to zabieg czysto formalny i przydatny jedynie w analizie zbieżności oraz innych właściwości prekondycjonowanych algorytmów. W praktyce do prekondycjoningu najczęściej stosuje się metody Jacobiego, Gaussa-Seidela, SSOR, niekompletnego rozkładu LU oraz cykle wielosiatkowe.

2.7.3 Metody wielosiatkowe w prekondycjoningu

Ze względu na wyjątkową efektywność i wszechstronność metody wielosiatkowe zasługują na szczególną uwagę. Jak wcześniej wspomniano, prekondycjonowanie wielosiatkowe można uważać za metodę przyspieszania metod niestacjonarnych. W [128] zaproponowano odmienne spojrzenie – metoda gradientów sprzężonych w postaci algorytmu PCG służy do przyspieszania metod wielosiatkowych. Jeżeli algorytm wielosiatkowy zostanie dobrze dopasowany do problemu (na co składa się między innymi dopasowanie siatki do rozkładu rozwiązania oraz dobór parametrów cyklu wielosiatkowego), a sam problem jest dostatecznie regularny (brak silnych osobliwości), zbieżność z reguły będzie bardzo sprawna, a rozbudowa algorytmu o metodę gradientów sprzężonych może okazać się zbytecznym nadmiarem wydatku numerycznego. Jednak gdy metoda wielosiatkowa nie da się dostatecznie adaptować do problemu, to przyspieszanie za pomocą gradientów sprzężonych jest zwykle bardzo prostym i skutecznym środkiem zaradczym. Często bowiem pogorszenie zbieżności metod wielosiatkowych związane jest z pozostawianiem jedynie kilku słabozbieżnych modów. Widmo macierzy prekondycjonowanej $\hat{\mathbf{A}}$ będzie wtedy silnie skupione wokół zaledwie kilku wartości własnych [128], co warunkuje szybką zbieżność metody gradientów sprzężonych.

Podstawowe przypadki problemów eliptycznych, w których kombinacja metod wielosiatkowych i gradientów sprzężonych warunkuje poprawę zbieżności to:

- skomplikowana geometria dziedziny wymagająca bardzo nieregularnych siatek
- osobliwości w postaci ostrych wklęsłych załamów brzegów dziedziny
- silne uskoki współczynników równania różniczkowego (stałych materiałowych)
- wąskie obszary silnych niejednorodności ośrodków (boundary layers)
- brak warunków brzegowych Dirichleta wobec czysto jednorodnych warunków Neumanna (np. problem magnetostatyczny z potencjałem skalarnym w strukturach niesymetrycznych – patrz rozdział 7), co prowadzi do osobliwej macierzy układu równań

Oprócz geometrycznych metod wielosiatkowych, w schemacie PCG z powodzeniem stosowane są metody algebraiczne, na których bazie zbudowane są takie znane algorytmy jak BPX [27] i AMLI [3].

Konstruowanie metod preconditionowanych w oparciu o pełny schemat wielosiatkowy FMG prowadzi do klasy *kaskadowych metod wielosiatkowych* [24]. Przypominają one jednokierunkowe metody wielosiatkowe, w których wykonywany jest tylko ruch w stronę coraz gęstszych siatek. Tu jednak, po każdym kroku zagęszczania następuje rozwiązanie układu równań za pomocą metody gradientów sprzężonych preconditionowanej klasycznymi cyklami wielosiatkowymi (V lub W), a dodatkowy ruch korekcyjny w stronę siatek rozrzedzonych wprowadzony jest na etapie preconditioningu. Przywołując interpretację [128], kaskadowe metody wielosiatkowe można uznać za schemat FMG przyspieszany gradientami sprzężonymi.

Rozdział 3

Metoda elementów skończonych

Metoda elementów skończonych (finite element – FE) służy do przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych i rozpowszechniła się jako odpowiedź na trudności metody różnic skończonych (FD) w swobodnym kształtowaniu geometrii rozwiązywanych zagadnień. Oparta jest na dwóch podstawowych zasadach

1. dyskretyzacja dziedziny – dekompozycja na mniejsze, elementarne poddziedziny o prostej geometrii, tzw. *elementy skończone*, tworzące siatkę dyskretyzacji
2. zamiana zagadnienia brzegowego na postać całkową przy zastosowaniu jednego z dwóch podejść:

zasady wariacyjnej – przekształca się do jednej z dwóch postaci

- *zadania minimalizacyjnego*
- *słabej postaci* zagadnienia brzegowego

metody residuów ważonych – prowadzi do

- *słabej postaci* zagadnienia brzegowego.

Jak widać, słabą postać zagadnienia brzegowego uzyskuje się w dwojaki sposób, wychodząc z zasady wariacyjnej lub w metodzie residuów ważonych.

Do przybliżonego rozwiązania, w dziedzinie zdyskretyzowanej siatką elementów skończonych, każdego z otrzymanych sformułowań przekształconego zagadnienia brzegowego – zadania minimalizacyjnego i słabej postaci – stosuje się dwie różne metody:

- **zadanie minimalizacyjne** $\leftarrow$ *metoda Ritza* (Rayleigha-Ritza) – jedna z podstawowych metod bezpośrednich rachunku wariacyjnego; zadanie minimalizacyjne istnieje, a metoda Ritza może być stosowana tylko dla zagadnień z operatorem symetrycznym dodatnio określonym
- **słaba postać** $\leftarrow$ *metoda Galerkina* – bardziej ogólna od metody Ritza, może być stosowana, gdy nie istnieje zadanie minimalizacyjne lub, gdy nawet nie istnieje sformułowanie wariacyjne (wówczas słabą postać uzyskuje się z metody residuów ważonych); procedura Galerkina ma też szersze zastosowanie np. w metodzie dopasowania rodzajów.

Obie metody, Ritz'a i Galerkina, poszukują aproksymacji rozwiązania w przestrzeni o skończonej liczbie wymiarów rozpiętej na układzie funkcji bazowych zbudowanych za pomocą dyskretyzującej siatki elementów skończonych. W przypadku operatorów symetrycznych dodatnio określonych (symmetric positive definite – SPD) obydwa podejścia są równoważne i prowadzą do identycznych układów równań liniowych. Wybór funkcji aproksymujących zależy od typu funkcji niewiadomej rozwiązania (skalarna, wektorowa) oraz rodzaju operatorów różniczkowych zagadnienia. W skalarnym równaniu Laplace'a mogą to być wielomiany niskiego stopnia, od liniowych zaczynając.

W dalszej części rozdziału metoda elementów skończonych zostanie omówiona w kontekście skalarnych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, a w szczególności równań eliptycznych.

3.1 Zadanie minimalizacyjne i słaba postać

3.1.1 Zasada wariacyjna

Wariacyjne sformułowanie zagadnienia brzegowego w dziedzinie Ω , o postaci operatorowej

$$\mathcal{L}u = f, \quad (3.1)$$

dla $\mathcal{L}$ samosprężonego, opiera się na funkcjonale

$$F(u) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}u, u \rangle - \langle f, u \rangle. \quad (3.2)$$

Zadanie minimalizacyjne znajduje rozwiązanie zagadnienia brzegowego $u \in X$ jako

$$u = \arg \min_{w \in X} F(w), \quad (3.3)$$

gdzie X jest przestrzenią funkcji dostatecznie gładkich w Ω oraz o skończonej energii pierwszej pochodnej ($X \subset H^1(\Omega)$) i dodatkowo spełniających warunki brzegowe. Dostateczną gładkość funkcji gwarantuje ich całkowalność z kwadratem ($X \subset L^2(\Omega)$). Iloczyn skalarny (w $L^2(\Omega)$) określony jest

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \cdot v \, dV. \quad (3.4)$$

Zadanie wariacyjne może być sformułowane ogólniej, jako poszukiwanie warunków stacjonarności funkcjonału (3.2) pośród funkcji $u \in X$

$$\frac{\partial F(u + \alpha v)}{\partial \alpha} = 0, \quad (3.5)$$

co sprowadza się do zerowania jego pierwszej wariacji dla zaburzenia v

$$\begin{aligned} \delta F_v(u) &= 0 \quad \forall v \in X, \quad \text{gdzie} \\ \delta F_v(u) &= \langle \mathcal{L}u, v \rangle - \langle f, v \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

W odróżnieniu od zadania minimalizacyjnego (3.3), zagadnienie (3.6) już zawiera wykonaną analitycznie minimalizację funkcjonału.

3.1.2 Metody residuów ważonych

Rozwiązaniem zagadnienia (3.1) jest funkcja u , dla której zeruje się błąd residualny

$$R = \mathcal{L}u - f = 0, \quad (3.7)$$

czemu równoważna jest całkowa postać

$$\langle R, v \rangle = 0 \quad (3.8)$$

dla dowolnej funkcji wagi $v \in X$, czyli

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle - \langle f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in X \subset H^1(\Omega). \quad (3.9)$$

Różne implementacje metody otrzymuje się stosując różne zasady doboru funkcji wagi v , z których najlepsze przybliżenie w metodach elementów skończonych daje metoda Galerkina.

Widać, że sformułowanie wariacyjne (3.6) i metoda residualna dają identyczną postać całkową zagadnienia brzegowego. Zaburzenie v w (3.6) i funkcję wagi v w (3.9) można traktować jednakowo jako tzw. funkcję testową, co ma miejsce właśnie w metodzie Galerkina.

3.1.3 Słaba postać

Postać całkowa zagadnienia brzegowego (3.9) nazywana jest „słabą”, ponieważ nakłada słabsze warunki dopuszczalności funkcji u niż oryginalna, „mocna” postać (3.1), co ułatwia rozwiązywanie problemu. Możliwe jest jeszcze większe osłabienie wymogów dopuszczalności prowadzące do sformułowania, które powszechnie określone jest jako *słaba postać* zagadnienia brzegowego. Dopiero *słaba postać* pozwala zastosować metodę Ritza i Galerkina w oparciu o aproksymację funkcją odcinkami liniową, więc o nieciągłej pochodnej, tak jak w metodzie elementów skończonych.

Rozważmy następujące mieszane zagadnienie eliptyczne

$$\begin{aligned} -\nabla(k\nabla u) + qu &= f \quad \text{w } \Omega \\ u &= u^D \quad \text{na } \Gamma^D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{na } \Gamma^N, \end{aligned} \quad (3.10)$$

gdzie Γ^D i Γ^N to fragmenty brzegu dziedziny $\partial\Omega$ z warunkami Dirichleta i Neumana ($\Gamma^D \cup \Gamma^N = \partial\Omega$), a k i q to rzeczywiste współczynniki. Postać całkowa (3.9) zagadnienia jest następująca

$$\int_{\Omega} -\nabla(k\nabla u) v \, dV + \int_{\Omega} qu v \, dV - \int_{\Omega} f v \, dV = 0 \quad (3.11)$$

Warunek Dirichleta ogranicza przestrzeń poszukiwań rozwiązania X do funkcji

$$u \in X^D, \quad \text{gdzie } X^D = \{u \in H_{\Gamma^D}^1(\Omega), \quad \text{czyli } u|_{\Gamma^D} = u^D\}$$

Pierwszą całkę w (3.11) można przekształcić tak, aby obniżyć rząd pochodnych osłabiając tym samym warunek ciągłości funkcji aproksymujących u . Korzystając z twierdzenia Gaussa otrzymuje się (analogicznie do całkowania przez części)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\nabla(k\nabla u) v \, dV &= \\ \int_{\Omega} -\nabla(v k \nabla u) + \nabla v \cdot k \nabla u \, dV &= \\ \int_{\partial\Omega} -v k \nabla u \, d\vec{S} + \int_{\Omega} \nabla v \cdot k \nabla u \, dV &= \\ \int_{\Gamma^D} -v k \nabla u \, d\vec{S} + \int_{\Gamma^N} -v k \frac{\partial u}{\partial n} \, dS + \int_{\Omega} \nabla v \cdot k \nabla u \, dV \end{aligned} \quad (3.12)$$

Druga całka, po brzegu Γ^N znika na mocy warunków Neumanna. Całka po brzegu z niejednorodnym warunkiem Dirichleta Γ^D również zniknie, jeżeli odpowiednio ograniczyć się przestrzeni funkcji testowych v

$$v \in X_0, \quad \text{gdzie} \quad X_0 = \{v \in H_0^1(\Omega), \quad \text{czyli} \quad v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Dostajemy więc równoważność dwóch sformułowań całkowych

$$\int_{\Omega} -\nabla(k\nabla u) v \, dV \quad + \text{warunki Neumanna} \quad \equiv \int_{\Omega} \nabla v \cdot k \nabla u \, dV, \quad (3.13)$$

z których prawe tworzy następującą *słabą postać* zagadnienia brzegowego (3.10):

$$\begin{aligned} &\text{znaleźć funkcję} \quad u \in X^D, \quad \text{która spełnia} \\ &a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in X_0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

gdzie $a(u, v)$ i $\ell(v)$ to forma dwuliniowa i liniowa

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} (k \nabla v \cdot \nabla u + quv) \, dV \\ \ell(v) &= \int_{\Omega} f v \, dV \end{aligned} \quad (3.15)$$

Równoważność (3.13) można uogólnić jako

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle \quad + \text{warunki Neumanna} \quad \equiv a(u, v) \quad \forall v \in X_0 \quad (3.16)$$

Korzystając z powyższej notacji można również przepisać funkcjonal w sformułowaniu wariacyjnym (3.2)

$$F(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - \ell(u). \quad (3.17)$$

Należy zauważyć, że w słabej postaci zagadnienia warunki brzegowe, zależnie od sposobu traktowania, należą do jednej z dwu kategorii

- *naturalne* – zadane w samym funkcjonale F lub formach a i ℓ (naturalnie obecne w słabej postaci); są nimi warunki Neumanna i Cauchy’ego
- *zasadnicze* – *narzucone* poprzez ograniczenie przestrzeni funkcji niewiadomych X ; są nimi warunki Dirichleta

3.2 Aproksymacja

Zagadnienie w przestrzeni skończeniowymiarowej

Metody Ritza i Galerkina poszukują, zamiast rozkładu dokładnego rozwiązania $u(\mathbf{x})$, jego aproksymacji $u_h(\mathbf{x})$ w przestrzeni skończeniowymiarowej $X_h \subset X$ o układzie n funkcji bazowych $\{\phi_j\}_n$

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n u_{hj} \phi_j(\mathbf{x}), \quad n = \dim(X_h), \quad (3.18)$$

gdzie $\mathbf{u}_h = [u_{h1}, u_{h2}, \dots, u_{hn}]^T$, jest poszukiwanym wektorem współczynników rozwinięcia (3.18), a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d(\Omega)$ to wektor współrzędnych punktu w dziedzinie d -wymiarowej ($d \in \{1, 2, 3\}$).

Zadanie minimalizacyjne (3.3) z funkcjonałem $F(u_h)$ w metodzie Ritza sprowadza się do minimalizacji funkcjonału zdyskretyzowanego F_h ze względu na wektor współczynników

$$\mathbf{u}_h = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n} F_h(\mathbf{w}), \quad (3.19)$$

gdzie

$$F_h(\mathbf{w}) \equiv F \left(\sum_{j=1}^n w_j \phi_j \right) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{A}_h \mathbf{w} - \mathbf{w}^T \mathbf{b}_h \quad (3.20)$$

Macierz $\mathbf{A}_h$, zwana *globalną macierzą współczynników*, i wektor $\mathbf{b}_h$ są dyskretnym odpowiednikiem operatora $\mathcal{L}$ i funkcji f zagadnienia brzegowego, a dokładniej formy dwuliniowej $a(\cdot, \cdot)$ i liniowej $\ell(\cdot)$ w słabej postaci (3.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_h \in \mathbb{R}^n & : b_{hi} \equiv \ell(\phi_i) \\ \mathbf{A}_h \in \mathbb{R}^{n \times n} & : A_{hij} \equiv a(\phi_i, \phi_j) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Rozwiązaniem zadania minimalizacyjnego (3.19) jest $\mathbf{u}_h$, który spełnia układ równań liniowych

$$\mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{b}_h \quad (3.22)$$

Dyskretyzacja słabej postaci zagadnienia brzegowego (3.14) w oparciu o bazę przestrzeni X_h prowadzi do następującego zadania

$$\begin{aligned} & \text{znaleźć wektor } \mathbf{u}_h, \quad \text{dla którego} \\ & \mathbf{v}^T \mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{v}^T \mathbf{b}_h \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.23)$$

Istotą metody Galerkina jest wykorzystanie funkcji bazowych w charakterze funkcji testowych $v \in \{\phi_j\}_n$, co oznacza, że wektorami testowymi $\mathbf{v}$ są wszystkie wersory (ortogonalna baza wektorów jednostkowych) z $\mathbb{R}^n$. Wtedy (3.23) sprowadzi się do układu równań (3.22), identycznego z otrzymanym w metodzie Ritza (3.21).

Dyskretyzacja

W metodzie elementów skończonych funkcje bazy aproksymacji ϕ_j są ściśle związane z dyskretyzacją – dziedzina podlega dekompozycji na układ elementów (złączonych tylko brzegami), a aproksymacja u_h jest złożeniem lokalnych aproksymacji $u_h^e(\mathbf{x})$ w postaci wielomianów p -tego stopnia zdefiniowanych *lokalnie* dla każdego z elementów T_e .

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^K T_e \quad u_h(\mathbf{x}) = \bigcup_{e=1}^K u_h^e(\mathbf{x}) : \quad u_h^e(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{gdy} \quad \mathbf{x} \notin T_e. \quad (3.24)$$

Lokalne funkcje $u_h^e(\mathbf{x})$ muszą zachować ciągłość na brzegach łączących sąsiadujące ze sobą elementy. Jeśli funkcjonal i słaba postać zawierają formę dwuliniową zamiast kwadratowej, to pochodna może być nieciągła, czyli $u_h(\mathbf{x}) \in C^0(\Omega)$, czego najprostszym jednowymiarowym przykładem jest funkcja odcinkami liniowa.

Zwykle siatkę dyskretyzacji tworzą elementy najprostsze – odcinki, trójkąty i czworokąty, odpowiednio dla problemów jedno-, dwu- i trójwymiarowych. Możliwe są również inne elementy, o większej liczbie wierzchołków, takie jak wypukłe czworokąty, pięcio- i sześciokąty. Zależnie od stopnia wielomianów aproksymujących p , mówi się, że elementy są liniowe, kwadratowe lub wyższego stopnia. Najbardziej rozpowszechnione są elementy liniowe ($p = 1$). Elementy wyższego stopnia dają lepszą dokładność aproksymacji jednak za cenę znacznego wzrostu kosztu obliczeniowego.

Węzły aproksymacji $m = 1, \dots, M^e$, określające *stopnie swobody* w elemencie e odpowiadają współczynnikom w lokalnym wielomianie aproksymującym $u_h^e(\mathbf{x})$, a w przypadku najprostszych elementów liniowych pokrywają się z ich wierzchołkami. Ażeby umożliwić zbudowanie bazy $\{\phi_j\}_n$, wielomiany $u_h^e(\mathbf{x})$ w elemencie e definiuje się jako superpozycję lokalnych funkcji interpolujących $N_m^e(\mathbf{x})$, zwanych *funkcjami kształtu*, związanych z każdym węzłem m oddzielnie

$$u_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{M^e} u_{hm}^e N_m^e(\mathbf{x}), \quad (3.25)$$

przy czym w węzłach

$$N_i^e(\mathbf{x}_j^e) = \delta_{ij} \quad (\text{symbol Kronekera})$$

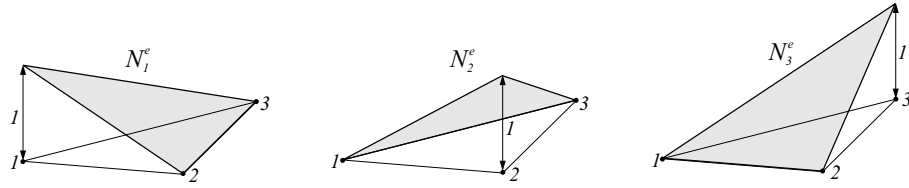
Przykładowo, dla dwuwymiarowych trójkątnych elementów liniowych $\mathbf{x} = [x \ y]$, $M^e = 3$ oraz

$$u_h^e(\mathbf{x}) = a_0^e + a_x^e x + a_y^e y, \quad (3.26)$$

co daje funkcje kształtu

$$\begin{bmatrix} N_1^e(\mathbf{x}) & N_2^e(\mathbf{x}) & N_3^e(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_1^e \\ 1 & \mathbf{x}_2^e \\ 1 & \mathbf{x}_3^e \end{bmatrix}^{-1}, \quad (3.27)$$

gdzie $\mathbf{x}_m^e$ to współrzędne wierzchołka m (rys. 3.1). W elementach jednowymiarowych wyższych stopni funkcje kształtu są wielomianami *Lagrange'a* [136].



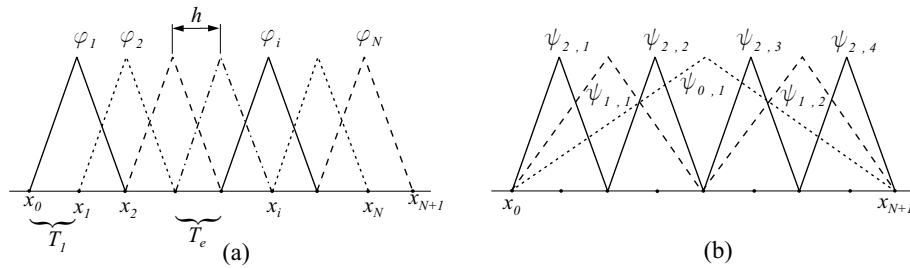
Rysunek 3.1: Funkcje kształtu w liniowym elemencie trójkątnym

Bazy

Znane są dwa podstawowe typy układów funkcji bazowych $\{\phi_j\}_n$ (rys. 3.2)

bazy węzłowe – najpowszechniejsze; każdemu węzłowi aproksymacji przypisana jest jedna funkcja bazowa ϕ_j , czyli $n = N$

bazy hierarchiczne – rzadziej stosowane, głównie w skojarzeniu z adaptacyjnym zagęszczaniem siatki lub metodami wielosiatkowymi, czyli tam, gdzie operuje się hierarchią zagnieżdżonych w sobie siatek o rosnącym zagęszczeniu.



Rysunek 3.2: Porównanie bazy węzłowej $\{\phi_j\}$ (a) i bazy hierarchicznej $\{\psi_{l,j}\}$ (b) dla jednowymiarowej siatki elementów liniowych przy jednorodnych warunkach Dirichleta w x_0 i x_{N+1} . Funkcje bazy hierarchicznej indeksowane są numerem poziomu (stopnia zagęszczenia) siatki l i kolejnym numerem i węzłów dodanych.

Niezależnie od typu bazy, każda funkcja bazowa związana jest z innym węzłem dyskretyzacji i stanowi złożenie zaczepionych w nim funkcji kształtu, we wszystkich elementach zawierających ten węzeł. Ilustrację funkcji bazowych na jednowymiarowej siatce o elementach liniowych zawiera rysunek 3.2.

W bazach hierarchicznych, po każdym kroku zagęszczania układ funkcji bazowych jest poszerzany o funkcje zaczepione tylko w nowo dodanych węzłach. Może to przynieść pewne oszczędności pamięciowe oraz obliczeniowe związane z konstruowaniem elementów globalnej macierzy współczynników. W przypadku implementacji w metodach wielosiatkowych bazy hierarchiczne wykazują dobre właściwości w porównaniu do baz węzłowych, jednak tylko dla problemów dwuwymiarowych [8, 23]. Przy zagadnieniach trójwymiarowych zbieżność wielosiatkowych metod hierarchicznych wyraźnie się pogarsza [133].

Elementy bazy węzłowej tworzone są z funkcji kształtu według procedury

$$\phi_n(\mathbf{x}) = \bigcup_{e=1}^K \sum_{m=1}^{M^e} \delta_{nm}^e N_m^e(\mathbf{x}) \quad \text{dla } n = 1, \dots, N, \quad (3.28)$$

gdzie

$$\delta_{nm}^e = \begin{cases} 1 & \text{gdy globalny węzeł } n \equiv \text{lokalny węzeł } m \text{ w } T^e \\ 0 & \text{kiedy indziej} \end{cases} \quad (3.29)$$

Zagadnienie lokalne i globalne

W każdym elemencie można zdefiniować zagadnienie lokalne w oparciu o bazę złożoną z funkcji kształtu jednego elementu. Niewiadomymi są wartości węzłowe aktualnego elementu $\mathbf{u}_h^e$ według aproksymacji (3.25), w układzie równań

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_h^e \mathbf{u}_h^e &= \mathbf{b}_h^e, \quad \text{gdzie} \\ b_{hp}^e &= \ell(N_p^e) \\ A_{hpq}^e &= a(N_p^e, N_q^e) \quad \text{dla } p, q = 1, \dots, M^e. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Samo zagadnienie ma naturalnie wbudowane w słabą postać jednorodne warunki brzegowe Neumanna, które jednak nie zapewniają jednoznaczności rozwiązania. Oczywiście, rozwiązanie problemu globalnego wymaga jednoczesnego rozwiązywania wszystkich zagadnień lokalnych sprzężonych ze sobą poprzez wspólne węzły sąsiadujących ze sobą elementów. Realizuje się to tworząc całościowy układ równań z globalną macierzą współczynników bezpośrednio z aproksymacji (3.18) z globalnym układem funkcji bazowych według zależności (3.21). Przy bazach węzłowych można skorzystać również ze sformułowań lokalnych (3.30) i procedury łączenia macierzy lokalnych

$$A_{hij} = \sum_{e=1}^K A_{hpq}^e \quad b_{hi} = \sum_{e=1}^K b_{hp}^e \quad (3.31)$$

wykorzystującej odwzorowanie indeksów lokalnych $\{p, q\}^e$ na globalne $\{i, j\}$, co w połączeniu z (3.30) i (3.28) daje

$$\begin{aligned} A_{hij} &= \sum_{e=1}^K \sum_{p,q=1}^{M^e} \delta_{ip}^e \delta_{jq}^e a(N_p^e, N_q^e) \\ b_{hi} &= \sum_{e=1}^K \sum_{p=1}^{M^e} \delta_{ip}^e \ell(N_p^e). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Globalna macierz współczynników $\mathbf{A}_h$ jest rzadka – element $A_{hij} \neq 0$ tylko wtedy, gdy węzły i i j należą do tego samego elementu, inaczej mówiąc rozkład elementów niezerowych macierzy oddaje konfigurację połączeń między węzłami siatki. Dla zagadnienia z operatorem symetrycznym dodatnio określonym macierz współczynników jest również symetryczna dodatnio określona (SPD).

Sformułowanie problemów lokalnych (3.30) pozwala na niezależne obliczanie funkcjonału dla każdego elementu

$$\begin{aligned} F_h^e(\mathbf{u}_h^e) &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_h^{eT} \mathbf{A}_h^e \mathbf{u}_h^e - \mathbf{u}_h^{eT} \mathbf{b}_h^e, \quad \text{przy czym} \\ F_h(\mathbf{u}_h) &= \sum_{e=1}^K F_h^e(\mathbf{u}_h^e) \end{aligned} \quad (3.33)$$

a tym samym energii związanej z każdym elementem.

Inne zastosowanie zagadnień lokalnych to obliczanie estymowanego błędu dyskretyzacji na podstawie aktualnego rozwiązania – tzw. estymacja *a posteriori*.

3.3 Estymacja błędu dyskretyzacji

W adaptacyjnych odmianach metod wielosiatkowych z elementami skończonymi kluczową rolę odgrywa określenie obszarów dziedziny, które wymagają dalszego zagęszczenia siatki. Standardowa procedura polega na wyszukiwaniu elementów siatki, gdzie błąd dyskretyzacji przekracza założoną wartość progową. Niezależnie od sposobu ustalania tego progu i schematu zagęszczania, niezbędna jest właściwa lokalna *estymacja błędu*, czyli oszacowanie błędu dyskretyzacji (zwanego również błędem aproksymacji) we wszystkich elementach siatki na podstawie rozkładu bieżącego przybliżenia rozwiązania (estymacja *a-posteriori*).

Poza adaptacyjną optymalizacją siatki, estymacja służy do oceny całkowitej dokładności rozwiązania, która z kolei niezbędna jest jako kryterium zakończenia iteracji zagęszczania. Innym ważnym zastosowaniem dla estymatorów błędu jest ekstrapolacja rozwiązania, szczególnie w postaci energii. Zagadnienie to szczegółowo przedstawiono w rozdziale 5.3.2.

Powszechnie stosowaną miarą błędu jest norma energetyczna, która jest naturalnie obecna w metodach elementów skończonych. Aproksymacja Galerкина korzysta z zamiany oryginalnego problemu na jego *słabe* sformułowanie $a(u, v) = \ell(v)$, $\forall v \in H^1$. Rozwiązanie u zapewnia z kolei, dla równoważnego zagadnienia wariacyjnego, minimum funkcjonału zbudowanego w oparciu o tę samą formę dwuliniową $a(u, v)$. Funkcjonał ten, zależnie od fizycznej natury problemu ma sens całkowitej energii związanej z analizowaną strukturą. Dostępny globalnie, dla całej dziedziny, lub lokalnie, dla każdego elementu siatki oddzielnie. Norma energetyczna jest specyficzna dla konkretnego zagadnienia – $\|u\|^2 = a(u, u)$.

Do oceny jakości różnych estymatorów często stosuje się tzw. *indeks efektywności* k_ε , definiowany jako stosunek błędu estymowanego do prawdziwego. Estymator uznaje się za *efektywny*, gdy indeks jest ograniczony wraz ze swoją odwrotnością dla dowolnych rozmiarów siatki. Gdy dodatkowo $k_\varepsilon \rightarrow 1$ dla $h \rightarrow 0$, to estymator jest *asymptotycznie dokładny*. O ile większość metod prowadzi do efektywnej estymacji błędu, to asymptotyczna dokładność zwykle zachodzi dla szczególnych typów siatek.

3.3.1 Estymacja ekstrapolacyjna

Najprostszym podejściem do estymacji błędu jest ekstrapolacja Richardsona (patrz rozdział 5.1) wykonywana oddzielnie dla każdego elementu siatki e . Jeden krok iterowanej ekstrapolacji według schematu (5.3) i rozwinięcia (5.8) pozwala na oszacowanie energetycznej normy błędu w kroku zagęszczania j :

$$\varepsilon_e := \|\tilde{e}_j^e\|^2, \quad \text{gdzie} \quad \tilde{e}_j^e = \frac{u_j^e - u_{j-1}^e}{q_j^2 - 1} \approx e_j^e \quad (3.34)$$

jest przybliżeniem błędu dokładnego $e_j^e := u^e - u_j^e$, a u^e oznacza wartości rozwiązania w węzłach należących do elementu e . Norma energetyczna $||| \cdot |||$ dotyczy całego elementu, a nie poszczególnych wierzchołków, i zdefiniowana jest poprzez wartość funkcjonału w tym elemencie.

Estymacja błędu na podstawie ekstrapolacji Richardsona nie gwarantuje dostatecznej dokładności, dlatego zwykle stosuje się bardziej precyzyjne estymatory, jednak ceną ich jest wyraźnie większy koszt numeryczny. Wyróżnić tu można dwie zasadnicze klasy metod estymacji – *rezydualne* oraz oparte na rozwiązaniu tzw. *lokalnego zagadnienia* dla błędu.

3.3.2 Estymatory rezydualne

Błąd oszacowuje się za pomocą rezyduów liczonych wewnątrz elementów siatki oraz na ich brzegach [124]— r_I, r_B . Przykładowo dla równania Poissona o postaci

$$-\nabla a \nabla u = f$$

przybliżenie norma energetycznej błędu w elemencie T , $\varepsilon_T = |||e^T|||^2$ oblicza się jako

$$\varepsilon_T = \frac{h_T^2}{a} \int_T r_I^2 d\Omega + \frac{h_T}{a} \int_{\partial T} r_B^2 d\Gamma,$$

gdzie h_T to maksymalna długość boku elementu T , $r_I = f + \nabla a \nabla u$, a rezydum na brzegu wyznacza uskok składowej normalnej gradientu pomiędzy elementem T i jego sąsiadem N

$$r_B = k_N \nabla_n u_N - k_T \nabla_n u_T.$$

Ten typ estymacji błędu nie numerycznie kosztowny, lecz może nie gwarantować asymptotycznej dokładności.

W szczególnych sytuacjach część błędu pochodząca od r_I (wnętrze elementu) może zostać pominięta. Właściwość ta dotychczas została wykazana dla liniowych elementów trójkątnych [37].

3.3.3 Estymatory z lokalnym zagadnieniem dla błędu

Jest to szeroka klasa estymatorów opartych na porównywaniu rozwiązania na bieżącej siatce z rozwiązaniem lokalnych problemów o lepszej aproksymacji, sformułowanych dla poszczególnych elementów.

Poprawę aproksymacji w ogólności można uzyskać poprzez tzw. rozdrobnienie lub precyzowanie typu p lub h (p-refinement lub h-refinement), czyli odpowiednio zwiększenie rzędu p elementów (z reguły z liniowych na kwadratowe) na nie zmienionej siatce lub zgęszczanie siatki i zmniejszanie kroku h . Do konstruowania estymatorów błędu z reguły stosuje się pierwszy typ rozdrobnienia i najczęściej na siatce elementów liniowych rozwiązywane są lokalne problemy o aproksymacji kwadratowej, czyli

$$\varepsilon = |||u^{(p)} - \tilde{u}^{(p+1)}|||^2, \quad \text{gdzie } p = 1 \quad (3.35)$$

oraz $\tilde{u}^{(2)}$ oznacza rozwiązanie kwadratowego problemu lokalnego.

Warunki brzegowe na elementach powstają z rozwiązania problemu globalnego na bieżącej siatce i mogą mieć postać warunków Dirichleta [5] lub częścię Neumanna [12].

Przedstawiona w [11] odmiana z warunkami Neumanna oparta jest na *bazach hierarchicznych* (hierarchical bases) i wyróżnia się możliwością wykorzystania estymacji do dokładniejszej interpolacji rozwiązania w węzłach nowo dodanych w trakcie adaptacyjnego zagęszczenia. Dysponując rozwiązaniami lokalnymi o lepszej dokładności aproksymacji można unikać konieczności rozwiązywania zagadnienia globalnego przez kilka następnych kroków zagęszczania. Ostatecznie jednak, problem globalny powinien zostać przeliczony na siatce o docelowej dokładności lub inaczej wynik lokalny można będzie traktować jedynie jak szacunkową ekstrapolację.

Rozdział 4

Generacja siatki

4.1 Charakterystyka geometryczna planarnych układów mikrofalowych

Warstwy metalizacji

Najbardziej charakterystyczną cechą układów planarnych są cienkie warstwy metalizacji o grubościach wielokrotnie mniejszych od wymiarów całej struktury. W układach monolitycznych grubość warstw przewodzących może być 100 razy mniejsza od samego podłoża. Przy analizie quasi-statycznej wszystkie elementy przewodzące traktuje się jak „dziury”, na których wymuszone są warunki brzegowe. Dziedziną analizy jest obszar nieprzewodzący (dielektryk lub materiał magnetyczny), z którego wykrojone są fragmenty z cienkich warstw przewodnika. We wspólnej cienkiej warstwie sąsiadują ze sobą obszary przeznaczone do dyskretyzacji z obszarami, które dyskretyzacja ma omijać.

Zadawanie dowolnie cienkiej warstwy metalizacji jest kłopotliwe przy dyskretyzacji, wymaga bowiem lokalnego rozdrobnienia siatki do wymiarów bliskich grubości metalizacji, a w efekcie znacznego wzrostu liczby niewiadomych. Z tego powodu lepiej jest warstwy bardzo cienkie zastąpić grubością zerową, która jednak wymaga specjalnego traktowania przy dyskretyzacji elementami skończonymi.

Podłoża

Najczęściej podłoże stanowi jedną lub więcej warstw jednorodnego materiału izolacyjnego uwarstwionych równolegle do płaszczyzny metalizacji – zwykle poniżej, choć możliwe są również nakładki zakrywające metalizację. W modelu matematycznym parametry elektromagnetyczne tych warstw przekładają się na współczynniki równania różniczkowego. Zależnie od metody ich rozwiązywania, dyskretyzacja takich obszarów musi, powinna lub nie musi odtwarzać geometrii uwarstwienia, jednak silne uskoki współczynników występujące pomiędzy węzłami dyskretyzacji prowadzić mogą do pogorszenia uwarunkowania numerycznego problemu.

Zamknięcie

Fizyczne zamknięcie struktury ekranami metalowymi naturalnie ogranicza dziedzinę analizy, co jest niezbędne przy analizie statycznej. Jeżeli efekt ekranowania ma być pominięty, to i tak ekrany trzeba umieścić, lecz na tyle daleko, aby ich wpływ na rozkład pola był faktycznie pomijalny. Powstają wtedy jednorodne obszary o bardzo dużych rozmiarach, które wraz z oddalaniem się od warstw niejednorodnych powinny być dyskretyzowane bardzo oszczędnie, czyli rzadko. W przeciwnym przypadku numeryczny rozmiar zagadnienia rozrośnie się znacznie ponad faktyczne potrzeby, pogarszając efektywność metody analizy. Podobna sytuacja występuje w strukturach monolitycznych, gdzie podłoża są bardzo grube w porównaniu z warstwami metalizacji.

4.2 Siatki dla metod elementów skończonych

Metody elementów skończonych pozwalają na symulację zagadnień fizycznych opisywanych przez równania różniczkowe cząstkowe w obszarach o praktycznie dowolnej konfiguracji geometrycznej. Wynika to z faktu, iż metody te opierają się na dyskretyzacji dziedziny uzyskanej poprzez jej podział na „małe” elementy geometryczne o dowolnych kształtach. Najczęściej są to trójkąty lub czworokąty w przypadku 2-wymiarowym i czworościany lub nieregularne sześciany dla problemów 3-wymiarowych. Elementy przylegają do siebie ścianami, bokami lub wierzchołkami tworząc siatkę.

Najbardziej podstawowym i oczywistym kryterium doboru siatki elementów skończonych jest zapewnienie wymaganej dokładności dyskretyzacji, czyli przybliżenia zagadnienia ciągłego jego odpowiednikiem dyskretnym. Siatka z większą liczbą elementów o drobniejszych rozmiarach zmniejsza błąd dyskretyzacji, ale staje się bardziej „kosztowna”. Wzrasta bowiem koszt numeryczny samej generacji siatki, ale również jej dalszej obróbki, czyli przede wszystkim rozwiązania zagadnienia dyskretnego, co wynika ze zwiększenia liczby niewiadomych. Dla elementów pierwszego rzędu jest ona równa liczbie węzłów siatki. Dodatkowo kształt elementów może wpływać na efektywność rozwiązywania równania dyskretnego. Siatka optymalna jest najlepsza ze względu na określone kryteria, które spełnia się poprzez dobór takich cech charakterystycznych jak metoda generacji, rozmiary elementów oraz ich kształty i liczba.

4.2.1 Podstawowe typy siatek

Siatki jednorodne

Siatki jednorodne uzyskuje się z równomiernego podziału dziedziny w kierunkach poszczególnych współrzędnych (rys. 4.1a). Jest to najprostsza, więc najmniej kosztowna metoda generacji, która gwarantuje stałą, precyzyjnie kontrolowaną, dobrą jakość elementów. Siatki takie mają jednak najgorsze właściwości pod względem odwzorowania geometrii rozwiązywanego zagadnienia. Dodatkowo, poprzez równomierne

rozmieszczenie węzłów, redukcja błędów dyskretyzacji wiąże się z zagęszczaniem w całej dziedzinie, podczas gdy przewidywany rozkład przestrzenny rozwiązania może wymagać dokładniejszej siatki tylko w określonych obszarach.

Siatki regularne

Siatki regularne (structured) powstają z siatek jednorodnych poprzez dowolną transformację współrzędnych, czyli przesuwanie węzłów według określonego wzorca (rys. 4.1b). Dopasowanie siatki do dowolnej geometrii jest już łatwiejsze, choć może prowadzić do powstawania elementów o niekorzystnych kształtach (bardzo wydłużone lub spłaszczone). W najprostszym przypadku transformacja może dotyczyć każdej ze współrzędnych niezależnie, co odpowiada zastosowaniu zmiennego kroku dyskretyzacji w siatce jednorodnej (rys. 4.1c).

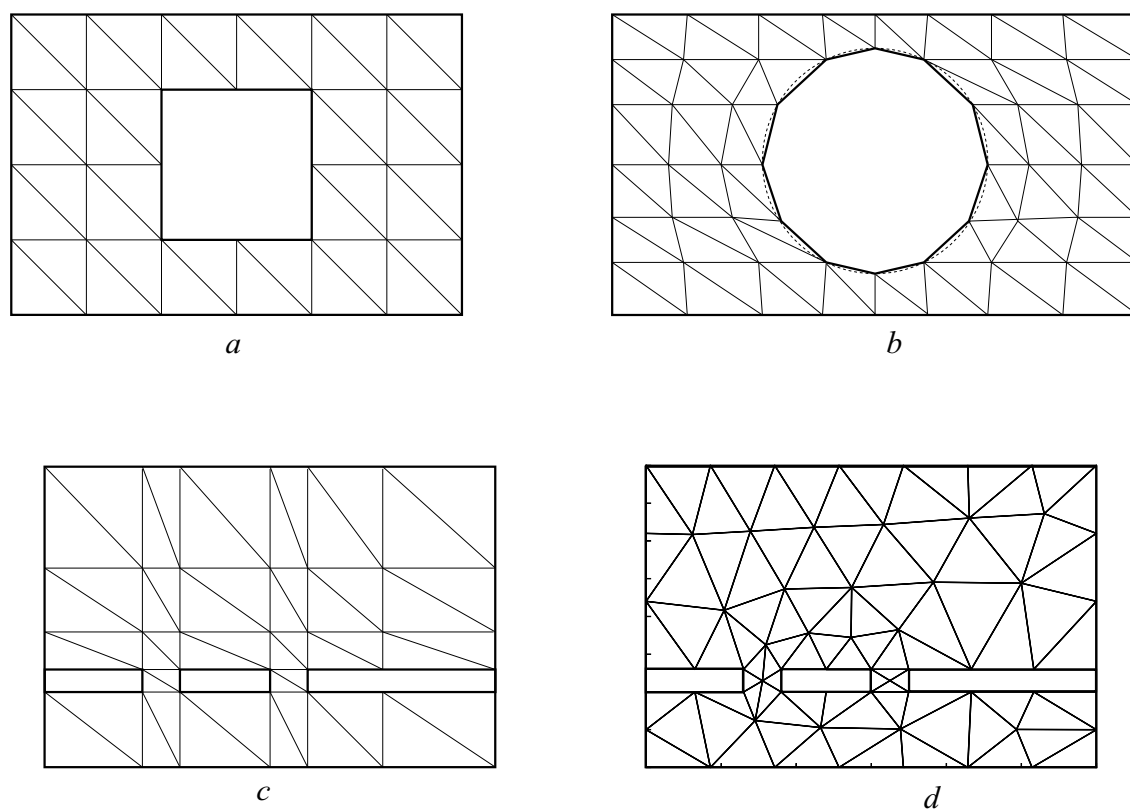
Szczególną odmianą siatek regularnych są siatki lokalnie zagęszczane, w których wybrane elementy zostały podzielone na mniejsze poprzez dodanie punktów dyskretyzacji w kierunkach współrzędnych. Zwykle stosuje się je w przypadku niezależnych transformacji współrzędnych. Efekt lokalnego zagęszczania można również uzyskać przez odpowiedni dobór transformacji bez dodawania nowych węzłów, jednak dzieje się to kosztem rozrzedzenia w obszarach sąsiednich.

Siatki nieregularne

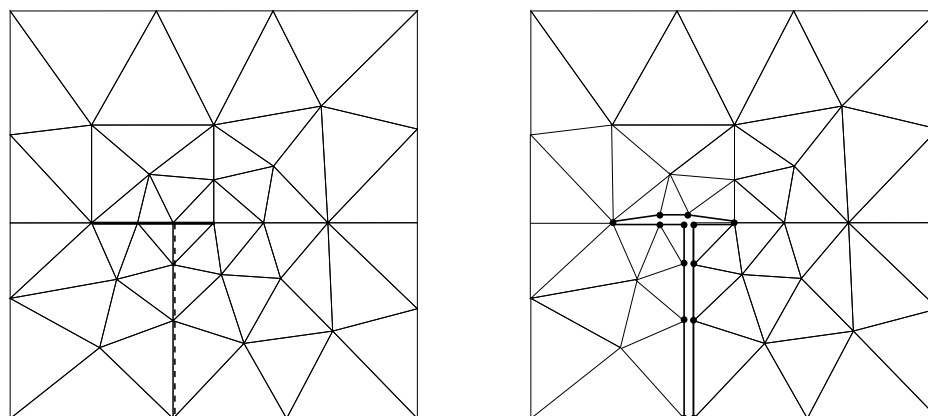
Rozkład, kształt i wielkość elementów na siatce nieregularnej (unstructured) jest niezależny od układu współrzędnych, dzięki czemu uzyskuje się pełną swobodę w odtwarzaniu dowolnej geometrii modelowanej struktury (rys. 4.1d). Generowanie siatek nieregularnych jest jednak złożone, a przez to numerycznie kosztowne. Uniwersalne generatory siatek wymagają implementacji skomplikowanych algorytmów, których tworzenie i rozwijanie stało się niezależną dziedziną matematyki stosowanej. Gotowe generatory siatek różnią się między sobą dostępnością (komercyjne i publiczne), stopniem wszechstronności, możliwością kontrolowania parametrów siatki oraz jakością elementów w siatce. O ile stosunkowo łatwo dostępne są publiczne generatory 2-wymiarowe, to dla analizy 3-wymiarowej struktur bardzo złożonych (liczne dziury) zdecydowanie przeważają programy komercyjne.

Siatki złożone

W przypadku zagadnień o znacznym stopniu zróżnicowania komplikacji geometrycznej, wewnątrz jednej dziedziny można stosować kilka różnych technik generacji i typów siatek dla różnych podobszarów. Przykładowo, w strukturach wielkoskalowych (duża dynamika rozmiarów elementów geometrii struktury) dla wielkich obszarów jednorodnych stosować można siatki regularne, zaś w okolicach drobnych niejednorodności i silnych zmian geometrii brzegów dziedziny – siatki nieregularne. Właśnie planarne układy mikrofalowe, a szczególnie monolityczne dobrze nadają się do stosowania siatek złożonych, gdzie siatki nieregularne mogłyby być użyte jedynie w okolicach nieciągłości.



Rysunek 4.1: Przykładowe typy siatek dwuwymiarowych – jednorodna (a), regularna (structured) (b,c), nieregularna (unstructured) (d)



Rysunek 4.2: Tworzenie siatki z paskami zerowej grubości (linia ciągła) i rozcięciem dziedziny (linia przerywana). W siatce zmodyfikowanej podwójne węzły rozsunięto tylko dla potrzeb ilustracji, w rzeczywistości mają one te same współrzędne.

4.2.2 Ogólne kryteria wyboru siatek

Specyfika geometrii zagadnienia

Jeżeli istotny jest koszt generatora siatki (dostępność programu i czas generacji), to należy uzależnić typ siatki do stopnia złożoności geometrii i jej specyfiki. Nie zawsze potrzebna jest kosztowna siatka nieregularna. W przypadku struktur planarnych o prostokątnych elementach metalizacji powinna wystarczyć siatka regularna, co przy analizie trójwymiarowej może przynieść wymierne oszczędności kosztów generacji.

Jak wspomniano wcześniej, szczególnym przypadkiem geometrii są struktury zawierające obiekty o zerowej grubości. Mogą to być paski na tyle cienkie, że bardziej opłaca się pominąć ich grubość lub specjalne rozcięcia dziedziny stosowane w analizie rozkładu magnetycznego potencjału skalarnego [96]. Siatka musi być wtedy generowana wymuszając przebieg brzegów elementów tam, gdzie ma być cienki pasek lub rozcięcie. Następnie siatka zostaje zmodyfikowana przez podwojenie węzłów dyskretyzacji (bez zmiany współrzędnych) w tych przekrojach i związanie ich z elementami (trójkąty lub czworokąty) po przeciwnych stronach (rys. 4.2).

Optymalny kształt siatki

Należy znaleźć kompromis pomiędzy następującymi postulatami:

- mała liczba elementów (mniej zmiennych)
- gęsta siatka (lepszą dokładność dyskretyzacji)
- dobry kształt elementów (trójkąty bardzo rozwarte pogarszają zbieżność)

Najlepszym podejściem łączącym dwa pierwsze warunki jest siatka adaptująca się do przestrzennego rozkładu rozwiązania. Wtedy dogęszczana będzie lokalnie, tam gdzie występują odpowiednio silne gradienty rozwiązania. Trzeba jednak wcześniej znać owo rozwiązanie. Adaptacyjne metody wielosiatkowe startując z siatki rzadkiej prowadzą zagęszczanie na podstawie estymacji błędu dotychczasowej dyskretyzacji. Przy hierarchicznym algorytmie zagęszczania, siatki rzadkie (z poprzednich kroków zagęszczania) pamiętane są i wykorzystywane do korekcji rzadką siatką w cyklu-V. Sam algorytm zagęszczania przejmuje na siebie znaczną część funkcji generatora siatki.

4.2.3 Wybór siatek dla metod wielosiatkowych

Istotą metod wielosiatkowych jest cykliczne korygowanie wektora błędu na siatkach rozrzedzonych. Można je tworzyć w dwóch zasadniczych trybach:

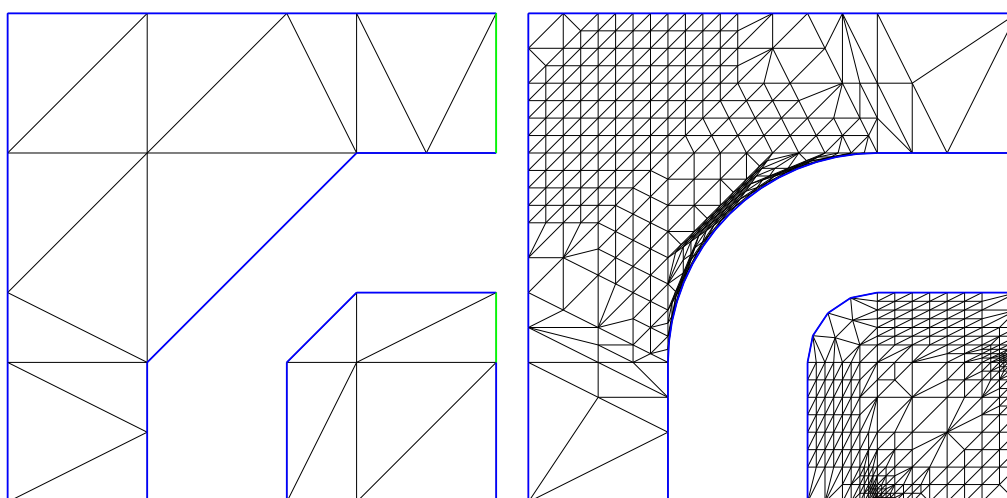
- generowanie siatki najrzadszej i jej sukcesywne dogęszczanie w cyklu FMG (rys. 2.7)
- generowanie docelowej siatki dokładnej i jej geometryczne rozrzedzanie

Pierwsze podejście jest atrakcyjne ze względu na możliwość włączenia w cykle wielosiatkowe algorytmu adaptacyjnego zagęszczania. Tworzenie siatki rzadkiej (zgrubnej) nie musi więc zapewniać wymogu minimalizowania błędu dyskretyzacji, czyli jest prostsze i może być wykonywane nieskomplikowanymi i szybkimi generatorami siatek regularnych.

Siatka najbardziej zgrubna (na najniższym poziomie cyklu wielosiatkowego) powinna spełniać dwa rywalizujące ze sobą wymagania:

- ma być możliwie najrzadsza – głębsza korekcja błędu na siatce rzadkiej, więc skuteczniejsze eliminowanie wolnozmiennych składników błędu i szybsza zbieżność
- nie może być zbyt rzadka – pogorszenie jakości elementów w siatce przez nadmierne wydłużenie i spłaszczenie elementów (trójkątów lub czworokątów), co spowalnia zbieżność

Stopień rozrzedzenia siatki w klasycznych metodach z elementami skończonymi jest naturalnie ograniczany geometryczną konfiguracją brzegów dziedziny (warunków brzegowych), do których musi być dobrze wpasowana. Krzywoliniowe fragmenty brzegu narzucają w klasycznych metodach elementów skończonych konieczność rozdrobnienia siatki, zbyt zgrubne bowiem przybliżenie łuków i krzywych powierzchni odcinkami prostymi i płaszczyznami zwiększa błąd dyskretyzacji już na etapie samego formułowania zagadnienia. Inaczej jest w metodach wielosiatkowych, gdzie zgrubne siatki służą jedynie do „rozruszania” wolnozmiennych składowych błędów – nie muszą więc wiernie odwzorowywać geometrii warunków brzegowych. W trakcie zagęszczania siatka musi jednak adaptować się do ich krzywizn tak, by zapewnić na



Rysunek 4.3: Adaptacyjne precyzowanie geometrii poprzez zagęszczanie węzłów dyskretyzacji na krzywoliniowych brzegach – siatka początkowa (24 węzły) i siatka po 8 krokach zagęszczania (664 węzły).

najwyższym poziomie (siatka najdokładniejsza) dostateczną wierność odtwarzania brzegów zagadnienia ciągłego (rys. 4.3).

Metody wielosiatkowe pozwalają więc osiągnąć optymalną dyskretyzację poprzez:

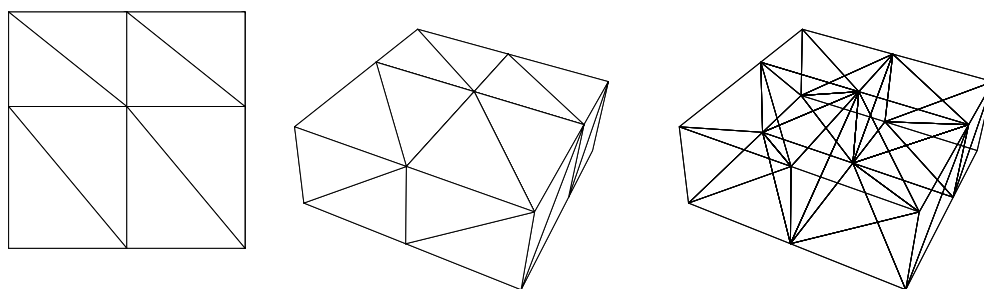
- adaptacyjne dopasowanie siatki do rozkładu rozwiązania
- adaptacyjne dopasowanie siatki do geometrii warunków brzegowych.

4.3 Przykładowe generatory siatki trójwymiarowej

Przedstawione przykładowe generatory siatki trójwymiarowej przeznaczone są do tworzenia rzadkich siatek na potrzeby adaptacyjnej metody wielosiatkowej.

4.3.1 Generacja siatki regularnej – program tri2tet

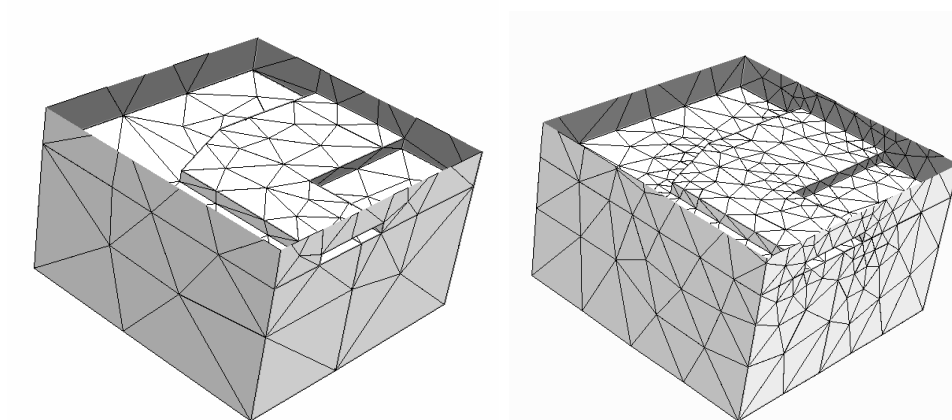
Warstwowa struktura mikrofalowych układów planarnych pozwala zasadniczo zredukować koszt generacji siatki trójwymiarowej (3D). Opracowano oryginalną procedurę – program **tri2tet** – generowania regularnej czworościennej siatki 3D na podstawie trójkątnych siatek dwuwymiarowych (2D) zadanych pomiędzy poziomymi warstwami struktury. Warstwy wyznaczone są przez fizyczny rozkład materiałów, ale mogą też być sztucznie stworzone wewnątrz obszarów jednorodnych, aby wymusić drobniejszą dyskretyzację. Siatki na wszystkich granicach warstw są topologicznie jednokowe – węzły mogą być przesuwane, ale tak żeby łącząc je poprzecznie do płaszczyzny warstw, elementy 2D na obu granicach poziomych każdej warstwy utworzyły pięciościany (graniastosłupy) o równoległych podstawach trójkątnych. Każdy pięciościan



Rysunek 4.4: Tworzenie uwarstwionej siatki trójwymiarowej z siatki dwuwymiarowej – przykład pojedynczej warstwy

jest następnie dzielony na trzy czworościany. Wcześniej siatki trójkątne muszą być odpowiednio uporządkowane, tak aby czworościany przylegających do siebie pięciościanów miały wspólne krawędzie. Na rysunku 4.4 przedstawiono przykładową pojedynczą warstwę siatki 3D.

4.3.2 Generacja siatki nieregularnej – program NETGEN



Rysunek 4.5: Siatki wygenerowane przez program NETGEN – najrzadsza (123 węzły, czas generacji 2.6 sek) i umiarkowanie gęsta (634 węzły, czas 12.3 sek)

Jest to program upubliczniony dla zastosowań niekomercyjnych [115], do generacji nieregularnych siatek czworościennych. Jego podstawowymi zaletami są:

- dostępność
- uniwersalność – zdolność generowania siatek dla bardzo skomplikowanych struktur z wieloma wydrążeniami
- czytelny interfejs graficzny – możliwość dokładnej inspekcji geometrii 3D oraz wygenerowanej siatki

- dobra kontrola stopnia zagęszczenia siatki
- wygodny język opisu geometrii struktury – struktura tworzona jest przez łączenie prymitywów trójwymiarowych przy pomocy operacji mnogościowych
- wbudowana „skłonność” do rozrzedzania siatki – program stara się maksymalnie rozrzedzać siatkę wszędzie tam, gdzie geometria struktury na to pozwala zachowując przy tym minimalną zadaną jakość elementów (unikanie zbyt ostrych i zbyt rozwartych kątów); program był stworzony z myślą o stosowaniu go dla potrzeb metod wielosiatkowych

Przykładowa definicja struktury zagiętego paska z rozcięciem dziedziny (rys. 4.5) podano poniżej.

```
algebraic3d
##Zagiecie z rozcieciem: pasek t=0.24

solid cube = orthobrick( 0,0,0; 1,1,1) -bc=0;
solid down = plane (0, 0.48, 0; 0, 1, 0) -bc=0;
solid right = plane (0.4, 0, 0; -1, 0, 0.1) -bc=111;
solid back = plane (0, 0, 0.6; 0, 0, 1) -bc=111;
solid cubeup = cube and not down -bc=201;
solid stripleft = plane (0.7, 0, 0; -1, 0, 0)
                  and plane (0, 0, 0.5; 0, 0, 1) ;
solid stripright = plane (0.3, 0, 0; -1, 0, 0)
                  and plane (0, 0, 0.8; 0, 0, 1)
                  and plane (0.3, 0, 0.5; -0.5, 0, 0.2) ;
solid strip0 = not stripleft and stripright
              and plane (0, 0.72, 0; 0, 1, 0) -bc=203;
solid strip = strip0 and cubeup;
solid gora = cubeup and not strip0;
solid dollewo = cube and down
              and not (right and back) -bc=202;
solid dolprawo = cube and down and right and back -bc=202;

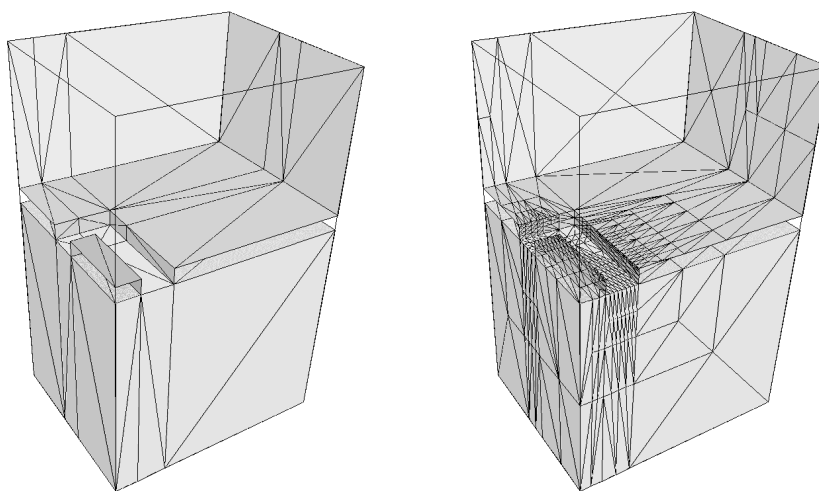
tlo gora -col=[0, 0, 1] -transparent;
tlo dolprawo -col=[0.5, 0, 1] -transparent;
tlo dollewo -col=[0, 0.5, 1] -transparent;
tlo strip -col=[1, 0.5, 0] ;
```

4.3.3 Porównanie siatek i generatorów

Poprawianie stopnia rozrzedzenia siatki

Podstawowym problemem w stosowaniu automatycznych generatorów siatek nieregularnych dla celów metod wielosiatkowych jest generowanie siatki możliwie rzad-

kiej. W programie NETGEN, którego szczególną zaletą jest możliwość wygodnego sterowania gęstością siatki (wstępnie ustawione poziomy – very coarse, coarse, moderate, fine, very fine), stopień rozdrobnienia zależy bezpośrednio od najmniejszych wymiarów elementów dyskretyzowanej struktury. Wynika to z wbudowanego mechanizmu poprawiania jakości wygenerowanych elementów, który automatycznie podzieli bardzo wydłużone lub spłaszczone elementy na wiele mniejszych o lepszych kształtach, co wymusza z kolei dalsze rozdrabnianie siatki w ich sąsiedztwie. Jest to najważniejsza kwestia w dyskretyzacji struktur planarnych o cienkich paskach lub wąskich szczelinach. W siatce regularnej (program `tri2tet`) ograniczenie takie nie istnieje, gdyż podczas generacji nie kontroluje się jakości elementów, można więc uzyskać siatkę bardzo rzadką o dowolnie „złych” elementach, czego przykładem może być struktura z rys. 4.6.



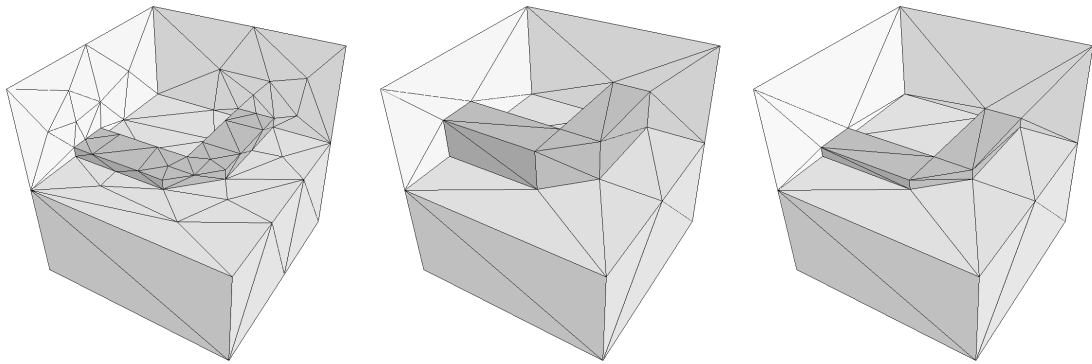
Rysunek 4.6: Trójwymiarowa siatka regularna z programu `tri2tet` dla rozwartego końca linii koplanarnej (połowa struktury symetrycznej) – siatka początkowa i siatka po 4 krokach adaptacyjnego zagęszczania.

Ażeby poprawić rozrzedzenie najbardziej zgrubnej siatki generowanej przez NETGEN kosztem pewnego pogorszenia elementów, można do dyskretyzacji zadać strukturę o sztucznie pogrubionych paskach, a następnie przesunąć węzły na ich powierzchni uzyskując żadaną grubość (rys. 4.7). Taka transformacja siatki z pogrubionymi paskami może obejmować również dowolnie odległe sąsiedztwo przesuwanej powierzchni łagodząc tym samym nieco efekt deformacji elementów.

Wpływ grubości paska

Analizowano strukturę zagięcia mikropaskowego przedstawioną na rysunku 4.8.

Wpływ grubości paska (warstwy metalizacji) wyrażonej względem wysokości całej struktury jako $t_r = \frac{t}{H}$ na parametry siatki generowanej przez NETGEN przedstawiono w tabeli 4.1. W programie `tri2tet` grubość paska nie wpływa na liczbę węzłów ani na czas generacji (tab. 4.2). Stała, niezależna od grubości paska maksymalna wartość kątów między ścianami czworościanów wynika z regularności siatki



Rysunek 4.7: Poprawa rozrzedzenia siatki (z lewej) poprzez transformację siatki z pogrubionymi paskami (w środku). Siatka najrzadsza wygenerowana automatycznie ma 96 węzłów, a siatka rozrzedzona (z prawej) – 28.

$t_r = t/H$	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
liczba węzłów	28	56	96	221	338
czas generacji [s]	1.2	1.5	2.2	4.7	7.1
trójkąty: min kąt[°]	12.3	11.2	10.2	3.8	2.5
trójkąty: max kąt[°]	134.0	138.4	137.9	163.1	152.6
czworościany: min kąt[°]	11.6	10.4	12.8	4.4	2.4
czworościany: max kąt[°]	152.1	155.7	158.9	166.7	168.9

Tabela 4.1: Parametry siatki najrzadszej (very coarse) z programu NETGEN przy zmianie grubości paska.

początkowej, jednak przy adaptacyjnym zagęszczaniu kąty rozwarte wyraźniej rosną dla cienkich pasków, niebezpiecznie zbliżając się do 180° .

Wpływ siatki początkowej na zbieżność rozwiązania

Porównano profile zbieżności adaptacyjnej metody wielosiatkowej o schemacie FMG dla struktury zagięcia mikropaskowego z rys. 4.8 o różnych grubościach paska. Siatki początkowe wygenerowane przez `tri2tet` mają 64 węzły i różnią się przede wszystkim stopniem spłaszczenia elementów w warstwie metalizacji. Wyniki zestawione w tabeli 4.4 zawierają liczbę węzłów po maksymalnym kroku zagęszczania – rozmiar dostępnej pamięci pozwalał na przeprowadzenie 9 kroków.

Zaobserwowanym skutkiem złego kształtu elementów (bardziej spłaszczone elementy dla cieńszych pasków) było wydłużenie rozwiązywania układu równań po każdym kroku zagęszczania (liczba iteracji i czas rozwiązania) oraz pogorszenie dokładności dyskretyzacji (błąd estymowany)[4]. Wstępne zagęszczenie siatki z 64 do 100 węzłów spowodowało poprawę zbieżności dla najcieńszego paska dzięki lepszemu kształtowi elementów, ale również pogorszenie dokładności przez gorzej dopasowaną siatkę (wstępne zagęszczenie nie było adaptacyjne).

$t_r = t/H$	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
początek: min kąt $^{\circ}$	15.8	11.1	5.7	2.3	1.1
początek: max kąt $^{\circ}$	150.5	150.5	150.5	150.5	150.5
5 krok: min kąt $^{\circ}$	7.7	5.3	2.8	1.1	0.4
5 krok: max kąt $^{\circ}$	159.6	169.3	174.6	177.8	179.1

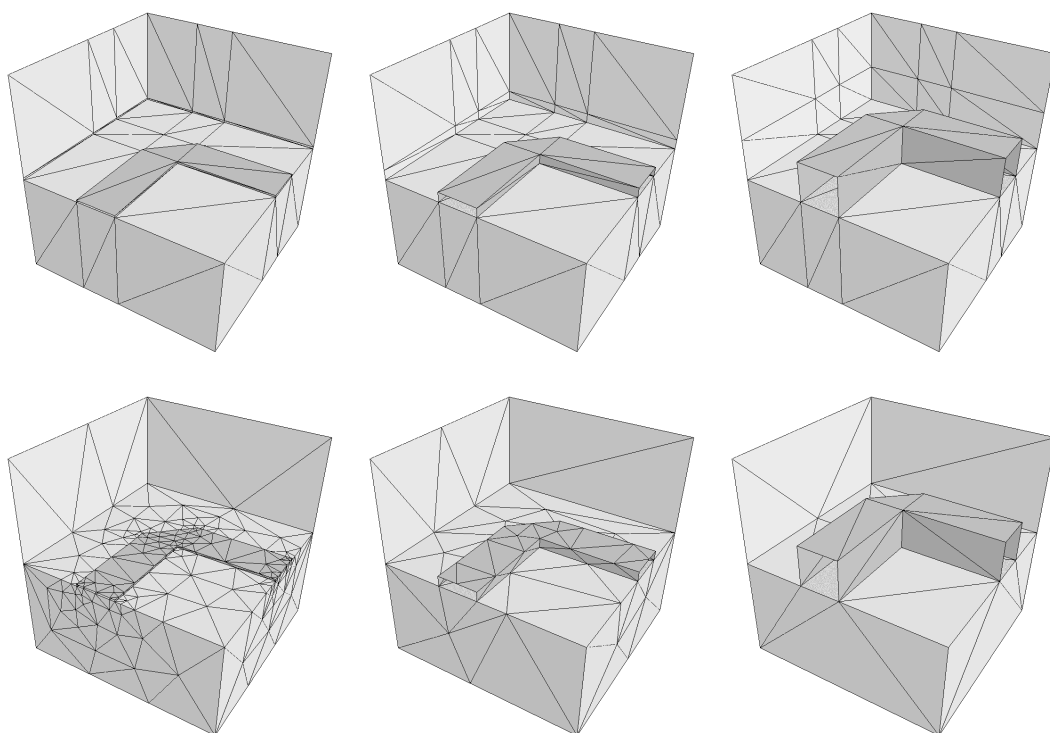
Tabela 4.2: Parametry siatki (kąty w czworościanach) z programu **tri2tet** – początkowej oraz po 5 krokach adaptacyjnego zagęszczania – przy zmianie grubości paska. Liczba węzłów w siatce początkowej jest stała i wynosi 64, a czas generacji jest pomijalny.

typ generacji	najrzadsza	rzadka	średnia	transf. 1	transf. 2
liczba węzłów	338	632	1808	96	28
czas generacji [s]	7.1	12.1	33.4	2.2	1.2
trójkąty: min kąt $^{\circ}$	2.5	3.2	5.8	2.1	1.0
trójkąty: max kąt $^{\circ}$	152.6	170.5	153.4	171.2	121.0
czworościany: min kąt $^{\circ}$	2.4	2.7	4.4	3.2	1.1
czworościany: max kąt $^{\circ}$	168.9	171.1	161.1	174.0	139.1

Tabela 4.3: Parametry siatki z programu **NETGEN** w zależności od sposobu generacji. dla paska $t_r = 0.01$. Siatki transformowane 1 i 2 tworzone są z siatki najrzadszej dla $t_r = 0.05$ i 0.20.

węzły początkowe	64					100	
$t_r = t/H$	0.01	0.02	0.05	0.10	0.20	0.01	0.05
węzły	74367	72172	71969	68414	64718	62961	64994
iteracje	47	41	32	27	27	41	33
czas	16.4	13.7	9.1	6.3	6.1	10.9	7.8
błąd [%]	0.94	0.89	0.81	0.79	0.79	1.25	1.06

Tabela 4.4: Wpływ grubości metalizacji na przebieg rozwiązania. Czasy i liczby iteracji są skumulowane w zakresie do 9 kroku



Rysunek 4.8: Siatki rzadkie wygenerowane przez `tri2tet` (u góry) i `NETGEN` (na dole) dla różnych grubości paska t_r : 0.01 (z lewej), 0.05 (w środku), 0.2 (z prawej).

Rozdział 5

Ekstrapolacyjne poprawianie rozwiązania

Przybliżone rozwiązania zagadnień różniczkowych i całkowych, otrzymane po dyskretyzacji problemu ciągłego na siatce elementów lub różnic skończonych o rosnącym zagęszczeniu punktów dyskretyzacji, tworzą ciąg zbieżny do rozwiązania dokładnego. Ekstrapolacyjne poprawianie rozwiązania prowadzi do przyspieszenia zbieżności tego ciągu, co w praktyce oznacza redukcję błędu dyskretyzacji bez konieczności dalszego zagęszczania siatki. Sytuacja taka typowa jest właśnie dla metod wielosiatkowych, gdzie operuje się sekwencją stopniowo zagęszczających się siatek.

Przedstawione poniżej rozważania zorientowane są na poprawę dokładności przybliżenia całkowitej energii pola elektrycznego i magnetycznego otrzymanej na podstawie rozwiązania równania Laplace’a adaptacyjną metodą wielosiatkową z linowymi elementami skończonymi.

5.1 Ekstrapolacja Richardsona

Ekstrapolacja Richardsona polega na przewidywaniu lepszego przybliżenia rozwiązania, jakie otrzymałoby się na siatce o większej dokładności dyskretyzacji bez konieczności rozwiązywania zagadnienia na tej siatce, lecz jedynie na podstawie profilu zbieżności odtworzonego z rozwiązań na siatkach o mniejszej gęstości, a więc otrzymanych zdecydowanie mniejszym kosztem numerycznym.

Niech $F(h)$ oznacza przybliżenie rozwiązania dokładnego $F = F(h) + R(h)$ otrzymane na siatce o gęstości dyskretyzacji mierzonej długością kroku h . Reszta $R(h)$ określa zarazem błąd dyskretyzacji i jest rzędu $O(h^r)$ dla $r \geq 1$. Przy $h \rightarrow 0$ maleje błąd $e(h) = R(h) \rightarrow 0$, ale jednocześnie gwałtownie rośnie koszt obliczenia $F(h)$. Oprócz tego zaczynają uwidaczniać się błędy zaokrągleń, które uniemożliwiają dowolne poprawianie dokładności przybliżenia F poprzez dalsze zagęszczanie siatki.

Ekstrapolacja Richardsona jest możliwa, gdy potrafimy skonstruować *oszacowanie asymptotyczne* błędu $e(h)$, czyli rozwinięcie w szereg potęgowy względem h .

Wtedy

$$\begin{aligned} F &= F(h) + \sum_{i=1}^m e_i h^{p_i} + R_m(h) \\ e(h) &= \sum_{i=1}^m e_i h^{p_i} + R_m(h), \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdzie $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_m$ oraz $R_m(h) = O(h^r)$ dla $r \geq p_m$.

Znając rozwiązanie $F(qh)$ na rzadszej siatce o kroku qh ($q > 1$) można wyeliminować z rozwinięcia (5.2) pierwszy wyraz otrzymując

$$F = F^{(1)}(h) + \sum_{i=2}^m e_i h^{p_i} + R_m(h)$$

gdzie $F^{(1)}(h)$ wyznacza się według formuły

$$F^{(k+1)}(h) = F^{(k)}(h) + \frac{F^{(k)}(h) - F^{(k)}(qh)}{q^{p_k} - 1} \quad (5.3)$$

dla $F(h) = F^{(0)}(h)$.

Wielokrotne stosowanie zależności (5.3) dla $k \leq m-1$ stanowi *iterowaną ekstrapolację Richardsona* i prowadzi w każdym kroku do eliminowania z szeregu rozwinięcia (5.2) kolejnych wyrazów, co daje

$$F = F^{(k)}(h) + \sum_{i=k+1}^m e_i h^{p_i} + R_m(h)$$

Oznacza to coraz dokładniejsze przybliżenie rozwiązania

$$F = F^{(k)}(h) + R_{k+1}(h) \quad (5.5)$$

z błędem $R_{k+1}(h) = O(h^r)$, gdzie $r > p_{k+1}$.

Parametry siatek h na kolejnych poziomach zagęszczania $j = 0, 1, \dots, n$ tworzą ciąg $h \in \{h_j\}$. We wzorze (5.3) współczynnik q może zmieniać się w miarę postępu zagęszczania, czyli $q = q_j$, gdzie $h_{j-1} = q_j h_j$ dla $j \geq 1$.

Ciąg iteracji Richardsona $\{F^{(k)}(h_n)\}_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) na siatce najdokładniejszej h_n można traktować jako kontynuację ciągu rozwiązań $\{F(h_j)\}_j$ otrzymywanych na kolejnym zagęszczanych siatkach o malejących krokach h_j .

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} F(h_0) \\ F(h_1) \\ \vdots \\ F(h_j) \\ \vdots \\ F(h_m) \\ \vdots \end{array} \left| \begin{array}{cccc} F^{(1)}(h_1) & & & \\ \vdots & & & \\ F^{(1)}(h_j) & \dots & F^{(k)}(h_j) & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ F^{(1)}(h_m) & \dots & F^{(k)}(h_m) & \dots & F^{(m)}(h_m) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array} \right. \\ \downarrow \text{ zagęszczanie} \end{array} \quad (5.6)$$

$$\begin{array}{ccccccc} F(h_n) & F^{(1)}(h_n) & \dots & F^{(k)}(h_n) & \dots & F^{(m)}(h_n) & \\ & & & \text{ekstapolacja} \longrightarrow & & & \end{array}$$

Do wykonania pełnego cyklu iterowanych ekstrapolacji konieczne jest, aby $n \geq m$, oraz aby były skonstruowane również ciągi $\{F^{(k)}(h_j)\}_k$ dla $k = 1, 2, \dots, j$, na siatkach pośrednich dla $j = n - m + 1, n - m + 2, \dots, n$. Ciągi ekstrapolacyjne mogą też być tworzone począwszy od pierwszego zagęszczenia siatki, dla $j = 1, \dots, n$, tak jak w schemacie (5.6)

Skuteczność iterowanych ekstrapolacji Richardsona w poprawianiu dokładności przybliżenia $F(h_n)$ wzrasta więc wraz z liczbą wyrazów asymptotycznego rozwinięcia jego błędu (5.2). Długość tego szeregu nie jest jednak dowolna i zależy od metody dyskretyzacji zagadnienia ciągłego.

5.1.1 Asymptotyczne rozwinięcie błędu

W równaniach różniczkowych cząstkowych najprostszym przypadkiem jest dyskretyzacja różnicami skończonymi z równomiernym krokiem, gdzie dokładność metody wynika z błędu różnicowego przybliżenia pochodnych. Można go rozwinąć w szereg o dowolnej długości m :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + \sum_{i=1}^m e_i h^{2i} + O(h^{2m}), \quad (5.7)$$

W praktyce długość rozwinięcia, jaką można wykorzystać do ekstrapolacji jest ograniczona liczbą siatek rozrzedzonych, na których znane jest rozwiązanie problemu, co w metodach wielosiatkowych odpowiada liczbie wykonanych kroków zagęszczania.

Bardziej złożonym zagadnieniem jest asymptotyczne oszacowanie błędu w metodach elementów skończonych. Na jego dokładność i postać wpływ mają takie czynniki jak rząd elementów (liniowe czy wyższego rzędu), regularność siatki, sposób definiowania parametru siatki h , czy geometria dziedziny problemu. W jednym z najprostszych przypadków, dla dwuwymiarowego skalarnego równania Poissona $-\Delta u = f$ z warunkami Dirichleta na brzegu $\partial\Omega$ wypukłego wieloboku o równomiernej siatce trójkątnych elementów liniowych znane jest z [20] następujące rozwinięcie błędu rozwiązania w węzłach z

$$u(z) = u_h(z) + e_1 h^2 + R_h(z), \quad \text{gdzie} \quad R_h(z) = O(h^3 \ln \frac{1}{h}) \quad (5.8)$$

Parametr h określa rozmiar trójkątów i zdefiniowany jest jako średnia geometryczna średnic okręgów opisanych na trójkątach i wpisanych w nie. Dysponując jednym wyrazem rozwinięcia można wykonać tylko jedną iterację ekstrapolacji Richardsona. Błąd $u(z) - u_h(z) = O(h^2 \ln \frac{1}{h})$ zostanie wówczas zredukowany do $O(h^3 \ln \frac{1}{h})$. Bardziej staranna analiza w [20] pozwoliła uzależnić resztę $R_h(z)$ od geometrii dziedziny, a ściślej od największego wewnętrznego kąta ω na $\partial\Omega$, oraz wydłużyć rozwinięcie (5.8) do dwóch wyrazów:

$$u(z) = u_h(z) + \sum_{i=1}^m e_i h^{2i} + O(h^{\min[2m+2, 2m+\pi/\omega]}), \quad (5.9)$$

gdzie $m = 1, 2$. W najlepszym przypadku, kiedy $\omega = \pi/2$ (prostokąt) i wykonamy dwa kroki ekstrapolacji ($m = 2$), dokładność rozwinięcia (5.9) jest $O(h^6)$. Dla brzegu o kątach dochodzących do π reszta $R_h(z)$ wzrasta do $O(h^5)$ ($O(h^3)$ przy $m = 1$).

W [20] rozważane są również dwa inne rodzaje siatek. Dla siatki kawałkami jednorodnej (równomierne podsiatki w makrosiatce dowolnych trójkątów) reszta rozwinięcia jednolementowego ($m = 1$) wynosi $O(h^4 \ln \frac{1}{h})$. Kiedy brzeg $\partial\Omega$ jest krzywo liniowy i nie pozwala na utworzenie siatki kawałkami jednorodnej, reszta rośnie do $O(h^3 \ln \frac{1}{h})$.

5.2 Ekstrapolacja Aitkena

Ogólną koncepcję ekstrapolacji Richardsona polegającą na kontynuacji ciągu rozwiązań wykorzystuje ekstrapolacja Aitkena. Inaczej jednak niż w metodzie Richardsona, nie odtwarza się profilu zbieżności w funkcji parametru dyskretyzacji $\{F(h_j)\}$, lecz tylko wewnętrzny profil samego ciągu rozwiązań $\{F_j\}$. Ciąg ten musi więc wykazywać jakąś regularność zbieżności, a konkretnie wymagane jest, aby różnice pomiędzy kolejnymi wyrazami $\{F_j - F_{j-1}\}$ tworzyły w przybliżeniu ciąg geometryczny [19]

$$q = \frac{F_j - F_{j-1}}{F_{j-1} - F_{j-2}} \approx \text{const.} \quad (5.10)$$

Z tego powodu ekstrapolacja Aitkena nosi też nazwę ekstrapolacji wykładniczej. Dokładna granica ciągu $\{F_j\}$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_j = F_0$$

może być oszacowana jako $F_j^0 \approx F_0$, gdzie

$$F_j^0 = F_j - \frac{(F_j - F_{j-1})^2}{F_j - 2F_{j-1} + F_{j-2}} \quad (5.11)$$

tworzą ciąg szybciej zbieżny do F_0 niż $\{F_j\}$, tym bardziej im lepiej spełniony jest warunek (5.10). W praktyce oznacza to konieczność zachowania stałego geometrycznego postępu zagęszczania siatki.

Przy tych założeniach ekstrapolację Aitkena stosowano w [102] do dwuwymiarowej analizy falowodów optycznych metodą elementów skończonych na siatce równomiernie zagęszczanej. W przypadku zagęszczania adaptacyjnego spełnienie przybliżenia (5.10) może być w praktyce bardzo utrudnione lub zbyt słabe do osiągnięcia skutecznej ekstrapolacji.

5.3 Ekstrapolacja energii

W specyficznych zagadnieniach modelowania, gdzie rozwiązanie poszukiwane jest w postaci całkowitej energii związanej z analizowaną strukturą zadanie poprawy dokładności poprzez ekstrapolację może zostać sprowadzone do samej normy energetycznej funkcji u_h zamiast jej pełnego rozkładu przestrzennego. W metodach z elementami skończonymi, gdzie wariacyjne sformułowanie problemu oparte jest na funkcjonale energetycznym, obliczanie normy energetycznej odbywa się bez większego dodatkowego nakładu numerycznego. W przypadku zaś algorytmów z adaptacyjnym zagęszczaniem siatki (jak w adaptacyjnych metodach wielosiatkowych)

zarówno energia całkowita jak i związana z poszczególnymi elementami dostępna jest już „za darmo”, gdyż musiała być obliczana wcześniej do oceny rozkładu błędu i sformułowania globalnego kryterium zbieżności.

Zagadnienie brzegowe dla eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych ze względu na nieznaną funkcję u można zapisać w ogólnej postaci operatorowej

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{dla } u, f \in H \quad (5.12)$$

gdzie $\mathcal{L}$ jest operatorem liniowym określonym na przestrzeni Hilberta H .

Dla operatorów $\mathcal{L}$ symetrycznych i dodatnio określonych (SPD) rozwiązanie tego zagadnienia u_o może być poszukiwane poprzez sformułowanie wariacyjne [132] o postaci

$$\begin{aligned} F(u_o) &= \min_{u \in H} F(u), \quad \text{gdzie} \\ F(u) &= \frac{1}{2} (\langle \mathcal{L}u, u \rangle - \langle f, u \rangle - \langle u, f \rangle) \end{aligned} \quad (5.13)$$

a w przypadku rzeczywistych funkcji u i f

$$F(u) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}u, u \rangle - \langle f, u \rangle.$$

Funkcjonał $F(u)$ przyjmuje w rozwiązaniu u_o wartość

$$F(u_o) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}u_o, u_o \rangle,$$

co pozwala przekształcić (5.13) do postaci

$$F(u) - F(u_o) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}(u - u_o), (u - u_o) \rangle \quad \forall u \in H. \quad (5.15)$$

Korzystając z definicji *normy energetycznej* w H skojarzonej z operatorem $\mathcal{L}$:

$$|||u||| := \sqrt{\langle \mathcal{L}u, u \rangle},$$

otrzymuje się

$$F(u_o) = F(u) - \frac{1}{2} |||u - u_o|||^2, \quad (5.16)$$

gdzie $e := u - u_o$ oznacza błąd, z jakim pewna funkcja u przybliża dokładną wartość rozwiązania u_o .

5.3.1 Ekstrapolacja Richardsona dla energii

Można przyjąć, że profil zbieżności dla normy energetycznej rozwiązania $|||u_j|||$ na siatce h_j (po j krokach zagęszczania) dla całej dziedziny jest taki jak dla u_j w węzłach siatki. Wtedy ekstrapolacja Richardsona dla normy może być wykonana korzystając z rozwinięcia (5.8), czyli energia po jednym kroku ekstrapolacji

$$W_{R,j} = \frac{1}{2} |||u_j^{(1)}|||^2 = \frac{1}{2} \left(|||u_j||| + \frac{|||u_j||| - |||u_{j-1}|||}{q_j^2 - 1} \right)^2. \quad (5.17)$$

Okazuje się, że bardzo zbliżony rezultat otrzymuje się przy ekstrapolacji wykonanej bezpośrednio z kwadratu normy energetycznej

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{R,j} &\approx \frac{1}{2} \|u_j^{(1)}\|^2 \\ \widetilde{W}_{R,j} &= \frac{1}{2} \left(\|u_j\|^2 + \frac{\|u_j\|^2 - \|u_{j-1}\|^2}{q_j^2 - 1} \right),\end{aligned}\quad (5.18)$$

co można przedstawić za pomocą energii $W_j = \frac{1}{2} \|u_j\|^2$

$$\widetilde{W}_{R,j} = W_j + \frac{W_j - W_{j-1}}{q_j^2 - 1} \quad (5.19)$$

Dokładność tego przybliżenia ekstrapolacji zdecydowanie (o ponad rząd wielkości) przewyższa samą dokładność aproksymacji rozwiązania u_j mierzoną estymowanym błędem energetycznym ε_j (kwadrat normy energetycznej błędu). Przykładowo dla trójwymiarowego równania Laplace'a w sześcianie $1 \times 1 \times 1$ z wydrążeniem w kształcie zagiętego paska o grubości 0.05 względna różnica energii pomiędzy sformułowaniem dokładnym (5.17) i przybliżonym (5.18) $\delta_{W_{R,j}} = (\widetilde{W}_{R,j} - W_{R,j})/W_{R,j}$ zależy od ε_j w następujący sposób:

ε_j	$\delta_{W_{R,j}}$
10.5%	1.40%
5.3%	0.30%
2.4%	0.06%

Ekstrapolacja energii może być stosowana w dwóch wariantach – globalnie dla całkowitej energii lub lokalnie dla energii związanej z poszczególnymi elementami. Pierwsze podejście jest prostsze, lecz narażone na błąd wynikający z konieczności posługiwania się, przy wyznaczaniu współczynnika q_j , wspólną, uśrednioną wartością kroku h dla całej siatki. Nie ma przy tym potrzeby określania bezwzględnej wartości kroku siatki, lecz jedynie relację do wartości z poprzedniego kroku zagęszczania, posługując się w zamian liczbą węzłów N_j . Wobec tego średnią wartość współczynnika

$$q_j := \frac{h_{j-1}}{h_j} \quad (5.20)$$

można liczyć jako

$$q_j = \left(\frac{N_j}{N_{j-1}} \right)^{\frac{1}{d}}, \quad (5.21)$$

gdzie d jest wymiarem przestrzennej dziedziny problemu ($d = 1, 2, 3$).

Przy adaptacyjnym zagęszczaniu siatki należy oczekiwać znacznych różnic w rozmiarach elementów w obrębie całej siatki. Co więcej, różnice te zmieniając się w miarę zagęszczania, nie odzwierciedlają dokładnie rozkładu zmian energii. Część elementów o błędach nieco poniżej wartości progowej zostanie rozdrobiona dopiero w następnym kroku zagęszczania powodując skumulowanie efektu korekcji energii przypadające na jednokrotną zmianę rozmiaru tych elementów. Można spodziewać

się więc, że zmiany energii liczone rytmem uśrednionej zmiany kroku siatki będą na przemian spowalniane i przyspieszane. Inaczej mówiąc, współczynnik q_j uśredniony na podstawie liczby węzłów będzie na zmianę za duży lub za mały, co wywoła oscylacje w profilu zbieżności energii ekstrapolowanej.

5.3.2 Korekcja energii błędem estymowanym

Jeżeli u otrzymuje się, jako przybliżone rozwiązanie u_h dla problemu (5.12) zdyskretyzowanego metodą elementów skończonych na siatce o parametrze h , to $e_h = u_h - u_o$ oznacza błąd dyskretyzacji (aproksymacji), którego normę energetyczną szacuje się za pomocą *estymatorów błędu* (podrozdział 3.3)

$$\varepsilon_h \approx |||e_h|||^2.$$

Korzystając z (5.16) dokładną wartość funkcjonału energetycznego F dla rozwiązania u_o można oszacować jako

$$F(u_o) \approx F_\varepsilon(u_o) = F(u_h) - \frac{1}{2}\varepsilon_h. \quad (5.22)$$

Dla zagadnień, w których funkcjonał F ma fizyczną interpretację energetyczną zależność powyższa wyraża *korekcję energii błędem estymowanym*:

$$W_E = W - \frac{1}{2}\varepsilon_h, \quad \text{gdzie} \quad W := \frac{1}{2}|||u_h|||^2. \quad (5.23)$$

W_E oznacza energię skorygowaną o poprawionej dokładności oraz

$$W \in \{W_j\}, \quad W_E \in \{W_{E,j}\}.$$

Jeżeli dokładność estymatora błędu określa reszta $R_\varepsilon(h)$, czyli

$$|||e_h|||^2 = \varepsilon_h + R_\varepsilon(h),$$

to również

$$F(u_o) = F_\varepsilon(u_o) + R_\varepsilon(h).$$

Dla poprawności korekcji (5.23) wymagana jest jak najlepsza asymptotyczna dokładność estymatora ε_h , czyli w idealnym przypadku $R_\varepsilon(h) \rightarrow 0$ dla $h \rightarrow 0$.

Należy zauważyć, że korekcję błędem estymowanym można uznać za odmianę ekstrapolacji. Widać to na przykładzie ekstrapolacji Richardsona. Przy jednowyrazowym rozwinięciu błędu (5.8) ekstrapolację Richardsona (5.2) dla rozwiązania u_j na siatce h_j po j -krotnym zagęszczaniu zapisujemy analogicznie do (5.17) w formie korekcji

$$u_0 \approx u_j^{(1)} = u_j - e^{(1)} \quad (5.24)$$

błędem przybliżonym

$$e^{(1)} = -\frac{u_j - u_{j-1}}{q_j^2 - 1}. \quad (5.25)$$

Zależność (5.25) bywa wykorzystywana do konstruowania prostych estymatorów błędu (podrozdział 3.3.1), co dodatkowo potwierdza analogię pomiędzy ekstrapolacją i korekcją błędem.

5.3.3 Ekstrapolacja Richardsona dla energii skorygowanej błędem estymowanym

Korekcja energii błędem estymowanym według zależności (5.23) prowadzi do nowego ciągu przybliżeń, którego dokładność można próbować jeszcze bardziej poprawić za pomocą ekstrapolacji Richardsona.

W przypadku zastosowania estymatorów z lokalnym zagadnieniem dla błędu, algorytm korekcji korzysta z porównania bieżącego rozwiązania z rozwiązaniem o lepszej aproksymacji (3.35). Prowadzi zatem do przybliżonego odtworzenia normy energetycznej lokalnego rozwiązania z elementami kwadratowymi. Można więc oczekiwać, iż dokładność takiej korekcji będzie zbliżona do dokładności aproksymacji problemu globalnego z elementami kwadratowymi. Podobne też powinno być rozwinięcie asymptotyczne błędu. Jednakże w literaturze matematycznej brakuje opracowań na ten temat, a nawet dotyczących asymptotycznego rozwinięcia błędu dyskretyzacji elementami kwadratowymi samego problemu globalnego.

Zaproponowana tu koncepcja poprawy dokładności rozwiązania poprzez uzupełnienie korekcji błędem estymowanym ekstrapolacją Richardsona zostanie więc zweryfikowana w eksperymencie numerycznym.

Przyjmijmy następującą postać rozwinięcia błędu korekcji błędem estymowanym

$$W_0 - W_{E,j} = a_h h^{p_e} + R_E(h), \quad (5.26)$$

gdzie W_0 to dokładna wartość energii, a $W_{E,j}$ jest energią ekstrapolowaną uzyskaną na siatce h_j . Ekstrapolacja Richardsona zastosowana do tego rozwinięcia pozwala wyznaczyć poprawioną energię ekstrapolowaną

$$W_{ER,j} = W_{E,j} + \frac{W_{E,j} - W_{E,j-1}}{q_j^{p_e} - 1}, \quad (5.27)$$

Otwartą kwestią jest określenie potęgi p_e w (5.26). Znane jest oszacowanie błędu aproksymacji dla elementów rzędu p jako

$$\|e_h\|_2 = O(h^{p+1}).$$

Przez analogię do postaci rozwinięcia błędu dla elementów liniowych, można próbować eksperymentalnie dobrać wykładnik odpowiadający szybszej zbieżności elementów kwadratowych, czyli $p_e > 2$. Jak pokaże test numeryczny, optymalna wartość dla przykładowego problemu jest $p_e = 2.5$. Bardziej precyzyjne rozstrzygnięcie kwestii wartości p_e wymaga głębszej, matematycznej analizy tego zagadnienia, co jednak wykracza poza zakres niniejszej pracy.

5.3.4 Algorytmy ekstrapolacji energii

Przedstawione w trzech poprzednich podrozdziałach strategie ekstrapolacji energii można przedstawić w postaci algorytmów.

Ekstrapolacja Richardsona $\rightarrow W_R$

1. rozwiązać zagadnienie na wstępnej (rzadszej) siatce $j - 1$
2. wyliczyć energię W_{j-1}
3. zagęścić siatkę i wyliczyć q_j wg. (5.21)
4. rozwiązać zagadnienie na zagęszczonej siatce j
5. wyliczyć energię W_j
6. skonstruować ekstrapolację energii $W_{R,j}$ wg. (5.17) lub (5.19) na podstawie W_{j-1} i W_j

Zaletą tego algorytmu jest brak konieczności estymacji błędu.

Korekcja błędem estymowanym $\rightarrow W_E$

1. rozwiązać zagadnienie na docelowej (gęstej) siatce j
2. wyliczyć energię W_j
3. wyliczyć błąd estymowany ε
4. wyliczyć energię skorygowaną $W_{E,j}$ wg. (5.23) lub (5.19)

Zaletą jest operowanie tylko jedną, docelową siatką, zaś wadą konieczność kosztownego obliczania błędu estymowanego. W praktyce oba te czynniki znoszą się, gdy stosujemy adaptacyjne zagęszczanie siatki, gdzie i tak wymagana jest estymacja błędu.

Ekstrapolacja Richardsona dla energii skorygowanej $\rightarrow W_{ER}$

1. rozwiązać zagadnienie na wstępnej (rzadszej) siatce $j - 1$
2. wyliczyć energię W_{j-1}
3. wyliczyć błąd estymowany ε
4. wyliczyć energię skorygowaną $W_{E,j-1}$
5. zagęścić siatkę i wyliczyć q_j
6. rozwiązać zagadnienie na zagęszczonej siatce j
7. wyliczyć energię W_j
8. wyliczyć błąd estymowany ε
9. wyliczyć energię skorygowaną $W_{E,j}$
10. dobrać p_e
11. skonstruować ekstrapolację energii $W_{ER,j}$ na podstawie $W_{E,j-1}$ i $W_{E,j}$

Ostatni algorytm łączy zalety obydwu poprzednich, a w przypadku adaptacyjnego zagęszczania siatki nie wnosi *żadnego* istotnego kosztu obliczeniowego. Co więcej, koszt zarówno estymacji błędu jak i zagęszczanie siatki, elementów niezbędnych w algorytmie adaptacyjnym, zwraca się dodatkowo poprzez ich wtórne wykorzystanie do ekstrapolacji.

5.3.5 Metody oceny korekcji błędem

Korekcja błędem estymowanym, podobnie jak inne metody ekstrapolacyjnego poprawiania rozwiązania, może być wykorzystana w dwojaki sposób – do dalszej *poprawy dokładności* dyskretyzacji na siatce o osiągniętym stopniu zagęszczenia lub do *przyspieszenia* rozwiązania z założoną stałą dokładnością dzięki możliwości uniknięcia kilku ostatnich kroków zagęszczania. Obydwa podejścia różnią się zasadniczo kryterium oceny jakości korekcji. W pierwszym przypadku potrzebne jest oszacowanie błędu dyskretyzacji po korekcji, w drugim miarą jakości może być wprowadzony tu współczynnik g_E nazwany *skutecznością korekcji* lub inaczej *skutecznością ekstrapolacji* (druga nazwa bierze się ze wspomnianej wcześniej analogii pomiędzy korekcją błędem a ekstrapolacją). Współczynnik ten określa, ile razy można zmniejszyć liczbę węzłów, aby w wyniku korekcji otrzymać taką samą wartość energii, jaką by osiągnięto bez korekcji, czyli

$$W_E\left(\frac{N}{g_E}\right) = W(N), \quad (5.28)$$

gdzie $W_E(N)$ jest przebiegiem skorygowanej energii $W(N)$ w funkcji gęstości siatki wyrażonej liczbą węzłów dyskretyzacji N . Skuteczność korekcji jest więc miarą oszczędności kosztu numerycznego, czyli czasu obliczeń i pamięci.

Interpretację współczynnika g_E dla korekcji energii błędem estymowanym ilustruje rysunek 5.1, na którym widać jednocześnie, że przebieg energii skorygowanej można przedstawić jako ekstrapolację przebiegu rozwiązania w funkcji gęstości siatki.

Do oceny dokładności korekcji błędem zaproponowano trzy metody oszacowania błędu względnego

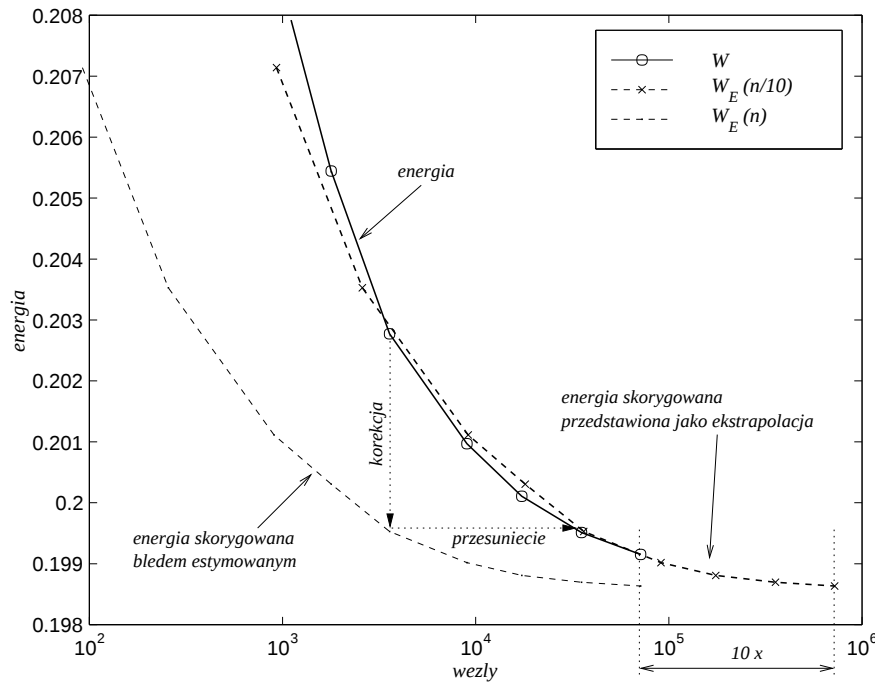
- zmiana energii skorygowanej po każdym kroku zagęszczania siatki

$$\delta_E = \frac{W_{E,j} - W_{E,j-1}}{W_{E,j-1}}$$

- estymacja oparta na ekstrapolacji Richardsona według zależności (5.27)

$$\varepsilon_E^R = \frac{\delta_E}{q_j^{p_e} - 1}$$

dla q_j wg. (5.21) i $p_e > 2$



Rysunek 5.1: Energia w funkcji liczby węzłów – (test nr 3). Przykład ilustruje zasadę korekcji błędem estymowanym – przebieg energii skorygowanej W_E za pomocą błędu estymowanego ε jest przesunięty wzdłuż osi liczby węzłów o $g_E = 10$ razy, tak aby $W_E(n/g_E) = W(n)$ dla liczby węzłów n . Współczynnik g_E nazwany *skutecznością ekstrapolacji* wyraża krotność oszczędności liczby węzłów przy stałym błędzie.

- ekstrapolacja błędu estymowanego

$$\tilde{\varepsilon}_E = \frac{\varepsilon}{(g_E)^m} \quad \text{dla} \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_h}{W_j},$$

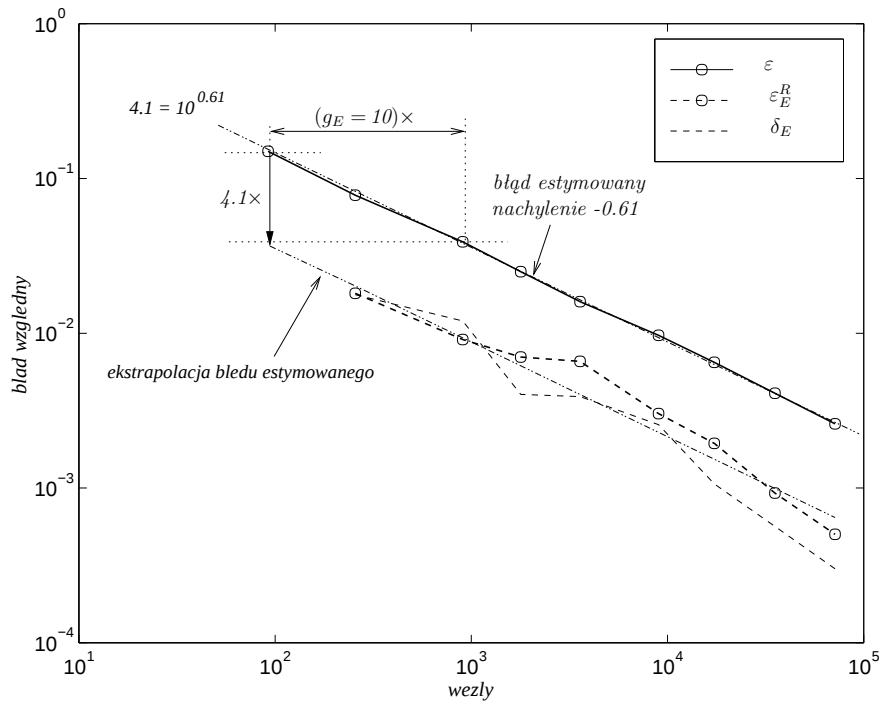
gdzie m to średnie nachylenie przebiegu względnego błędu estymowanego ε w funkcji liczby węzłów N_j

Na rysunku 5.2 przedstawiono zasadę oszacowania dokładności korekcji poprzez ekstrapolację błędu estymowanego oraz porównano z dwiema innymi metodami.

5.4 Testy numeryczne

Do testów użyto estymatora z lokalnym zagadnieniem kwadratowym dla błędu (podrozdział 3.3.3). Skuteczność ekstrapolacji oraz oszacowania dokładności w adaptacyjnej metodzie wielosiatkowej z elementami skończonymi przebadano dla następujących przypadków:

1. jednorodny odcinek linii paskowej o $t = 0$ oraz kwadratowej linii współosiowej ($t = w$) o jednostkowej długości – pole elektryczne; znana jest dokładna wartość energii z rozwiązania metodą odwzorowań konforemnych dla przekroju poprzecznego; rys. 5.4



Rysunek 5.2: Błąd względny energii w funkcji liczby węzłów (test nr 3). Błąd energii skorygowanej W_E wyrażony jest jako względna zmiana energii δ_E oraz estymacja z ekstrapolacją Richardsona ε_E^R . Inne oszacowanie $\tilde{\varepsilon}_E$ uzyskano przesuwając przebieg błędu estymowanego ε (dla energii) o nachyleniu $m = -0.61$ wzdłuż osi błędu o $g_E^{-m} = 4.1$ razy (linia kropkowana).

2. jednorodny odcinek paska o $t = 0.1H$ – pole elektryczne i magnetyczne; rozwiązanie wzorcowe uzyskano z obliczeń przybliżonych dla przekroju z dokładnością rzędu 0.001%; rys. 5.5
3. prostopadłe zagięcie mikropaskowe ze ściętym rogiem – pole magnetyczne w połowie struktury odciętej płaszczyzną symetrii z warunkami Dirichleta w połowie grubości paska; wyliczona energia odpowiada dwukrotnej energii dla całej struktury z płaszczyzną rozcięcia (test nr 4)
4. prostopadłe zagięcie mikropaskowe ze ściętym rogiem (struktura jak w teście nr 3) – pole elektryczne i magnetyczne w powierzchnią rozcięcia pod paskiem – rys. 5.6; za rozwiązanie wzorcowe przyjęto $W_t = W_0/2$, gdzie W_0 jest wynikiem uzyskanym na bardzo zagęszczonej siatce ($N \approx 100000$) w teście nr 3.

Wpływ wartości p_e na jakość ekstrapolacji Richardsona dla energii ekstrapolowanej błędem estymowanym W_{ER} oraz porównanie z innymi technikami ekstrapolacji przedstawiono na rys. 5.3.

Współczynnik skuteczności ekstrapolacji dla korekcji błędem estymowanym (W_E) zamieszczono w legendzie i podpisach wykresów energii oraz zestawiono w

tabeli 5.1. Wartości g_E wahają się w zakresie od 6.9 do 16.4. Nawet dla najgorszego przypadku wynik ten przedstawia istotną oszczędność obliczeniową.

Dalszą poprawę dokładności uzyskano po zastosowaniu ekstrapolacji Richardsona do energii skorygowanej błędem estymowanym (W_{ER}), lecz profil zbieżności przestał być monotoniczny. Podobny przebieg, choć przy nieco słabszej poprawie wykazuje ekstrapolacja Richardsona wykonana bezpośrednio dla energii (W_R). W jednym przypadku (rys. 5.3a) niemonotoniczność była na tyle silna, że ekstrapolacja Richardsona dawała gorszy wynik od korekcji błędem estymowanym.

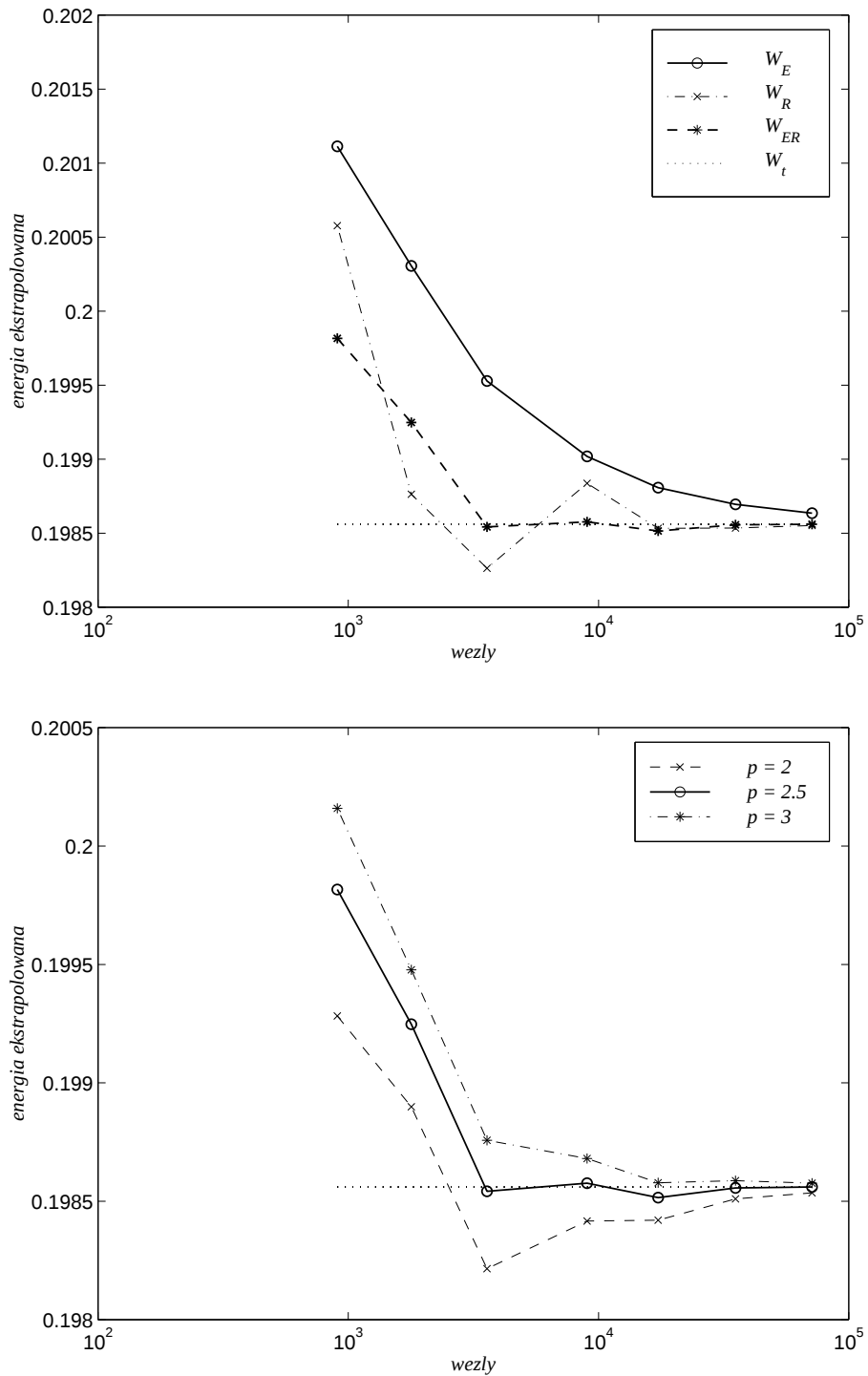
Dla ostatniego przykładu obliczeniowego, w tabeli 5.2 zestawiono profil zbieżności zagęszczania. Jest to przypadek obliczeń pola magnetycznego z powierzchnią rozcięcia dziedziny nie będącą płaszczyzną symetrii, więc najbardziej kosztowny numerycznie (zwykle dla pola elektrycznego liczba iteracji w każdym kroku nie przekracza 5). Zastosowanie metody poprawiania rozwiązania opartej na ekstrapolacji Richardsona pozwala osiągnąć dokładność rozwiązania uzyskanego na najdokładniejszej siatce (około 1%) z pominięciem co najmniej 4 ostatnich kroków zagęszczania. Odpowiada temu prawie **100-krotna oszczędność czasu** obliczeń.

test	g_E
nr 1 (pasek)	15.7
nr 1 (kwadrat)	7.4
nr 2 (pole elektr.)	12.9
nr 2 (pole magn.)	16.4
nr 3 (pole elektr.)	6.9
nr 3 (pole magn.)	8.5
nr 4	10.0

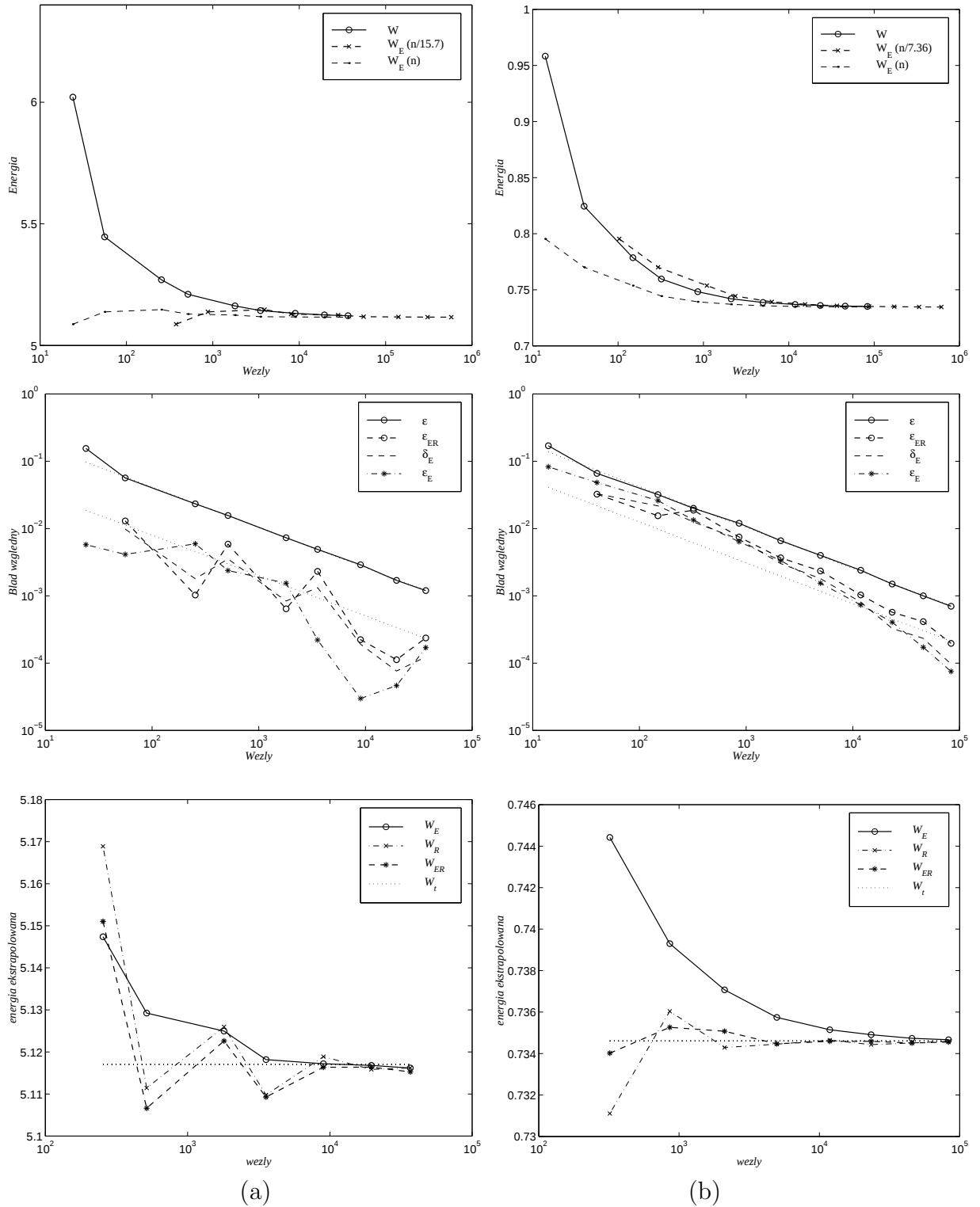
Tabela 5.1: Skuteczność ekstrapolacji g_E dla korekcji błędem estymowanym (W_E)

N	ε [%]	ε_t [%]	ε_{tE} [%]	ε_{tR} [%]	ε_{tER} [%]	t [s]	iteracje
70	27.0	45.5	6.2	45.5	6.2	0	5
211	14.0	22.6	5.5	1.6	5.0	0.1	7
866	7.0	10.0	2.3	1.9	0.84	0.3	17
1750	4.3	6.3	1.8	0.30	1.2	1.0	11
3542	2.9	4.0	1.0	0.17	0.06	2.7	11
8262	1.8	2.4	0.59	0.32	0.17	9.1	20
16591	1.2	1.6	0.36	0.14	0.08	42.8	86
34105	0.75	0.95	0.19	0.07	0.008	99.3	49

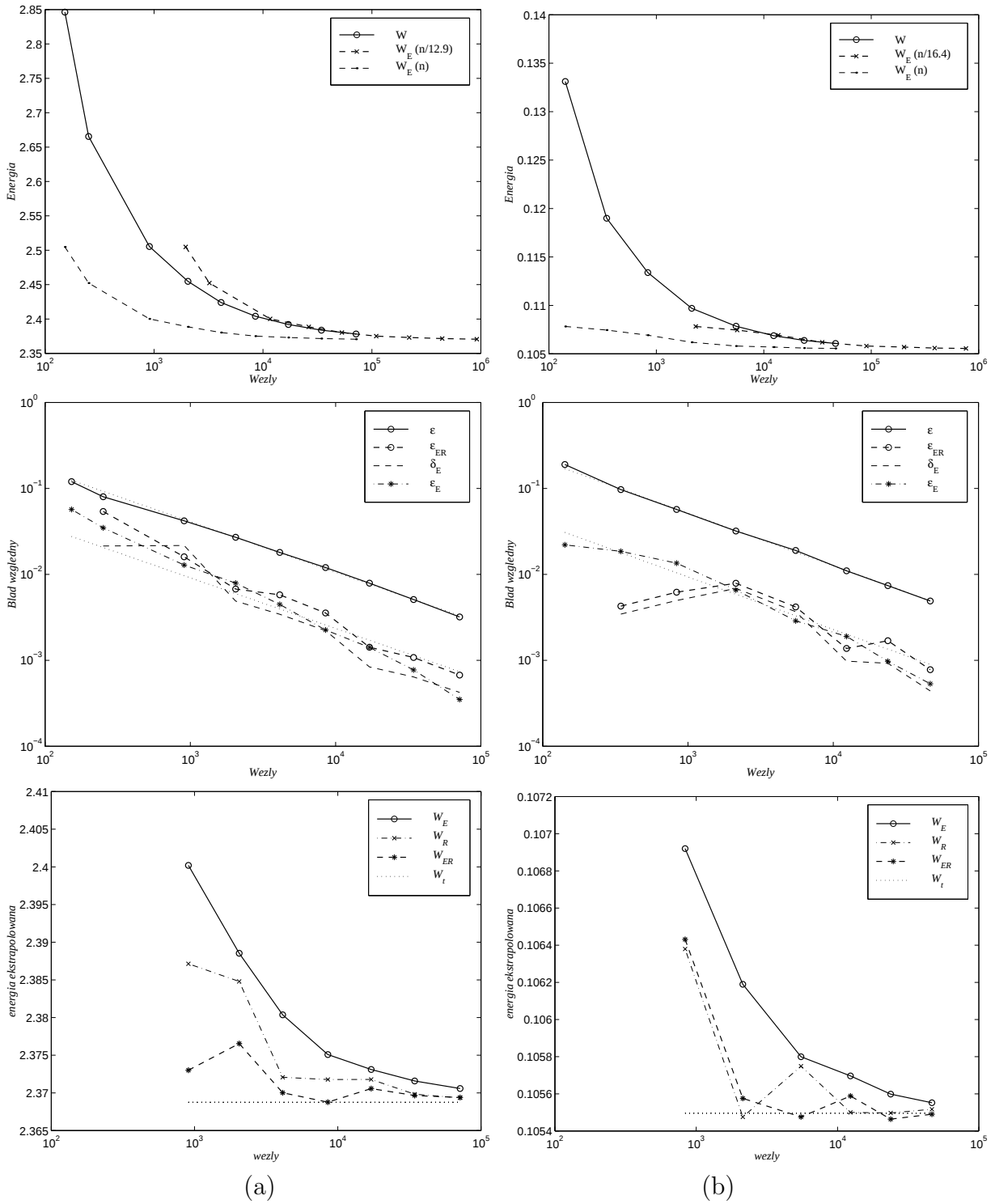
Tabela 5.2: Zestawienie wartości błędu energii (dla testu nr 4) względem wartości wzorcowej $W_t = W_0/2 = 0.09928$ (W_0 uzyskane na siatce $N \approx 100000$ w teście nr 4) dla oryginalnego rozwiązania W (błąd estymowany ε i błąd względem $W_t - \varepsilon_t$) i różnych metod ekstrapolacji – W_E , W_R , W_{ER} (błędy odpowiednio ε_{tE} , ε_{tR} , ε_{tER} liczone względem W_t) w kolejnych krokach zagęszczania (N węzłów); *iteracje* – liczba iteracji rozwiązywania układu równań, t – skumulowany czas całkowity



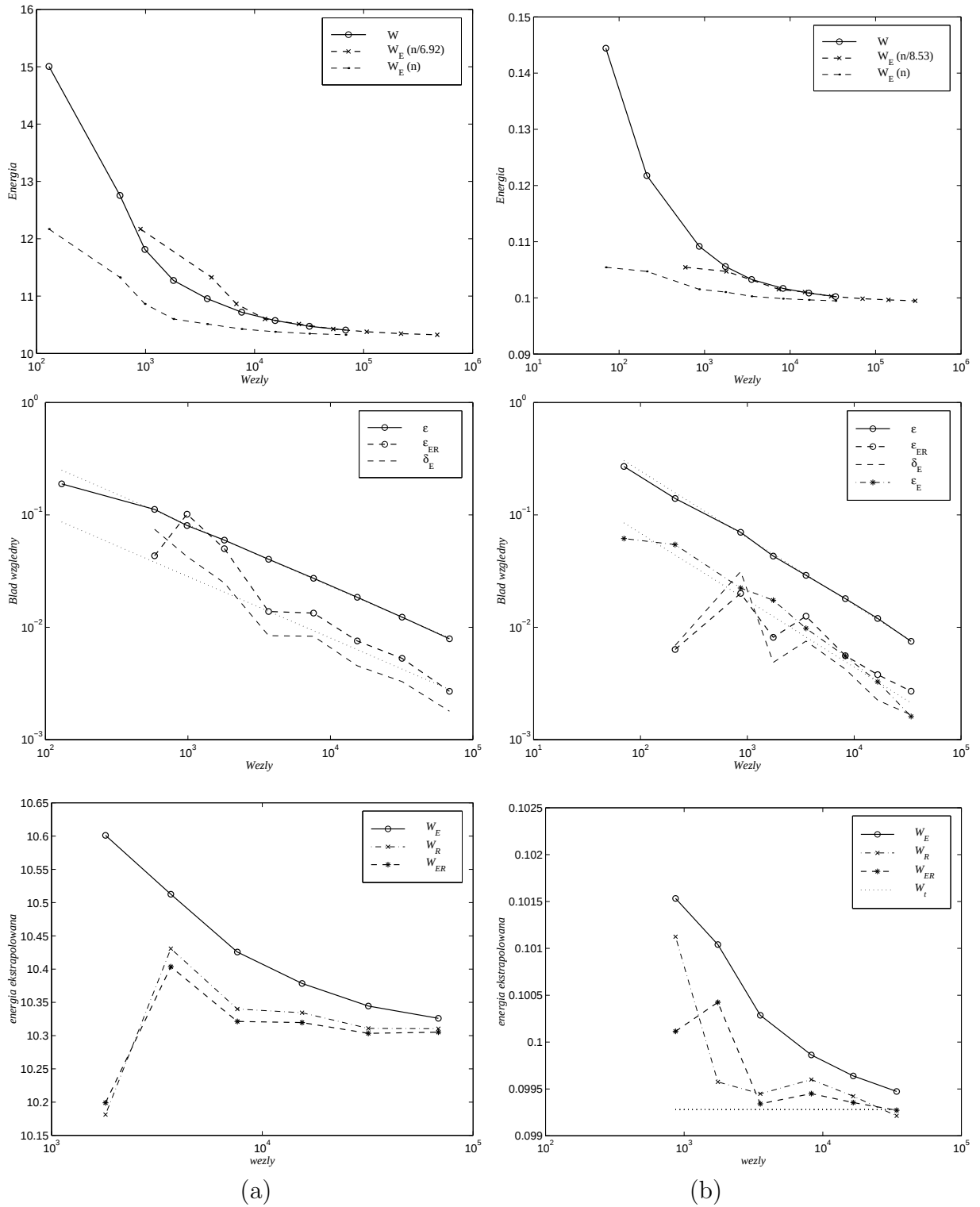
Rysunek 5.3: Energia ekstrapolowana w funkcji liczby węzłów (zbliżenie na końcowe kroki zagęszczania) – test nr 3. Zestawione są trzy metody (u góry): korekcja błędem estymowanym W_E , ekstrapolacja Richardsona dla energii W_R i ekstrapolacja Richardsona dla energii skorygowanej błędem estymowanym W_{ER} uzyskana przy $p_e = 2.5$. Na dole – W_{ER} dla różnych wartości p_e . Linia kropkowana oznacza najlepsze uzyskane przybliżenie energii prawdziwej $W_t = W_0$ (dla $N \approx 100000$)



Rysunek 5.4: Energia (u góry), błąd względny (w środku) i energia ekstrapolowana (na dole) w funkcji liczby węzłów (test nr 1) – pole elektryczne dla jednorodnego odcinka linii paskowej $t = 0$, $g_E = 15.7$ (a) i współosiowej kwadratowej, $g_E = 7.36$ (b).



Rysunek 5.5: Energia (u góry), błąd względny (w środku) i energia ekstrapolowana (na dole) w funkcji liczby węzłów dla jednorodnego odcinka linii paskowej o $t = 0.1H$ (test nr 2) – pole elektryczne, $g_E = 12.9$ (a) i magnetyczne, $g_E = 16.4$ (b).



Rysunek 5.6: Energia (u góry), błąd względny (w środku) i energia ekstrapolowana (na dole) w funkcji liczby węzłów dla ściętego zagięcia mikropaskowego ($t = 0.1H$) (test nr 3) – pole elektryczne, $g_E = 6.92$ (a) i magnetyczne, $g_E = 8.53$ (b).

Rozdział 6

Podejście quasi-statyczne w analizie układów mikrofalowych

Analiza układów mikrofalowych wykorzystująca przybliżenie statyczne polega wyodrębnieniu w strukturze jednorodnych odcinków linii quasi-TEM oraz łączących je skupionych nieciągłości. Następnie, niezależnie dla każdego z wyodrębnionych obszarów oblicza się rozkład statycznego pola elektromagnetycznego. Sprzężenia w układzie analizuje się bądź jako sprzężenia między jednorodnymi odcinkami linii, lub pomiędzy skupionymi nieciągłościami. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z układem linii sprzężonych. Wszystkie sytuacje sprzężeń pomiędzy liniami, których nie da się traktować jako jednorodne linie sprzężone wymagają wyodrębnienia dodatkowych nieciągłości. Przykładem może być skrzyżowanie odcinków linii w różnych warstwach struktury planarnej.

Można zatem wyróżnić następujące przypadki analizy pola elektromagnetycznego:

- parametry zastępcze linii quasi-TEM – analiza 2D (układ kartezjański) w przekroju jednorodnego odcinka linii; w przypadku linii niejednorodnej wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali, należy zastąpić ją skończoną liczbą sekcji jednorodnych i analizować każdą oddzielnie
- parametry zastępcze jednorodnych linii sprzężonych – analiza 2D w przekroju poprzecznym
- elementy schematu zastępczego dowolnych nieciągłości – analiza 3D w rejonie nieciągłości
- elementy schematu zastępczego nieciągłości w strukturach osiowosymetrycznych – analiza 2D (układ cylindryczny) w przekroju podłużnym nieciągłości.

Odcinki bezstratnych linii charakteryzuje się za pomocą impedancji charakterystycznych i prędkości fazowych. Linie można też przedstawić w ogólniejszej postaci, za pomocą schematu zastępczego dla przekroju poprzecznego, o elementach L_1 , C_1 , R_1 , G_1 przypadających na jednostkową długość. W tym przypadku możliwe jest

więc zamodelowanie strat. Nieciągłości przedstawia się jako obwody zastępcze o schematach odwzorowujących konkretną geometrię nieciągłości.

Podstawowe czynniki, które wpływają na dokładność przybliżenia quasi-statycznego to

- poprawność podziału struktury na odcinki linii i skupione nieciągłości
- quasi-statyczna wierność modelu – związana z tym, jak kompletny jest schemat zastępczy w stosunku do statycznego rozkładu pola
- szerokopasmowa dokładność modelu statycznego – określa, w jakim stopniu dokładny model statyczny opisuje zjawiska polowe na wyższych częstotliwościach

Zakres częstotliwości, dla których model statyczny dobrze przybliża właściwości pola elektromagnetycznego zależy od takich czynników jak

- dyspersja fali w jednorodnych odcinkach linii
- stopień w jakim nieciągłości pozostają skupione
- wzbudzenie wyższych rodzajów pola
- promieniowanie z obszarów nieciągłości – prowadzi bądź do wypromieniowania energii ze struktury otwartej lub do powstania rezonansów w strukturze zamkniętej
- dokładność modelu strat w nieidealnych materiałach.

6.1 Parametry zastępcze linii quasi-TEM

W przewodnicy wielospójnej o idealnych przewodnikach oraz izotropowym i jednorodnym materiale stanowiącym ośrodek propagacji rozchodzi się fala o podstawowym rodzaju TEM. Ośrodek może wprowadzać straty dielektryczne i magnetyczne, co wyraża zespolona wartość przenikalności elektrycznej $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ i magnetycznej $\mu = \mu_0 \mu_r$

$$\varepsilon_r = \varepsilon'_r - j\varepsilon''_r, \quad \mu_r = \mu'_r - j\mu''_r \quad (6.1)$$

Niejednorodność lub anizotropia w ośrodku w przekroju poprzecznym do kierunku propagacji sprawia, że pojawiają się wzdłużne składowe pola, a fala przestaje być czystym rodzajem TEM. Podobny efekt wywołuje również skończona konduktywność przewodników. W większości przypadków jednak składowe poprzeczne dominują i mamy do czynienia z rodzajem quasi-TEM. W strukturach takich statyczna analiza pola, identyczna jak dla rodzaju TEM, która zaniedbuje istnienie składowych wzdłużnych daje poprawne wyniki aż do określonej częstotliwości.

6.1.1 Linia pojedyncza

Jednorodny (w kierunku propagacji) odcinek linii quasi-TEM charakteryzuje rozłożony schemat zastępczy o szeregowej impedancji Z_1 i równoległej admitancji Y_1 przypadających na jednostkę długości

$$Y_1 = G_1 + j\omega C_1, \quad Z_1 = R_{m1} + R_{c1} + j\omega(L_1 + L_{c1}) \quad (6.2)$$

Pojemność C_1 i konduktancję G_1 reprezentującą straty dielektryczne określa się na podstawie rozkładu pola elektrostatycznego w przekroju poprzecznym i przenikalności odpowiednio ε'_r i ε''_r . Analogicznie, na podstawie rozkładu statycznego pola magnetycznego i przenikalności μ'_r i μ''_r oblicza się indukcyjność L_1 i rezystancję strat magnetycznych R_{m1} . W obydwu przypadkach analizę pola przeprowadza się przy założeniu idealności przewodnika

W ośrodku jednorodnym

$$G_1 = \omega \frac{\varepsilon''_r}{\varepsilon'_r} C_1, \quad R_{m1} = \omega \frac{\mu''_r}{\mu'_r} L_1. \quad (6.3)$$

Elementy L_{c1} i R_{c1} reprezentują indukcyjność oraz straty nieidealnego przewodnika i zależą od rozkładu gęstości powierzchniowej prądu w przewodniku. W przypadku dobrego przewodnika (o małych stratach) technika perturbacyjna pozwala obliczyć przybliżony rozkład gęstości prądu na podstawie statycznej analizy pola magnetycznego, więc przy założeniu, że przewodniki są idealne.

Zastępcze parametry obwodowe linii zamienia się na jej parametry falowe – impedancję charakterystyczną i współczynnik propagacji

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}}, \quad \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_1 Y_1}, \quad (6.4)$$

Do określenia stałej fazowej i prędkości fazowej często używa się *przenikalności efektywnej* ε_{eff}

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}}}, \quad (6.5)$$

gdzie $v_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$. W przypadku bezstratnym ($\alpha = 0$) dostaje się

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}, \quad \gamma = j\beta = j\omega \sqrt{L_1 C_1}, \quad \varepsilon_{\text{eff}} = v_0^2 L_1 C_1. \quad (6.6)$$

Do określenia rozkładu pola w linii wystarczy rozwiązać dwuwymiarowy problem elektrostatyczny i magnetostatyczny w przekroju poprzecznym, w formie skalarного równania Laplace'a dla potencjału elektrycznego φ i składowej wzdłużnej wektorowego potencjału magnetycznego $\vec{A} = A_z \vec{i}_z$

$$\nabla \varepsilon'_r \nabla \varphi = 0, \quad \begin{cases} \varphi = V_i & \text{na ścianie elektrycznej } i \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 & \text{na ścianach magnetycznych} \end{cases} \quad (6.7)$$

$$\nabla \frac{1}{\mu'_r} \nabla A_z = 0, \quad \begin{cases} A_z = \Phi_i & \text{na ścianie elektrycznej } i \\ \frac{\partial A_z}{\partial n} = 0 & \text{na ścianach magnetycznych} \end{cases} \quad (6.8)$$

oraz

$$\vec{E} = -\nabla \varphi, \quad \vec{H} = \nabla \times (A_z \vec{i}_z). \quad (6.9)$$

Ściankami elektrycznymi są powierzchnie idealnych przewodników, zaś magnetycznymi – płaszczyzny symetrii. Φ_i to strumień indukcji magnetycznej wokół przewodnika i , gdzie $i = 0$ oznacza ekran, na którym zwykle zadaje się $V_0 = 0$ i $\Phi_0 = 0$.

Ze względu na identyczną postać obydwu zagadnień, często problem magneto-statyczny rozwiązuje się poprzez jego równoważnik elektryczny ze względu na φ_m otrzymany po zamianie

$$\varphi_m \leftarrow A_z, \quad \varepsilon'_{rm} \leftarrow \frac{1}{\mu'_r} \quad (6.10)$$

Pojemność linii C_{1m} otrzymana z problemu równoważnego służy do obliczenia indukcyjności linii

$$L_1 = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{1}{C_{1m}} \quad (6.11)$$

Przyjęcie do analizy tylko rzeczywistej części przenikalności ośrodków możliwe jest, gdy straty w tych ośrodkach są małe, czyli $\varepsilon''_r \ll \varepsilon'_r$ i $\mu''_r \ll \mu'_r$. Założenie to umożliwia zastosowanie techniki perturbacyjnej, według której zaburzenie wprowadzone przez straty ośrodka nie zmienia rozkładu pola.

W przypadku bezstratnym otrzymuje się parametry falowe o znanej postaci:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{C_1 C_{1m}}} = \frac{1}{v_0 \sqrt{C_1 C_{1m}}} \quad \varepsilon_{\text{eff}} = \frac{C_1}{C_{1m}} \quad (6.12)$$

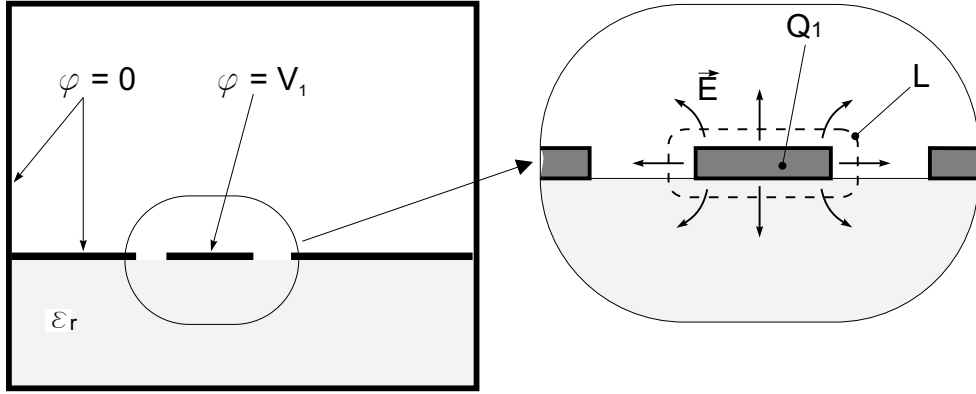
Dla ośrodków niemagnetycznych ($\mu = \mu_0$) C_{1m} oznacza pojemność linii otrzymaną z rozkładu pola elektrycznego po rozwiązaniu równania Laplace'a w przekroju z usuniętymi dielektrykami.

Możliwe są dwie metody określania pojemności zastępczej linii na podstawie rozwiązania równania Laplace'a dla potencjału elektrostatycznego. Pierwsza polega na dalszej obróbce rozkładu potencjału. Dla różnicy potencjałów V_1 między przewodem sygnałowym a ekranem, dowolnie przyjętej jako warunek brzegowy dla równania Laplace'a, pojemność zastępczą liczy się z **ładunku zgromadzonego na sygnałowych przewodach** w linii:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} \quad (6.13)$$

Q_1 to ładunek przypadający na jednostkę długości paska, który związany jest z potencjałem poprzez natężenia pola elektrycznego i prawo Gaussa dla struktury jednorodnej w dowolnym kierunku propagacji fali.

$$Q_1 = \varepsilon_0 \oint_L \varepsilon'_r E_n dl \quad E_n = \vec{n} \cdot \vec{E} = \vec{n} \cdot \nabla \varphi \quad (6.14)$$



Rysunek 6.1: Przekrój przewodnicy planarnej quasi-TEM (linia koplanarna); zaznaczono kontur całkowania L do obliczania ładunku na pasku Q_1

gdzie $\vec{n}$ jest wektorem normalnym do konturu L (rys. 6.1).

Korzystając z tych samych zależności oblicza się konduktancję linii przy następujących podstawieniach

$$\varepsilon'_r \leftarrow \varepsilon''_r, \quad C_1 \leftarrow \frac{G_1}{\omega} \quad (6.15)$$

Zależności (6.13), (6.14) i (6.11) zastosowane do elektrycznego równoważnika problemu magnetycznego dadzą L_1 , a R_{m1} po podstawieniach

$$\mu'_r \leftarrow \mu''_r, \quad L_1 \leftarrow \frac{R_{m1}}{\omega}. \quad (6.16)$$

Druga metoda oparta jest na podejściu **energetycznym**. Całkowita energia W_{ec} zgromadzona w polu elektrycznym związanym ze strukturą w której wymuszono różnicę potencjału V_1 (warunki brzegowe w równaniu Laplace'a) wyrazić można właśnie poprzez zastępczą pojemność C_c tej całej struktury. Dla linii transmisyjnej wystarczy analizować tylko przekrój poprzeczny i wielkości przypadające na jej długość jednostkową.

$$C_c = 2 \frac{W_{ec}}{V_1^2} \quad C_1 = 2 \frac{W_{e1}}{V_1^2} \quad (6.17)$$

Obliczanie energii W_1 na podstawie potencjału wymaga całkowania natężenia pola po całym przekroju przewodnicy, co może być bardziej czasochłonne niż całkowanie po konturze przy obliczaniu ładunku. Podejście energetyczne jest więc opłacalne, jeśli sam problem elektrostatyczny został sformułowany energetycznie. Metody wariacyjne oparte są właśnie na minimalizacji funkcjonału energetycznego zależnego od rozkładu potencjału. Te zaś są podstawą dyskretyzacji ciągłego zagadnienia różniczkowego na siatce **elementów skończonych**. Rozwiązując tak powstały problem dyskretny oblicza się rozkład przestrzenny minimalizujący funkcjonał energetyczny, a „przy okazji” określona zostaje też wartość tego funkcjonału, czyli energia W_{ec} (lub W_{e1} dla problemu płaskiego w przekroju przewodnicy).

Do obliczenia G_1 korzystamy z podstawień (6.15), co jednak wiąże się z koniecznością ponownego przeliczenia energii. Dla każdego elementu siatki elementów

skończonych konstruuje nowy lokalny problem dyskretny z macierzą współczynników wyliczoną po zmianie przenikalności. Nie ma jednak potrzeby tworzenia globalnej macierzy i rozwiązywania problemu globalnego, gdyż rozkład potencjału w postaci wektora niewiadomych pozostaje niezmienny, jest więc już znany.

6.1.2 Linie sprzężone

Przedstawione powyżej podejście umożliwia obliczanie pojemności i indukcyjności wzajemnych w liniach sprzężonych. Poszczególne elementy całosciowego schematu zastępczego oblicza się wymuszając odpowiednie kombinacje pobudzeń (potencjałów w warunkach brzegowych równania Laplace'a)

Dla N linii sprzężonych tworzących układ jednorodny w kierunku propagacji (poszczególne linie są jednorodne i wzajemnie równoległe) rozłożony schemat zastępczy składa się z elementów przypadających na jednostkową długość, reprezentowanych przez symetryczne macierze $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Y}$ o rozmiarach $N \times N$ [57, 75]

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{G} + j\omega\mathbf{C}. \quad (6.18)$$

Macierze te zbudowane są przez następujące elementy schematu

- N niezależnych obwodów dla każdej linii o numerze i

$$Y_i = G_i + j\omega C_i = Y_{ii} - \sum_{k \neq i}^N Y_{ik} \quad (6.19)$$

$$Z_i = R_i + j\omega Z_i = L_{ii} - \sum_{k \neq i}^N Z_{ik}, \quad (6.20)$$

gdzie R_i i L_i mogą zawierać efekt wnikania pola w głąb nieidealnych przewodników

- $\frac{1}{2}N(N+1)$ elementów wzajemnych ($-Y_{ij}$) i Z_{ij} reprezentujących sprzężenie pomiędzy parą linii $\{i, j\}$ dla $i, j = 1, \dots, N$ oraz $i \neq j$; pojemności C_{ij} i indukcyjności L_{ij} reprezentują sprzężenie za pośrednictwem pola elektrycznego i magnetycznego

W przypadku dwóch linii sprzężonych macierze $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Y}$ reprezentują czwórnik i schematach typu T i π .

Pole elektryczne pobudzone jest napięciami V_i między między linią i a wspólnym przewodem masy (ekranem), tworzącymi wektor $\mathbf{V}$. Wtedy energia pola elektrycznego w **całym** przekroju struktury wieloprzewodowej wyraża się zależnością

$$W_e = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}, \quad (6.21)$$

Energia W_e , identycznie jak w przypadku pojedynczej linii, dostępna jest jako funkcjonal w rozwiązaniu metodą elementów skończonych. Oznaczając energię uzyskaną dla szczególnej kombinacji pobudzeń jako

$$\begin{aligned} W_{ei} & \text{ dla } V_i = 1, V_k = 0, k \neq i \\ W_{eij} & \text{ dla } V_i = V_j = 1, V_k = 0, k \neq i, j \end{aligned} \quad (6.22)$$

pojemności z macierzy $\mathbf{C}$ wyznacza się następująco

$$C_{ii} = 2W_{ei} \quad C_{ij} = W_{ei} + W_{ej} - W_{eij}. \quad (6.23)$$

Rozwiązując elektryczny problem równoważny dla pola magnetycznego (po podstawieniu (6.10)) oblicza się macierz $\mathbf{C}_m$, która służy do wyznaczenia macierzy indukcyjności $\mathbf{L} = \mathbf{C}_m^{-1}$. Postępując podobnie jak dla linii pojedynczej (podstawienia (6.15) i (6.16)), można wyznaczyć pozostałe macierze tworzące $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Y}$.

Powyższa zasada obliczania pojemności zastępczych sprzężonego układu linii na podstawie dwuwymiarowej analizy pola dla różnych kombinacji pobudzeń może być wykorzystana również do określania elementów schematu zastępczego trójwymiarowych nieciągłości zawierającej sprzężenia.

Parametry falowe oblicza się zaczynając od zagadnienia własnego [110]

$$\gamma^2 \mathbf{V} = \mathbf{Z} \mathbf{Y} \mathbf{V}, \quad (6.24)$$

którego rozwiązaniem jest N współczynników propagacji γ_j dla j -tego modu (pierwiastek j -tej wartości własnej) oraz odpowiadające im wektory własne $\mathbf{V}_j$ określające kombinację napięć pobudzających na liniach $i = 1, \dots, N$. Tworząc napięciową macierz wektorów własnych $\mathbf{M}_V$, której kolumnami są $\mathbf{V}_j$ i diagonalną macierz współczynników propagacji $[\gamma]$, impedancje charakterystyczne otrzymuje się w formie macierzy

$$\mathbf{Z}_c = \mathbf{M}_V [\gamma] \mathbf{M}_V^{-1} \mathbf{Y}^{-1}, \quad (6.25)$$

która wiąże napięciową i prądową macierz wektorów własnych

$$\mathbf{Z}_c = \mathbf{M}_V \mathbf{M}_I^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{M}_I = \mathbf{Y} \mathbf{M}_V [\gamma]^{-1}. \quad (6.26)$$

Wektory własne w macierzy $\mathbf{M}_I$ są rozwiązaniem problemu własnego $\gamma^2 \mathbf{I} = \mathbf{Y} \mathbf{Z} \mathbf{I}$.

Rozważając sekcję linii sprzężonych o długości l jako $2N$ -wrotnik, można dalej obliczyć dowolną z jego macierzy sieciowych, takich jak macierz rozproszenia czy impedancyjna. Punktem wyjścia jest relacja napięć i prądów pomiędzy przekrojami linii $z = 0$ i $z = l$ [35]

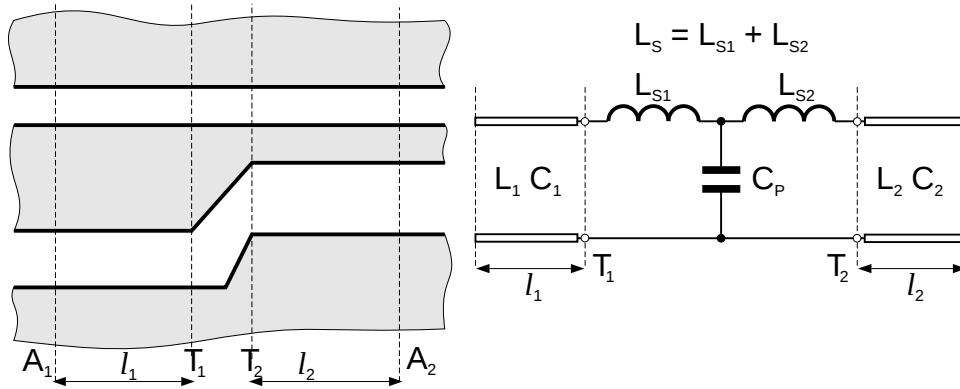
$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) \\ \mathbf{I}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_V \cosh([\gamma]l) \mathbf{M}_V^{-1} & \mathbf{M}_V \sinh([\gamma]l) \mathbf{M}_I^{-1} \\ \mathbf{M}_I \sinh([\gamma]l) \mathbf{M}_V^{-1} & \mathbf{M}_I \cosh([\gamma]l) \mathbf{M}_I^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(l) \\ \mathbf{I}(l) \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

gdzie $\mathbf{V}(z)$ i $\mathbf{I}(z)$ to wektory napięć i prądów w przekroju z linii $i = 1, \dots, N$.

6.2 Elementy schematu zastępczego nieciągłości

Jako ogólny przykład nieciągłości wybrano zmianę szerokości paska w linii koplanarnej. Rzut struktury na powierzchnię metalizacji oraz równoważny schemat zastępczy nieciągłości przedstawiono na rysunku 6.2. Mimo iż sama nieciągłość zdefiniowana jest pomiędzy przekrojami T_1 i T_2 , niejednorodność rozkładu pola utrzymuje się jeszcze w pewnej odległości od tych przekrojów. Z tego powodu analizę struktury

należy przeprowadzić w obszarze A_1 – A_2 , który zachodzi na jednorodne odcinki linii na długości l_1 i l_2 . Wprowadzone tak do analizy odcinki linii zostały już uprzednio scharakteryzowane i znane są ich zastępcze indukcyjności i pojemności na jednostkową długość L_1 , C_1 i L_2 , C_2 . Posłużą one następnie do wyodrębnienia z parametrów zastępczych całego obszaru elementów samej nieciągłości.



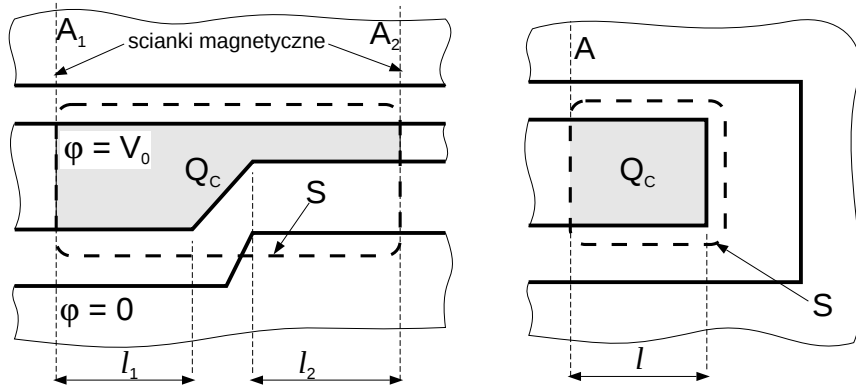
Rysunek 6.2: Przykładowa nieciągłość – zmiana impedancji w linii koplanarnej oraz jej schemat zastępczy

Każdy w elementów schematu zastępczego obliczany jest na podstawie oddzielnej trójwymiarowej analizy statycznej pola w obszarze nieciągłości – elektrycznego dla pojemności i magnetycznego dla indukcyjności. Poszczególne elementy wyodrębniane są ze schematu poprzez odpowiednią kombinację pobudzeń pola, czyli potencjałów i prądów na przewodach. W przedstawionym tu przykładzie możliwa jest tylko jedna kombinacja pobudzeń dla pola elektrycznego i jedna dla magnetycznego, co pozwala wyznaczyć tylko dwa elementy schematu – C_p i L_s , którą arbitralnie dzieli się na L_{s1} i L_{s2} .

Straty w nieciągłości można określić identycznie jak dla linii pojedynczej lub układu linii sprzężonych. Dla strat wnoszonych przez ośrodek, rezystancje szeregową z indukcyjnością i konduktancję równoległą do pojemności wyznacza się na podstawie rozkładu pola magnetycznego i elektrycznego, odpowiednio, liczonego dla rzeczywistych części przenikalności. Wykorzystuje się więc tę samą analizę pola, jaką przeprowadzono dla określenia pojemności i indukcyjności, po czym oblicza się energię po zastąpieniu części rzeczywistych przenikalności przez części urojone. Straty w nieidealnym przewodniku wymagają określenia rozptywu prądu na idealnym przewodniku, czyli analizy pola magnetycznego. Należy jednak zaznaczyć, iż dla większości nieciągłości, ich małe rozmiary pozwalają najczęściej pominąć elementy rezystancyjne w schemacie zastępczym.

6.2.1 Pojemności

Pojemność równoległą w schemacie zastępczym nieciągłości wyznacza się analogicznie do pojemności zastępczej linii transmisyjnej z tą różnicą, że konieczna jest analiza trójwymiarowa obszaru, który nie jest już jednorodny w kierunku propagacji [92].



Rysunek 6.3: Wyznaczanie pojemności równoległej w modelu zastępczym nieciągłości (uskok i otwarty koniec linii); Q_c – całkowity ładunek na przewodzie zamkniętym powierzchnią S

Rozwiązanie równania Laplace'a dla potencjału elektrycznego φ w obszarze ograniczonym ekranami przewodzącymi i ściankami magnetycznymi w przekrojach A_1 i A_2 (rys.6.3) pozwala wyznaczyć całkowity ładunek Q_c zgromadzony na sygnałowym przewodzie wewnątrz tego obszaru według zależności:

$$Q_c = \varepsilon_0 \varepsilon_r \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \vec{E} = -\nabla \varphi \quad (6.28)$$

Odpowiada temu całkowita równoważna pojemność C_c , z której wydziela się pojemność C_p w modelu zastępczym nieciągłości:

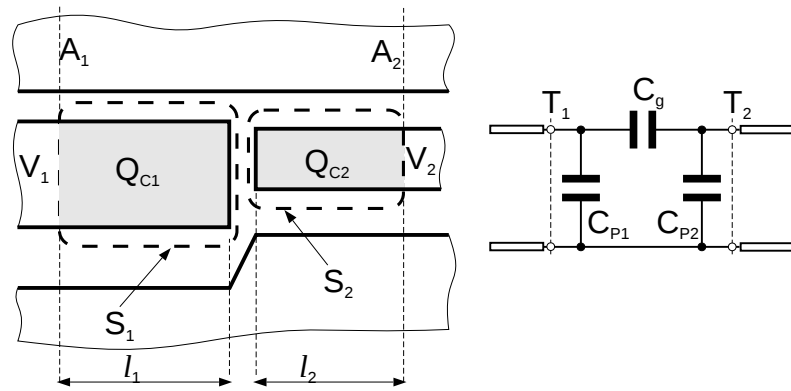
$$C_c = \frac{Q_c}{V_0} \quad C_p = C_c - (C_1 l_1 + C_2 l_2) \quad (6.29)$$

W analogiczny sposób oblicza się pojemność końca linii. Istnieje już tylko jeden z przekrojów A_1 lub A_2 , więc powierzchnię całkowania można od strony końca linii dowolnie zbliżyć do przewodu sygnałowego.

Bardziej złożona, choć wciąż oparta na tej samej zasadzie, jest procedura wyznaczania modelu poprzecznej szczeliny (rys.6.4). Pojemności równoległe C_{p1} i C_{p2} oblicza się identycznie jak pojemności końca linii przy parzystym pobudzeniu przewodów po obu stronach szczeliny ($V_1 = V_2$). Pojemność szeregową szczeliny C_g liczona jest dla pobudzenia nieparzystego ($V_1 = -V_2$), kiedy wypadkowe pojemności na końcu przewodów zawierają również sprzężenie poprzez szczelinę. Oznaczając w tym przypadku wypadkowe pojemności końców linii jako C_{11} i C_{22} , pojemność szczeliny wynosi:

$$C_g = \frac{C_{11} - C_{p1}}{2} = \frac{C_{22} - C_{p2}}{2} \quad (6.30)$$

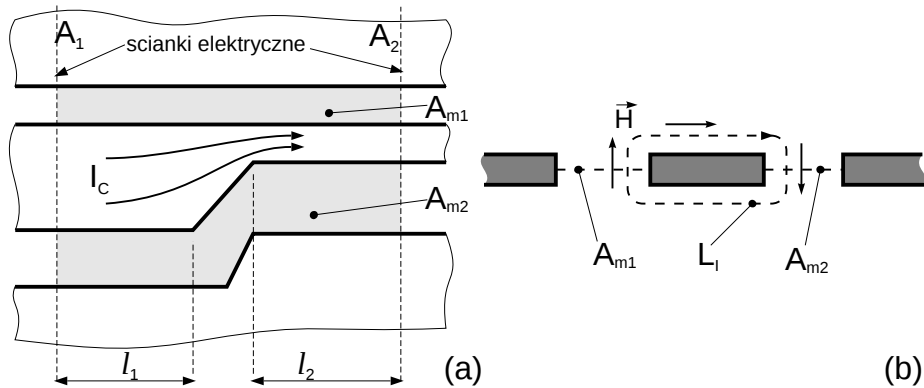
Podójście energetyczne upraszcza procedurę wyznaczania pojemności schematu zastępczego, gdyż dla każdej kombinacji pobudzeń (potencjałów na przewodach) oblicza się tylko wypadkową energię w całej strukturze



Rysunek 6.4: Szczelina poprzeczna i jej schemat zastępczy; Q_{ci} – całkowity ładunek na przewodzie zamkniętym powierzchnią S_i ($i = 1, 2$)

6.2.2 Indukcyjności

Indukcyjności w schemacie zastępczym nieciągłości wyznacza się na podstawie rozkładu pola magnetycznego w strukturze. Problem magnetostatyczny jest zagadnieniem bardziej złożonym niż elektrostatyczny, a jego rozwiązanie zostanie omówione w oddzielnym rozdziale.



Rysunek 6.5: Wyznaczanie indukcyjności szeregowej w modelu zastępczym nieciągłości – (a) rzut na pł. metalizacji, (b) przekrój poprzeczny; I_c – całkowity prąd płynący wzdłuż przewodu, A_{m1} , A_{m2} – powierzchnie do obliczeń strumienia indukcji magnetycznej wokół przewodu z prądem

Przypomnijmy na początek, że indukcyjności zastępcze na jednostkę długości linii quasi-TEM L_1, L_2 są już znane z analizy pola w przekroju poprzecznym. Indukcyjność szeregową L_s nieciągłości oblicza się na podstawie całkowitego prądu płynącego wzdłuż przewodu sygnałowego I_c i całkowitego strumienia indukcji magnetycznej Φ_c wokół tego przewodu. W przypadku struktur planarnych do obliczeń strumienia wygodnie jest wybrać powierzchnię leżącą w płaszczyźnie metalizacji i rozciągającą się od paska sygnałowego do ekranu. W przykładowej linii koplanarnej są to powierzchnie między paskiem środkowym a metalizacją masy – A_{m1} lub

A_{m2} (rys.6.5). Jeśli nie będzie dany prąd w pasku I_c , jego wartość określa się jako cyrkulację wektora $\vec{H}$ wokół paska.

$$L_s = L_c - (L_1 l_1 + L_2 l_2) \quad L_c = \frac{\Phi_c}{I_c} \quad (6.31)$$

$$I_c = \oint_{L_I} \vec{H} d\vec{l} \quad \Phi_c = \mu_0 \int_{A_{m1}} \vec{H} d\vec{s} = -\mu_0 \int_{A_{m2}} \vec{H} d\vec{s}$$

Możliwe jest też energetyczne podejście do indukcyjności zastępczej w nieciągłości. Całkowita energia pola magnetycznego w analizowanym obszarze W_{mc} związana jest z indukcyjnością L_c oraz prądem pobudzającym pole I_c

$$L_c = 2 \frac{W_{mc}}{I_c^2} \quad (6.32)$$

Opierając się na analizie pola magnetycznego przedstawionego za pomocą skalar-nego potencjału magnetycznego ψ (patrz następny rozdział) otrzymamy zależność całkowicie analogiczną do energetycznego sformułowania na pojemność

$$L_c = 2 \frac{W_{mc}}{\Delta\psi^2}, \quad (6.33)$$

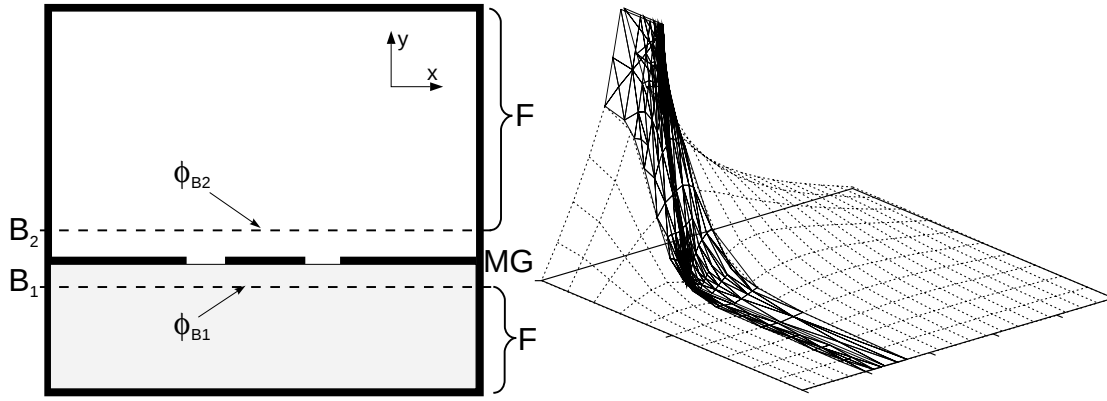
gdzie $\Delta\psi$ jest zadane w postaci warunku brzegowego jako zastępcze pobudzenie pola. Jak widać, znika konieczność obliczania rozkładu natężenia pola magnetycznego w celu określenia prądu I_c .

W przypadku struktur o schemacie złożonym z kilku indukcyjności stosuje się, podobnie jak w przypadku pojemności, odpowiednią kombinację pobudzeń pola eksponującą wybrane elementy schematu. Szczegółowe rozważania na ten temat znajdują się w rozdziale dotyczącym przykładowych zastosowań.

6.3 Wykorzystanie rozwiązań analitycznych

Dalszym usprawnieniem proponowanej strategii analizy jest połączenie metody wielosiatkowej zastosowanej w pobliżu przewodzących pasków z analitycznym rozwiązaniem równania Laplace'a w podobzszarach jednorodnych, wewnątrz zamkniętej struktury MUS [94]. Właśnie w układach planarnych, a szczególnie monolitycznych MMUS, powyżej i poniżej płaszczyzny metalizacji rozciągają się, najczęściej znacznej objętości, obszary o jednorodnym wypełnieniu dielektrycznym (rys.6.6). Podejście to można również stosować w analizie struktur otwartych, gdzie zerowy potencjał w nieskończoności przybliżany jest dostatecznie odległą ścianką elektryczną. W przekroju poprzecznym, dla prostopadłościennego ekranu rozkład potencjału ma postać szeregu Fouriera o współczynnikach $a_m^{(i)}$ zależnych od wartości potencjału φ_{B1} i φ_{B2} na granicach rozdziału B_1 i B_2 :

$$\varphi(x, y) = \sum a_m^{(i)} \sin \frac{m\pi}{a} x \sinh \frac{m\pi}{a} y' \quad \text{gdzie}$$



Rysunek 6.6: Połączenie metody wielosiatkowej w podobszarze MG z rozwinięciem funkcyjnym w F. Rozkład potencjału w połowie przekroju linii koplanarnej (z prawej); linie kropkowane – rozwiązanie analityczne [94]

$$i = 1 \quad y' = y \quad (\text{poniżej } B_1) \quad i = 2 \quad y' = b - y \quad (\text{powyżej } B_2)$$

Przekroje B_1 i B_2 można traktować jako fikcyjne powierzchnie graniczne z warunkami brzegowymi φ_{B1} i φ_{B2} wspólnymi dla podobszarów F i MG. Muszą one być określone, żeby zastosować metodę wielosiatkową w MG i rozwinięcie funkcyjne w F. Z drugiej jednak strony wartości te będą znane dopiero po osiągnięciu ostatecznego rozwiązania wspólnego dla F i MG. W praktyce można φ_{B1} i φ_{B2} określić iteracyjnie, wykorzystując fakt, że rozwinięcie funkcyjne w F musi pokrywać się z rozwiązaniem numerycznym (metodą wielosiatkową) również w głębi obszaru MG. Zbieżność takiej metody potwierdzono w [94].

6.4 Struktury osiowosymetryczne

Przy osiowej symetrii linię oraz jej niejednorodności, czyli nieciągłości, traktuje się tak samo i można przedstawić w układzie cylindrycznym (ρ, ϕ, z) . Ze względu na jednorodność wzdłuż kierunku $\vec{i}_\phi$ strukturę taką można analizować dwuwymiarowo w przekroju podłużnym na półpłaszczyźnie (ρ, z) . W stosunku do problemu zdefiniowanego we współrzędnych kartezjańskich, zmienia się postać operatorów różniczkowych, więc równanie Laplace'a zamiast

$$\nabla(k \nabla u(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (6.34)$$

ma postać

$$\nabla(k \nabla u(\rho, z)) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(k \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.35)$$

Mnożąc (6.35) przez ρ otrzymuje takie samo równanie, jak dla układu kartezjańskiego. Wystarczy zmienić oznaczenia współrzędnych $\rho \rightarrow x$ i $z \rightarrow y$ oraz współczynnik równania $k \leftarrow kx$.

Rozdział 7

Rozwiązanie trójwymiarowego problemu magnetostatycznego

Najbardziej naturalnym podejściem do problemu magnetostatycznego wydaje się być rozwiązanie zagadnienia ze względu na wektorowy potencjał magnetyczny $\vec{A}$:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = \vec{J}, \quad (7.1)$$

które w przypadku jednorodnym oraz przy warunku koniecznym dla jednoznaczności potencjału wektorowego, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, sprowadza się do wektorowego równania Poissona:

$$-\nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} \quad \mu \vec{H} = \nabla \times \vec{A} \quad (7.2)$$

Rozmiar tego równania odpowiada trzem równaniom skalarnym, na każdą składową potencjału wektorowego. Inaczej niż w analizie dwuwymiarowej przekroju przewodnicy falowej, gdzie potencjał posiadał tylko jedną składową, w dowolnej strukturze trójwymiarowej niewiadomymi są wszystkie trzy składowe. Już z tego powodu rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia jest, w ogólnym przypadku (przy braku symetrii w strukturze), numerycznie trzykrotnie bardziej pracochłonne niż dla pola elektrycznego.

W przypadku niejednorodnych ośrodków ogólna postać zagadnienia (7.1) prowadzi do znacznego skomplikowania wariacyjnego sformułowania problemu, na co składa się przede wszystkim konieczność wymuszenia warunków ciągłości na granicy różnych ośrodków. Pomijając dodatkowe utrudnienia dotyczące warunków brzegowych związane z kłopotliwą interpretacją fizyczną potencjału wektorowego [68], najpoważniejszą przeszkodą jest konieczność zadawania prądu w postaci rozkładu gęstości $\vec{J}$. O ile dla wyznaczenia indukcyjności zastępczej można przyjąć dowolną wartość całkowitego prądu I płynącego w przewodniku, to jednak jego szczegółowy rozptyw ($\vec{J}$) jest ściśle związany z rozkładem pola i nie jest w ogólnym przypadku znany bez uprzedniego obliczenia tego pola. Z tego powodu potencjał wektorowy jest stosowany głównie w magnetyzmie, gdzie najczęściej analizuje się pole wzbudzone przez uzwojenia cienkich przewodów o łatwej do określenia gęstości prądu [85].

Konkurencyjną alternatywą w stosunku do rozwiązywania rozkładu pola magnetycznego za pośrednictwem potencjału wektorowego, która omija kłopotliwą konieczność dysponowania rozkładem gęstości prądu jest wykorzystanie *magnetycznego potencjału skalarnego* ψ . Skalarny potencjał magnetyczny jest pojęciem dualnym do potencjału elektrycznego i tak samo spełnia skalarne równanie Laplace'a. Zgrubne oszacowanie pozwala więc oczekiwać trzykrotnego skrócenia czasu obliczeń w stosunku do potencjału wektorowego.

Przedstawiona w niniejszym rozdziale analiza usuwa wszystkie niedogodności związane z potencjałem wektorowym. Proponowana metoda przeznaczona jest w ogólności dla struktur trójwymiarowych. Można ją stosować również do zagadnień dwuwymiarowych, choć w przypadku przekroju poprzecznego linii transmisyjnej jest to zupełnie zbyteczne, gdyż analiza magnetostaticzna może być zastąpiona elektrostatycznym równoważnikiem, czyli zwykłym skalarным równaniem Laplace'a. Niemniej jednak, przedstawiona poniżej metoda zostanie zaprezentowana w dwuwymiarowym przekroju struktury trójwymiarowej, co zwiększy czytelność ilustracji nie zawężając ogólności rozważań.

7.1 Skalarny potencjał magnetyczny

Magnetyczny potencjał skalarny można wprowadzić jedynie dla obszarów pozbawionych prądów, gdzie pole magnetyczne ma charakter potencjalny:

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \psi : \vec{H} = -\nabla \psi \quad (7.3)$$

Prądy, które muszą płynąć, żeby pole magnetyczne istniało trzeba więc usunąć z dziedziny analizy, czyli wyodrębnić z niej dowolne rozłączne podobszary, które prądów nie zawierają. Rysunek 7.1 ilustruje tę Sytuację dla dwuwymiarowego przekroju, choć wszystkie rozważania na ten temat dotyczą również struktur trójwymiarowych. Dobierając powierzchnię rozdzielającą Ω na Ω' i Ω'' tak, by można było utworzyć na nich ścianki magnetyczne M_1 i M_2 bez zaburzania rozkładu potencjału, zastępczym pobudzeniem pola (po usunięciu prądów) stają się pewne potencjały magnetyczne ψ_1 i ψ_2 ustalone na tych powierzchniach. Zapewniają one jednocześnie warunki brzegowe na ściankach magnetycznych dla równań Laplace'a:

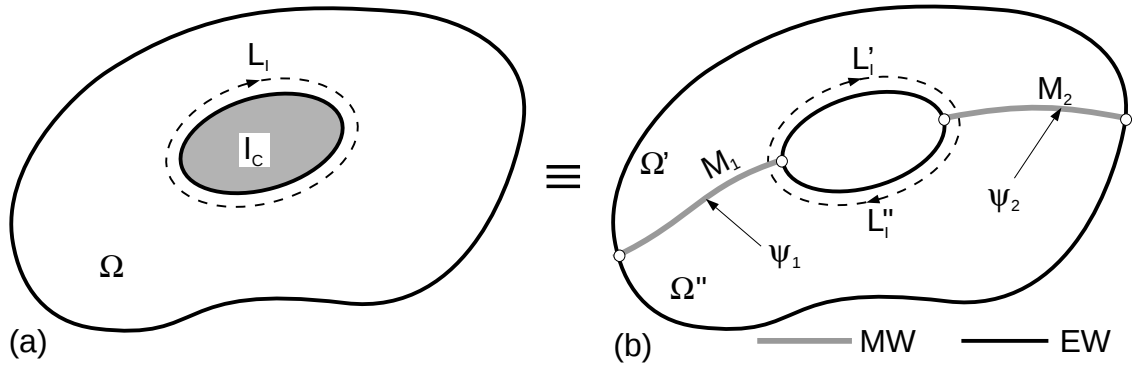
$$\nabla^2 \psi' = 0 \quad \nabla^2 \psi'' = 0 \quad (7.4)$$

w Ω' i Ω'' , odpowiednio. Dla zadanych wartości potencjałów ψ_1 i ψ_2 prąd w przewodniku otrzymuje się następująco:

$$I_c = \oint_{L_I} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{L'_I} \vec{H}' \cdot d\vec{l} + \int_{L''_I} \vec{H}'' \cdot d\vec{l} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{H}' \cdot d\vec{l} + \int_{M_2}^{M_1} \vec{H}'' \cdot d\vec{l} \quad (7.5)$$

Na mocy potencjalnego charakteru pola magnetycznego w Ω' i Ω'' (warunek 7.3) obie całki po L'_I i L''_I są sobie równe i zależą tylko od wartości potencjału na krańcach drogi całkowania, co daje:

$$I_c = 2(\psi_2 - \psi_1) \quad (7.6)$$



Rysunek 7.1: Wprowadzenie skalarneho potencjału magnetycznego ψ . Podział obszaru z prądem I_c (a) na równoważne obszary bez prądu ale z potencjałami ψ_1 i ψ_2 (b). EW, MW – ścianka elektryczna i magnetyczna

Na brzegu przewodnika z prądem wyłączonym z dziedziny analizy znika składowa normalna natężenia pola, co dla potencjału oznacza jednorodny warunek Neumanna

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0.$$

Taki sam warunek obowiązuje też na wszystkich innych powierzchniach przewodzących, czyli ściankach elektrycznych.

Jeśli indukcyjność przewodu z prądem wyliczana jest na podstawie strumienia magnetycznego

$$L = \frac{\Phi}{I_c}, \quad (7.7)$$

to Φ określić można na powierzchni ścianki magnetycznej M_1 lub M_2 . Nie ma przy tym znaczenia, w którym z podobszarów liczyć się będzie rozkład wektora $\vec{H}$, gdyż i tak poszukiwane są jego wartości jedynie na powierzchni granicznej. Tym samym redukuje się problem magnetostatyczny do wycinka analizowanej struktury, co może być dodatkową zaletą przedstawionego podejścia. Jeżeli korzystamy ze sformułowania energetycznego $W_m = \frac{1}{2} I_c^2 L$, to konieczne jest już określenie energii W_m

$$L = 2 \frac{W_m(\Omega') + W_m(\Omega'')}{I_c^2}. \quad (7.8)$$

Pozostaje jeszcze wyznaczenie powierzchni rozdziału M_1 i M_2 tak, żeby mogły być one jednocześnie ściankami magnetycznymi bez zaburzania rozkładu pola.

7.2 Dualny problem elektryczny

Powszechnie stosowanym podejściem do problemu magnetostatycznego w układach planarnych jest rozwiązanie dualnego problemu elektrostatycznego [40, 120], który powstaje w wyniku podstawień zestawionych w tabeli 7.1. Otrzymany z rozwiązania równania Laplace'a dla tak skonstruowanego problemu dualnego rozkład potencjału

Problem magnetyczny	Problem elektryczny
ψ	φ
płaszczyzny metalizacji z prądem I	szczeliny w płaszczyznach metalizacji
szczeliny w płaszczyznach metalizacji	płaszczyzny metalizacji o napięciu $\Delta\varphi = I$
$\varepsilon_r > 1$	$\varepsilon_r = 1$
$\mu_r > 1$	$\varepsilon_r = \mu_r \quad \mu_r = 1$
ekrany przewodzące (ścianki elektryczne)	ścianki magnetyczne

Tabela 7.1: Zamiana problemu magnetycznego na dualny problem elektryczny

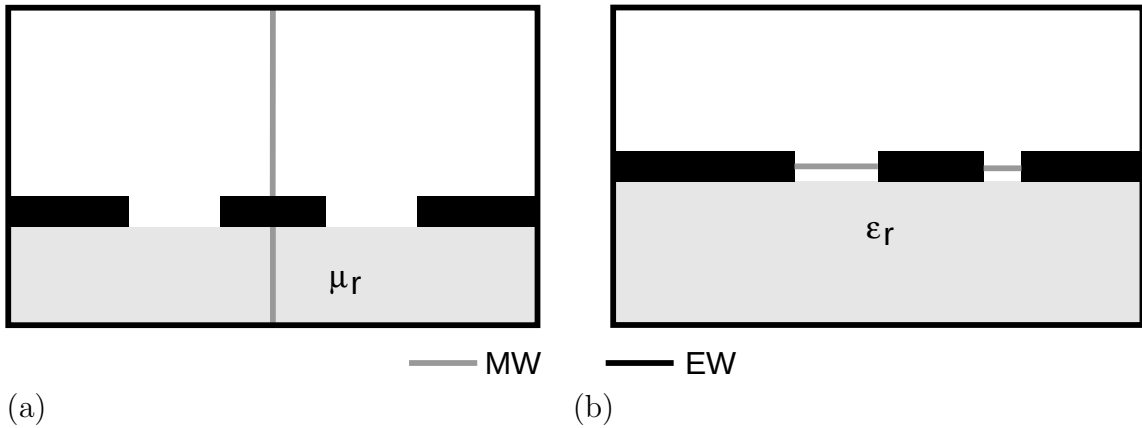
elektrycznego φ jest równoważny rozkładowi skalarne go potencjału magnetycznego ψ w problemie pierwotnym. Metoda ta pozwala na analizę trójwymiarową układów **planarnych** o dowolnej geometrii płaszczyzn metalizacji, jednak ma następujące ograniczenia:

- w szczelinach na płaszczyznach metalizacji muszą obowiązywać jednorodne warunki Neumanna, co oznacza, że metalizacja musi leżeć w płaszczyźnie symetrii pola magnetycznego
- grubość metalizacji jest zanedbywana

7.3 Wybór ścianek magnetycznych

W najprostszym przypadku ścianki magnetyczne mogą być wstawione w płaszczyznach symetrii ze względu na rozkład pola magnetycznego, czego dwa przypadki zilustrowano na rysunku 7.2. W płaszczyznach symetrii natężenie pola magnetycznego posiada tylko składową normalną. Dla potencjału magnetycznego oznacza to powierzchnię stałej wartości, którą wolno zastąpić ścianką magnetyczną.

Łatwo zauważyć, że sformułowanie dualnego problemu elektrycznego niczym nie różni się od oryginalnego problemu dla potencjału magnetycznego w przypadku struktur symetrycznych względem płaszczyzny metalizacji. Wtedy bowiem w płaszczyźnie tej między przewodami można usytuować ścianki magnetyczne z warunkami Dirichleta dla ψ . Odpowiada to dokładnie cienkiej metalizacji w dualnym problemie elektrycznym – warunki Dirichleta dla φ . Jednak w oryginalnym sformułowaniu problemu magnetycznego, inaczej niż w problemie elektrycznym, grubość, a nawet kształt przekroju przewodów mogą być dowolne, jeśli tylko pozostaną one symetryczne względem wspólnej płaszczyzny (rys. 7.2). Analiza oparta na takich założeniach



Rysunek 7.2: Dwa przykłady symetrii struktury koplanarnej ze względu na rozkład pola magnetycznego. Przypadek (b) dopuszcza dowolną geometrię przewodów w płaszczyźnie metalizacji. EW, MW – ścianka elektryczna i magnetyczna

stosowana była w [91] w odniesieniu do struktur koplanarnych o niezerowej grubości metalizacji.

Umieszczenie ścianek magnetycznych M_1 i M_2 w płaszczyznach symetrii w łatwy sposób umożliwia analizę opartą na potencjałach magnetycznych, ale tylko w strukturach symetrycznych. W szczególności, przyjmując ścianki magnetyczne w płaszczyźnie równoległej do warstwy metalizacji ekrany ograniczające strukturę od dołu i od góry muszą być jednakowo od niej oddalone lub oddalone na tyle, żeby ich wpływ na pole w pobliżu pasków był do pominięcia. Przybliżenie jednego z ekranów spowoduje konieczność „wybrzuszenia” ścianki magnetycznej w jego stronę.

W ogólności, gdy struktura nie jest symetryczna, poszukiwać należy powierzchni, na której zanika składowa styczna pola $\vec{H}$, czyli powierzchni ekwipotencjalnych dla potencjału magnetycznego. Dla fali TEM jest to równoważne warunkowi na składową normalną pola $\vec{E}$:

$$E_n = 0 \quad \text{lub dla potencjału} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (7.9)$$

Równania te przedstawiają powierzchnie zawierające linie sił pola elektrycznego. Jeżeli nawet będzie znany rozkład pola elektrycznego w wyniku wcześniejszego poszukiwania pojemności w schemacie zastępczym, to i tak samo wyznaczenie takiej powierzchni jest numerycznie skomplikowane i może okazać się zupełnie nieopłacalne.

7.4 Koncepcja powierzchni rozdziału potencjału

Metodę pozwalającą na stosowanie magnetycznych potencjałów skalarnych bez konieczności kłopotliwego wyboru ścianek magnetycznych w strukturach pozbawionych płaszczyzn symetrii zaproponowano w [76]. Jest ona szczególną modyfikacją sytuacji, w której ścianki magnetyczne M_1 i M_2 złączono ze sobą (rys.7.3), a jeden z podobszarów został pozbawiony wnętrza. Powstała w ten sposób jedna ścianka ma-

gnetyczna M w postaci „szczeliny” rozdzielającej, która na obu swoich powierzchniach M_1 i M_2 ma ustalone różne wartości potencjału jako warunki brzegowe:

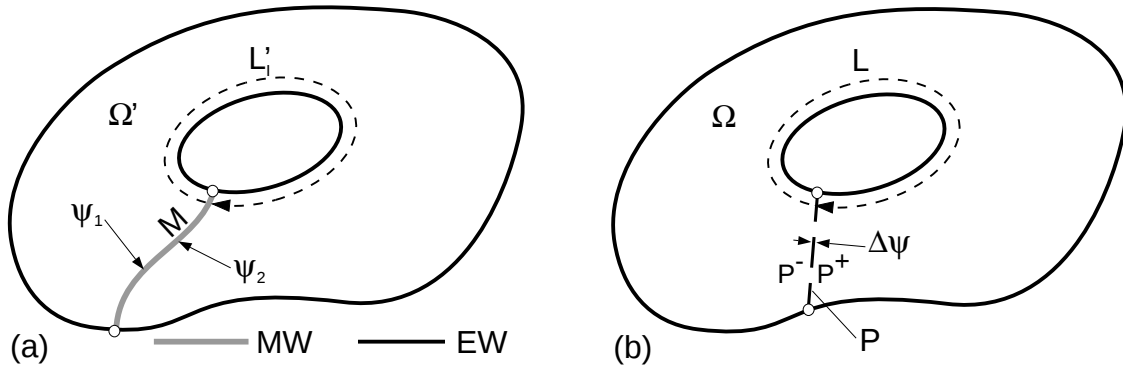
$$\psi(M_1) = \psi_1 \quad \psi(M_2) = \psi_2 \quad (7.10)$$

Uskok potencjału o wartości $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$ przy przejściu przez „szczelinę” nie zaburza ciągłości natężenia pola magnetycznego, gdyż występuje on w podobszarze o zerowej szerokości, więc pole w nim nie musi być określone. Całka cyrkulacji wokół przewodu z prądem I_c odpowiada już tylko jednej całce pomiędzy obu stronami tej samej powierzchni.

$$I_c = \oint_{L_I} \vec{H} d\vec{l} = \int_{L'_1} \vec{H}' d\vec{l} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{H}' d\vec{l}$$

$$I_c = \Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Z punktu widzenia podobszaru, który pozostał i wypełnia teraz całą dziedzinę analizy uskok potencjału nie istnieje, są tylko dwie różne wartości potencjału na dwóch fragmentach jego brzegu. Ponieważ obydwa te brzegi zajmują geometrycznie to samo miejsce, rozkłady wektora natężenia pola magnetycznego na ich powierzchniach muszą być również sobie równe. Nie kłóci się to z istnieniem nieciągłości w wynikowym rozkładzie potencjału, gdyż jego gradient może nadal pozostawać ciągły.

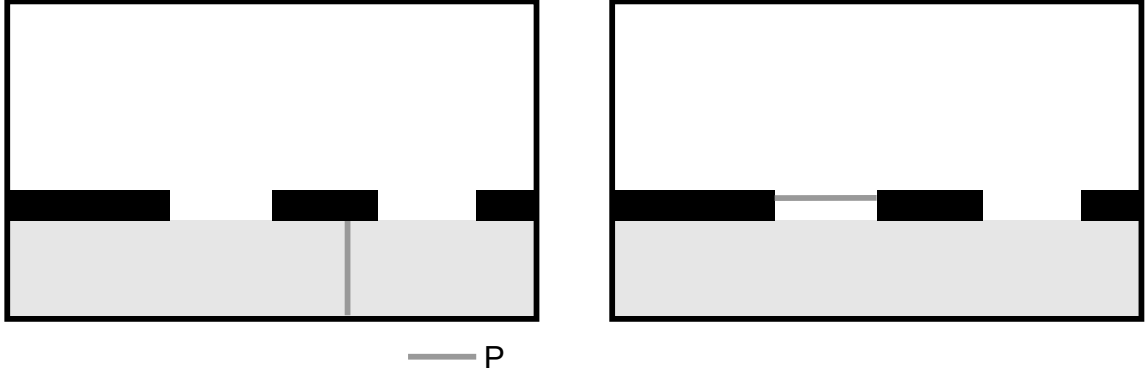


Rysunek 7.3: Wynik złączenia dwóch powierzchni rozdzielających obszar z prądem na podobszary, w których prąd zastąpiono potencjałami skalarnymi zadanymi w postaci – (a) stałych wartości ψ_1 i ψ_2 na ścianie magnetycznej M , (b) stałej różnicy potencjału $\Delta\psi$ w dowolnym przekroju P (powierzchnia rozdziału potencjału)

Zauważmy, że prąd I_c związany jest faktycznie z różnicą potencjałów $\Delta\psi$ na powierzchni M , a nie z bezwzględnymi ich wartościami. Również fizyczne rozwiązanie, czyli natężenie pola jako gradient potencjału nie zależy od bezwzględnych wartości. Wobec tego wartości potencjałów ψ_1 i ψ_2 zadanych w postaci warunków brzegowych mogą dowolnie zmieniać się wzdłuż przekroju M , jeśli tylko zachowana zostanie stała ich różnica pomiędzy obu jego stronami. Nowy przekrój oznaczony na rysunku 7.3b jako P nie musi tworzyć ścianki magnetycznej, może więc być poprowadzony dowolnie między różnoimiennymi przewodami (rys.7.4). W [76] przekrój taki nazwano

powierzchnią rozdziału potencjału (*potential partitioning surface*). Warunki brzegowe Dirichleta (7.10) na ścianie magnetycznej M trzeba zastąpić warunkami stałej różnicy potencjału oraz ciągłości gradientu potencjału na P :

$$\begin{aligned}\psi(P^+) - \psi(P^-) &= \Delta\psi \\ \nabla\psi^+ &= \nabla\psi^- \quad \text{w przekroju } P\end{aligned}\tag{7.12}$$

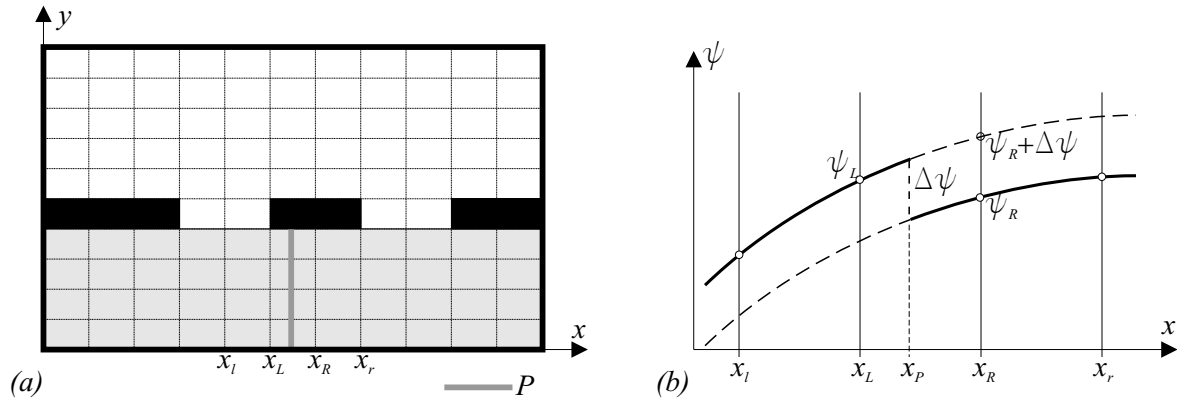


Rysunek 7.4: Przykładowe powierzchnie rozdziału potencjału P w przekroju linii koplanarnej

7.4.1 Implementacja powierzchni rozdziału potencjału w metodzie różnic skończonych

Przy dyskretyzacji równania Laplace'a różnicami skończonymi wygodnie jest ustawić powierzchnię rozdziału potencjału P prostopadłe do jednego z kierunków układu współrzędnych. Wtedy warunek ciągłości gradientów potencjału (7.12) dotyczyć będzie jednej składowej gradientu i wpływać będzie na sformułowania różnicowe tylko dla jednej zmiennej. W przykładowym przypadku (rys. 7.5a) P jest prostopadła do kierunku x , więc nieciągłość potencjału wystąpi wyłącznie dla rozkładu $\psi(x)$. Dwa sąsiednie przekroje dyskretyzacji osi x , pomiędzy którymi znajduje się płaszczyzna rozdziału potencjału oznaczmy jako x_L i x_R . Pomiedzy tymi współrzędnymi, w przekroju $x = x_P$ następuje uskok charakterystyki $\Delta\psi$ z zachowaniem ciągłości pochodnej (rys. 7.5b). Pochodną po obu stronach płaszczyzny P przybliży się różnicami lewo- lub prawostronnymi w bezpośrednio sąsiadujących z nią przekrojach x_L i x_R .

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial\psi}{\partial x} \right|_{x_L} &\approx \frac{(\psi_R + \Delta\psi) - \psi_L}{x_R - x_L} \\ \left. \frac{\partial\psi}{\partial x} \right|_{x_R} &\approx \frac{\psi_R - (\psi_L - \Delta\psi)}{x_R - x_L}\end{aligned}\tag{7.13}$$



Rysunek 7.5: Przykładowa powierzchnia rozdziału potencjału P na siatce różnic skończonych i przebieg potencjału w jej otoczeniu

Widać, że przybliżenia różnicowe obu pochodnych są sobie równe, więc ich użycie do dyskretyzacji równania Laplace'a gwarantuje spełnienie warunków na rozkład potencjału (7.12) wokół płaszczyzny rozdziału P . Wpływ nieciągłości potencjału na otrzymany w ten sposób układ równań ograniczony jest jedynie do równań dla węzłów bezpośrednio sąsiadujących z P . W naszym przypadku (rys. 7.5b) dla równaniu Laplace'ła

$$\nabla^2 \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0$$

wpływ nieciągłości potencjału dodatkowo ograniczy się do składników związanych z pochodnymi po x . Zastępując $\Delta\psi$ przez prąd I_c i zakładając stały krok dyskretyzacji h otrzymamy następujące równania dla węzłów x_L i x_R .

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{x_L} = 0 & \longrightarrow \frac{\psi_l + (\psi_R + I_c) - 2\psi_L}{h^2} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{x_R} = 0 & \longrightarrow \frac{(\psi_L - I_c) + \psi_r - 2\psi_R}{h^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Przenosząc I_c na prawą stronę otrzymamy po lewej stronie wyrażenia różnicowe takie jak przy braku warunków brzegowych

$$\begin{aligned} \frac{\psi_l + \psi_R - 2\psi_L}{h^2} &= \frac{-I_c}{h^2} \\ \frac{\psi_L + \psi_r - 2\psi_R}{h^2} &= \frac{I_c}{h^2} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Uskok potencjału na powierzchni P zastępujący prąd nie zmienia więc macierzy zdyskretyzowanego równania Laplace'a, a przejawia się jedynie w postaci prądów

w wektorze pobudzeń i tylko dla elementów odpowiadających węzłom bezpośrednio sąsiadującym z P .

Należy zauważyć, że położenie przekroju P nie musi być określone poprzez współrzędną x_P , wystarczy bowiem wskazać, z którymi przekrojami dyskretyzacji sąsiaduje. Stosując metodę wielosiatkową, podczas przejścia między kolejnymi poziomami siatek należy tylko zapewnić konsekwentne zagnieżdżanie przedziałów zawierających P . Można to prosto zapewnić związując powierzchnię P z ustalonymi współrzędnymi przestrzennymi.

7.5 Powierzchnia rozcięcia w metodach elementów skończonych

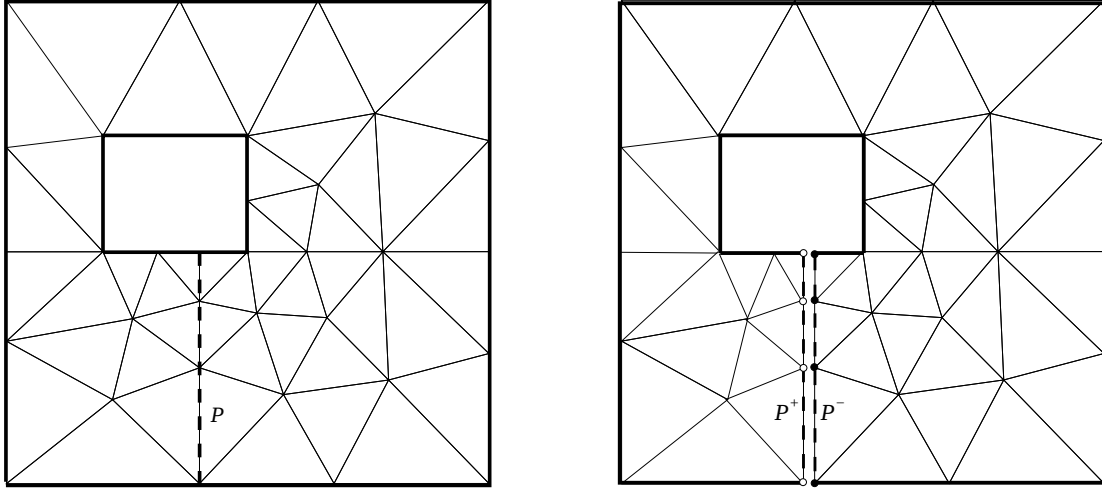
Koncepcja powierzchni rozdziału potencjału zaproponowana oryginalnie w metodzie różnic skończonych [76] nie wprowadzała faktycznego rozcięcia dziedziny. Wewnątrz dziedziny został wymuszony uskok potencjału z zachowaniem ciągłości gradientu poprzez odpowiednie skorygowanie, o wartość $\Delta\psi$, potencjałów w węzłach sąsiadujących z P w sformułowaniu różnicowego przybliżenia pochodnych

Zastosowanie tego podejścia w metodach z elementami skończonymi mogłoby polegać na podobnym skorygowaniu wartości potencjału dla węzłów leżących na P , ale tylko dla elementów znajdujących się po jednej jej stronie. Doprowadziłoby to jednak do powstania sztucznego uskoku potencjału *wewnątrz* tych elementów, a w konsekwencji nienaturalnej koncentracji energii zależnej właśnie od gradientu potencjału. W przypadku metod z adaptacyjnym zagęszczaniem siatki, elementy takie zostałyby rozdrobnione, a w efekcie zmniejszenia ich rozmiarów, gradient wzrósłby jeszcze bardziej generując jeszcze silniejszy sygnał do dalszego zagęszczania elementów. W pozostałym obszarze siatka nie byłaby w ogóle zagęszczana, a rozkład energii zostałby całkowicie przysłonięty przez rosnący do nieskończoności przestrzenny impuls energii na P .

Widać, że koncepcja powierzchni rozdziału potencjału wymaga w przypadku adaptacyjnej dyskretyzacji elementami skończonymi odmiennej implementacji – powierzchnia P musi przyjąć postać fizycznego rozcięcia dziedziny analizy, na brzegach którego należy narzucić warunki (7.12). Powierzchnia P ma przebiegać wzdłuż powierzchni styku elementów, najwygodniej jest więc wymusić rozkład elementów dopasowany do zadanego przebiegu P już na etapie generacji siatki. Rozdzielenie elementów granicznych, czyli złączonych węzłami należącymi do P , następuje poprzez podwojenie tych węzłów bez zmiany współrzędnych oraz odpowiednie przypisanie ich do nowo utworzonych powierzchni granicznych P^- i P^+ (rys.7.6). Powierzchnie te oraz związane z nimi elementy graniczne odseparowane są teraz szczeliną o zerowej szerokości, która nie należy do dziedziny analizy, dzięki czemu uskok potencjału w jej obrębie nie zaburzy rozwiązania.

Do dalszych rozważań oznaczenie magnetycznego potencjału skalarne ψ zostanie zastąpione ogólnym symbolem niewiadomej funkcji skalarnej u .

W warunkach brzegowych (7.12) ciągłość gradientu w poprzek rozcięcia P można uprościć, gdyż drugi warunek, na stałą różnicę potencjału, gwarantuje jednakową



Rysunek 7.6: Rozcięcie dziedziny z siatką elementów skończonych. Powierzchnie P^+ i P^- rozsunięto na rysunku tylko na potrzeby ilustracji – w rzeczywistości geometrycznie są jednakowe, to samo dotyczy podwojonych węzłów (kropki czarne i białe).

wartość składowej stycznej gradientu w odpowiadających sobie punktach P^- i P^+ . Dostajemy więc

$$u^+ - u^- = \Delta u \quad (7.16)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{P^+} + \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{P^-} = 0. \quad (7.17)$$

Odwrócenie znaku w warunku ciągłości gradientu (w porównaniu do (7.12)) wynika z faktu, że dodatnie kierunki powierzchni P^- i P^+ wskazują na zewnątrz dziedziny i mają przeciwne zwroty.

Warunki (7.16) i (7.17) można próbować zaimplementować analogicznie do warunków Dirichleta i Neumanna, czyli jako warunek *zasadniczy* (essential) dotyczący poszczególnych punktów dyskretyzacji na granicy dla uskoku potencjału oraz *naturalny* w słabym sformułowaniu zagadnienia brzegowego dla ciągłości gradientu.

7.5.1 Naturalny warunek ciągłości gradientu

Potencjał magnetyczny w obszarze ograniczonym ściankami przewodzącymi spełnia równanie Laplace'a o ogólnej postaci:

$$\nabla k \nabla u = 0 \quad \text{w } \Omega \quad (7.18)$$

wraz z warunkami (7.16) i (7.17) na brzegach P^- i P^+ oraz jednorodnym warunkiem Neumanna na przewodnikach

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_N, \quad (7.19)$$

gdzie k oznacza parametr materiałowy (w tym przypadku μ), a

$$\Gamma_N = \partial\Omega - (P^+ \cup P^-). \quad (7.20)$$

Metody z elementami skończonymi korzystają ze słabego sformułowania równania (7.18)

$$\int_{\Omega} v \nabla(k \nabla u) dV = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (7.21)$$

wraz z analogiczną postacią warunków brzegowych (7.17) i (7.19)

$$\int_{\Gamma_N} v \nabla u \vec{dS} = 0 \quad (7.22)$$

$$\int_{P^-} v \nabla u \vec{dS} + \int_{P^+} v \nabla u \vec{dS} = 0. \quad (7.23)$$

Przekształcając laplasjan w (7.21) dostajemy

$$\int_{\Omega} \nabla(v k \nabla u) - \nabla v \cdot k \nabla u dV = 0, \quad (7.24)$$

co po zastosowaniu twierdzenia Gaussa do pierwszego wyrazu podcałkowego daje

$$\int_{\partial\Omega} v k \nabla u \vec{dS} - \int_{\Omega} \nabla v \cdot k \nabla u dV = 0 \quad (7.25)$$

Całka po brzegu dziedziny $\partial\Omega = \Gamma_N \cup P^+ \cup P^-$ określona jest w warunkach (7.22) i (7.23) i zeruje się, co ostatecznie prowadzi do słabego sformułowania w postaci

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot k \nabla u dV = 0, \quad (7.26)$$

która bezpośrednio wykorzystywana jest do dyskretyzacji na siatce elementów skończonych. W równaniu tym *naturalnie* obecne są słabe postacie zarówno warunku jednorodnego Neumanna, jak i warunku ciągłości składowej normalnej gradientu na brzegach rozcięcia.

7.5.2 Zasadniczy warunek uskoku potencjału

Sformułowanie warunku

Warunki Dirichleta nie mogą być naturalnie wbudowane w słabe sformułowanie zagadnienia (7.26), trzeba więc je narzucić bezpośrednio na wartości funkcji u w węzłach należących do powierzchni z warunkami Dirichleta. Dotyczy to również warunków na uskok potencjału (7.16). Jest to tzw. silna postać warunków lub warunki zasadnicze (istotne), gdyż będą spełnione dokładnie w każdym z zadanych węzłów, a nie w formie całkowej dla całej powierzchni. Warunki zasadnicze nakłada się dopiero na określone elementy wektora niewiadomych w układzie równań powstałym po dyskretyzacji zagadnienia. Przy braku źródeł w obrębie dziedziny jest to układ jednorodny:

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = 0, \quad (7.27)$$

gdzie $\mathbf{A}$ to symetryczna globalna macierz współczynników będąca zdyskretyzowaną postacią operatora Laplace'a $\nabla k \nabla(\cdot)$.

Warunek na uskok potencjału wiąże ze sobą wartości węzłów znajdujących się na przeciwległych krańcach dziedziny (pomimo geometrycznej identyczności), przez co przypomina warunki periodyczne. Podobna też będzie ich implementacja w macierzy układu równań $\mathbf{A}$. Oznaczając przez p i q indeksy odpowiadających sobie węzłów po przeciwnych stronach powierzchni rozcięcia P , warunek brzegowy (7.16) przyjmie postać równań wiążących niewiadome o numerach p i q

$$u_p = d + u_q, \quad (7.28)$$

gdzie d zastępuje oznaczenie Δu , a $p \in P^-$ oraz $q \in P^+$.

Przypadek siatki adaptacyjnej

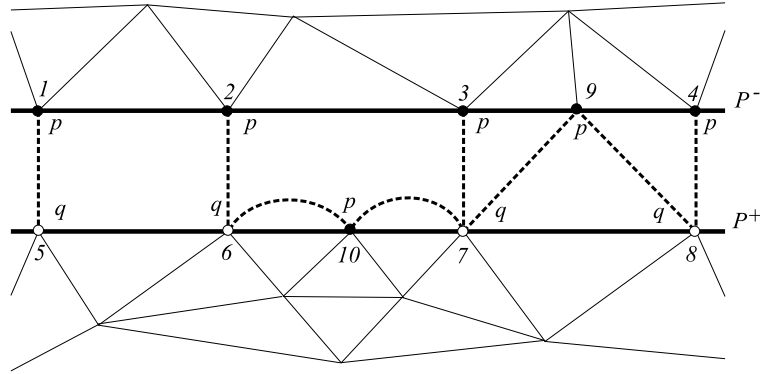
W przypadku zastosowania adaptacyjnych metod wielosiatkowych nie wszystkie węzły po przeciwnych stronach P będą miały swoje jednoznaczne odpowiedniki. Adaptacyjne zagęszczanie siatki uzależnione jest od rozkładu błędu dyskretyzacji, który przypisany jest nie punktom, lecz całym elementom. Ponieważ elementy sąsiadujące z P po obu stronach pokrywają inny obszar pola, zagęszczanie nie musi przebiegać jednakowo, nawet jeżeli dla siatki początkowej rozkład węzłów będzie taki sam. Przykładowo, dla siatki dwuwymiarowej, zagęszczenie elementu (p_1, p_2) skojarzonego z elementem (q_1, q_2) tylko po jednej stronie spowoduje pojawienie się węzła p_{12} (numer 9 na rys. 7.7), bez swojego odpowiednika po stronie węzłów typu q . Wartość potencjału w tym węźle, $u_{p_{12}}$ będzie musiała być związana warunkiem (7.28) z wartością interpolowaną pomiędzy węzłami q_1 i q_2 (numery 7 i 8 rys. 7.7), czyli

$$u_p = d + \sum_{k=1}^{N_w} w_k u_{q_k}, \quad (7.29)$$

gdzie w_k to współczynniki interpolacji (wagi), $\sum w_k = 1$, a N_w określa liczbę węzłów, którymi elementy stykają się z P , czyli $N_w = 2$ lub 3 dla siatki trójkątów lub czworokątów.

Warunki tej postaci dla wszystkich zestawów węzłów $\{p, q_k\}$ mogą być niezależnie wstawiane do układu równań (7.27) tylko, gdy w kolejnych przypisaniach pomiędzy węzłami z P^- i P^+ typ indeksów (p lub q) dla poszczególnych punktów nie będzie się zmieniał. Inaczej mówiąc, węzeł typu p dla jednego warunku nie może stać się typu q w innym warunku. Sytuacja taka może się zdarzyć, gdy sąsiednie elementy zostaną zagęszczone po przeciwnych stronach P . Na przykładzie z rys. 7.7 przypadek ten dotyczy węzła 10 – jako nowo powstały jest typu p , ale mieści się pomiędzy węzłami o wcześniej przypisanym typie q (numery 6 i 7) i jedynie do nich może zostać przypisany. W takiej sytuacji warunek musi być skonstruowany w alternatywnej postaci równania

$$u_p = \sum_{k=1}^{N_w} w_k u_{q_k}, \quad (7.30)$$



Rysunek 7.7: Powiązanie węzłów na powierzchniach rozcięcia przy formułowaniu warunków uskoku potencjału; węzły typu p i q oznaczone są jako kropki czarne i białe

jeżeli

$$u_{p_k} = d + u_{q_k} \quad \text{oraz} \quad \{p, q_k\} \subset P^- \text{ lub } P^+.$$

Równanie to jest szczególnym przypadkiem (7.29), gdzie $d = 0$.

Wstawianie warunków do układu równań

Bezpośrednie zastosowanie warunków uskoku potencjału do układu równań (7.27) zaburzyłoby symetrię macierzy wynikowego układu

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{b}}, \quad (7.31)$$

Byłby to efekt bardzo niekorzystny, gdyż spowodowałby znaczne pogorszenie właściwości układu równań ze względu na dostępność i efektywność iteracyjnych algorytmów jego rozwiązywania. Symetrię można zachować, jeżeli warunki zostaną wstawione nie do układu (7.27), lecz do zdyskretyzowanej postaci funkcjonału:

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{b}, \quad (7.32)$$

gdzie $\mathbf{b}$ oznacza wektor prawej strony układu równań (7.27) oraz układów przekształconych na podstawie już wstawionych warunków.

Takie podejście jest możliwe, gdyż przy dyskretyzacji metodą elementów skończonych korzysta się ze słabego sformułowania równania różniczkowego, które w przypadku symetrycznym i dodatnio określonym (jak to ma miejsce w równaniu Poissona) jest równoważne problemowi wariacyjnemu z funkcjonałem (7.32). Ażeby nie zmienić rozwiązania problemu, które zlokalizowane jest w minimum $F(\mathbf{u})$, funkcjonał dla przekształconego układu równań

$$\tilde{F}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{b}} \quad (7.33)$$

musi spełniać warunek

$$\tilde{F}(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + C. \quad (7.34)$$

gdzie C jest dowolną stałą niezależną od $\mathbf{u}$.

Niewiadoma u_p jest zastępowana w wektorze $\mathbf{u}$ wyrażeniem (7.29), przez co znika z układu równań. Następnie, dla jej przywrócenia, do układu wstawiane jest to samo równanie na u_p , (7.29). W wyniku otrzymuje się nowe równanie (7.31), które poddaje się takim samym przekształceniom dla kolejnego równania warunku z kolejnym u_p . Po jednokrotnym wstawieniu warunku, zmienione wyrazy macierzy $\tilde{a}_{ij}$ oraz wektora pobudzeń $\tilde{b}_i$ są następujące – po usunięciu zmiennej u_p

$$\tilde{a}_{iq_k} = a_{iq_k} + w_k a_{ip}, \quad i \neq q_k, p \quad (7.35a)$$

$$\tilde{a}_{q_k j} = a_{q_k j} + w_k a_{pj}, \quad j \neq q_k, p \quad (7.35b)$$

$$\tilde{a}_{q_k q_l} = a_{q_k q_l} + w_k a_{qlp} + w_l a_{pqk}, \quad k, l = 1 \dots N_w \quad (7.35c)$$

oraz po wstawieniu równania warunku (7.29)

$$\tilde{a}_{pp} = -a_{pp} \quad (7.35d)$$

$$\tilde{a}_{q_k p} = -w_k a_{pp} \quad (7.35e)$$

$$\tilde{a}_{pq_k} = -w_k a_{pp} \quad (7.35f)$$

$$\tilde{b}_i = -d a_{ip}. \quad (7.35g)$$

Łatwo zauważyć, że w przekształconym układzie równań macierz $\tilde{\mathbf{A}}$ pozostaje symetryczna. Po prawej stronie pojawiają się pobudzenia $\tilde{\mathbf{b}}$ odpowiadające źródłom reprezentowanym przez uskok potencjału, który z kolei zastępuje fizyczny prąd. Jednak sama macierz, ze względu na brak warunków brzegowych Dirichleta (ustalających wartości potencjału w wybranych węzłach), będzie **osobliwa**. Rozwiązanie w postaci rozkładu potencjału może być określone tylko z dokładnością do stałej. Nie wpłynie to jednak na wartość energii w strukturze, gdyż potencjał magnetyczny nie jest wielkością fizyczną. Rozwiązaniem fizycznym jest dopiero rozkład natężenia pola magnetycznego $\vec{H} = -\nabla u$, niewrażliwy na stałe przesunięcia potencjału.

7.5.3 Osobliwy układ równań w metodach wielosiatkowych

Koniecznym warunkiem rozwiązywalności układu równań z macierzą osobliwą jest aby wektor prawej strony leżał w zasięgu (range) macierzy,

$$\tilde{\mathbf{b}} \in R(\tilde{\mathbf{A}}).$$

W tym celu wektor źródeł $\tilde{\mathbf{b}}$ musi być *kompatybilny* z warunkami brzegowymi. Fizyczna interpretacja tego warunku jest następująca. Zamknięcie obszaru analizy jednorodnymi warunkami Neumanna (na powierzchniach przewodnika) oznacza, że linie sił pola magnetycznego nie „przebijają” tych brzegów i nie wypływają na zewnątrz. Jedynymi brzegami, przez które pole przepływa są powierzchnie rozcięcia, tu jednak linie sił pola zachowują ciągłość, więc powracają do wnętrza natychmiast po jego opuszczeniu. Całkowity strumień jest więc równy zero, co na mocy prawa Gaussa musi oznaczać zrównoważenie źródeł wewnątrz obszaru. Dla układu równań oznacza to, że

$$\sum_{i=1}^N \tilde{b}_i = 0,$$

co gwarantuje kompatybilność $\tilde{\mathbf{b}}$ z warunkami brzegowymi. Wymóg ten jest spełniony, ponieważ w macierzy $\mathbf{A}$ z jednorodnymi warunkami naturalnymi (Neumanna)

$$a_{jj} = -\sum_{i=1}^N a_{ij} \quad \text{dla } i \neq j, \quad j = 1, \dots, N,$$

a w macierzy $\tilde{\mathbf{A}}$ wyrazy na przekątnej specjalnie dobrano tak, aby $\tilde{a}_{pp} = -a_{pp}$ (7.35d), dzięki czemu $\tilde{b}_p = -d a_{pp}$ (wzór (7.35g) dla $i = p$).

Konsekwencje osobliwej macierzy układu równań:

- Osobliwy układ równań nie może być rozwiązywany metodami bezpośrednimi
- Do iteracyjnego rozwiązywania układu można stosować tylko wybrane metody: Metoda Jacobiego jest zbieżna tylko do pewnego momentu, metody gradientowe, CG lub GMRES, są zasadniczo dobrze zbieżne, błędy zaokrągleń mogą spowolnić iteracje.
- Jak pokazano w [82], sam algorytm wielosiatkowy (korekcja zgrubną siatką) nie jest wrażliwy na osobliwość macierzy.
- Na rzadkiej siatce (najniższy poziom zagęszczania – siatka początkowa) nie można stosować dokładnych metod bezpośrednich, lecz jedynie wybrane metody iteracyjne

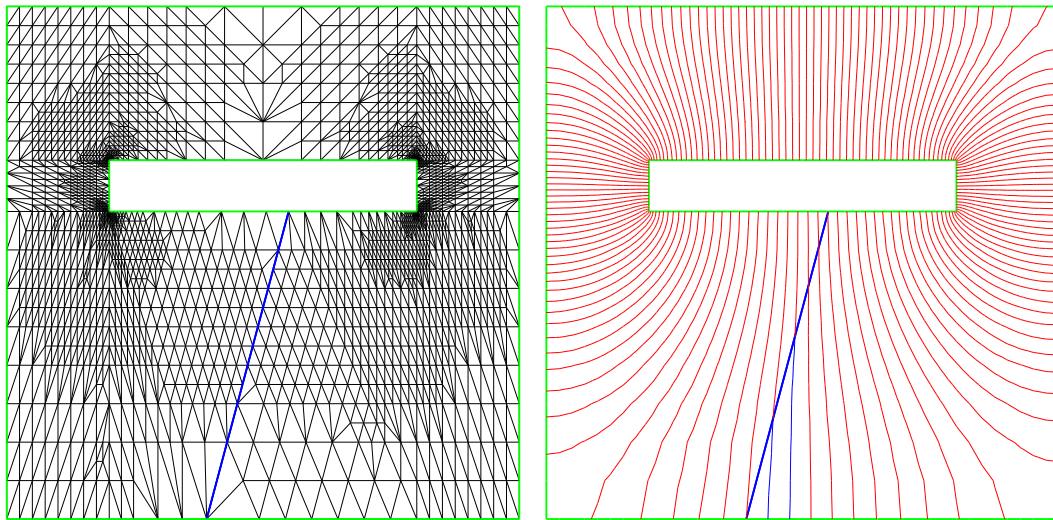
7.6 Testy numeryczne

Przedstawiona metoda przeznaczona jest do analizy trójwymiarowej, jednak przypadek dwuwymiarowy również zostanie przetestowany w celu wstępnej weryfikacji i czytelniejszej ilustracji. Do testów zastosowano kaskadowy algorytm wielosiatkowy oparty na metodzie gradientów sprzężonych (CG) i prekondycjoningu wielosiatkowym z iteracjami Jacobiego. W przedstawianych profilach zbieżności liczba iteracji odnosi się do metody CG.

7.6.1 Weryfikacja dwuwymiarowa

Dla ilustracji poprawności rozwiązania struktura posiada symetrię względem pionowej osi, a powierzchnię rozcięcia pochylono, tak aby przechodziły przez nią linie ekwipotencjalne. Odstęp potencjału pomiędzy liniami jest tak dobrany, aby ich przebiegi mogły wyraźnie kontynuować się po przeciwnej stronie rozcięcia. Gładkość przejścia linii ekwipotencjalnych oznacza spełnienie warunku ciągłości gradientu potencjału. Warunek stałej wartości uskoku potencjału będzie zawsze spełniony, gdyż wbudowany został w sam układ równań. Wynik odniesienia w postaci całkowitej energii pola magnetycznego struktury W_m wyliczonej na podstawie energii równoważnego problemu elektrycznego: $2W_m = 1/(2W_e)$ W analizowanej strukturze unormowana względem ε_0 energia elektryczna po 19 krokach zagęszczania wynosi $W_e = 3.32725$ z błędem estymowanym $\varepsilon = 0.009\%$, co daje $W_{mt} = 0.075137$.

Na rysunkach 7.8 przedstawiono siatkę oraz rozkład potencjału po 10 krokach adaptacyjnego zagęszczania dla pierwszego z dwóch ustawień powierzchni rozcięcia. Profil zbieżności aproksymacji przedstawia tabela 7.2. Widać, że błąd estymowany ε_{est} dla energii jest nie odbiega zasadniczo do błędu prawdziwego ε_t liczonego względem energii podniesienia W_{mt} . Jak przewidywano, osobliwość macierzy układu równań nie przeszkadza w utrzymaniu stosunkowo małej liczby iteracji we wszystkich krokach zagęszczania. Przykład ten potwierdza poprawność metody implementacji warunków brzegowych na powierzchni rozcięcia jako naturalnego warunku na ciągłość gradientu w słabym sformułowaniu zagadnienia przy wymuszeniu uskoku potencjału w macierzy układu równań.



Rysunek 7.8: Rozkład siatki i potencjału magnetycznego po 10 kroku adaptacyjnego zagęszczania.

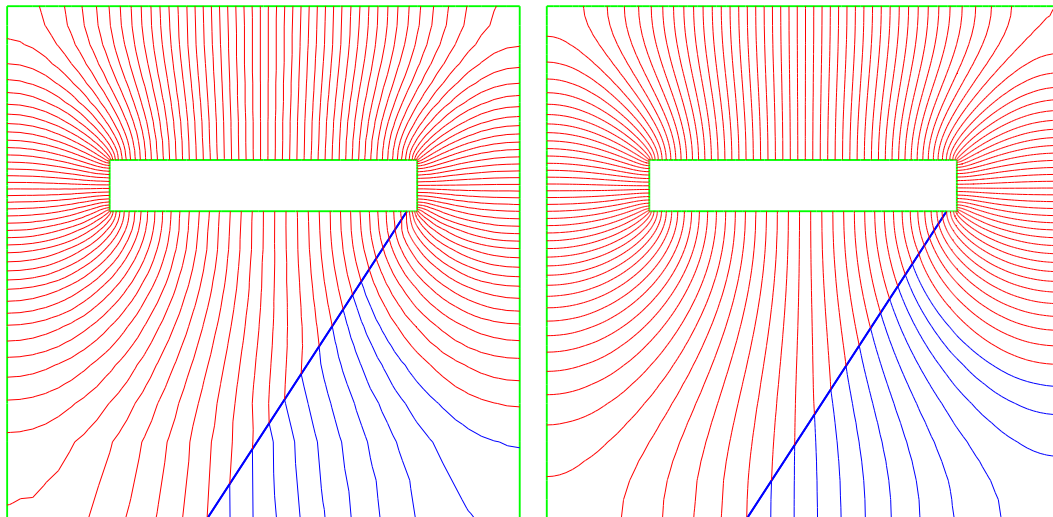
Metoda toleruje ustawienie powierzchni rozcięcia pod jeszcze ostrzejszym kątem do linii ekwipotencjalnych i przybliżenie jej w okolicy osobliwości (narożnik przewodnika) rys. 7.8. W miejscach takich znaczna koncentracja błędów dyskretyzacji może powodować jego rozprzestrzenianie się na pobliskie elementy zaburzając słabą postać zagadnienia, a w konsekwencji, do powstawania lokalnych ognisk zwiększonego błędów. Zjawisko to dotyczy metod elementów skończonych w ogóle i w literaturze zostało nazwane jako *zanieczyszczenia* (pollution) [6]. Efekt ten nieznacznie uwidocznił się po 10 kroku zagęszczania, ale samoistnie zniknął przy dalszym zagęszczaniu, co dobrze ilustruje rozkład potencjału po 16 kroku. Znacznie bardziej czytelną konsekwencją takiego ustawienia powierzchni rozcięcia jest pogorszenie zbieżności, co w tabeli 7.3 widać po wyraźnym wzroście liczby iteracji. Przejściowe zaburzenie w kroku 10 uwidoczniło się zwiększonym błędem prawdziwym ε_t .

Proponuje się następujące sposoby ograniczania powyższych zjawisk:

- umieszczanie powierzchni rozcięcia możliwie daleko od narożników i krawędzi ścianek przewodzących

krok	N	W_m	ε_{est} [%]	ε_t [%]	iteracje
0	22	0.0970227	17.0	29.13	9
1	53	0.0855363	9.6	13.84	7
2	109	0.0798254	4.6	6.24	10
3	193	0.0778404	2.8	3.60	3
4	242	0.0769959	1.9	2.47	4
5	392	0.0762938	1.2	1.54	9
6	513	0.0760042	0.91	1.15	10
7	731	0.0757020	0.61	0.75	5
8	988	0.0755496	0.45	0.55	7
9	1353	0.0754271	0.33	0.39	6
10	2078	0.0753267	0.22	0.25	5
11	2933	0.0752686	0.16	0.18	9
12	4026	0.0752317	0.11	0.13	4
13	5736	0.0752127	0.08	0.10	8
14	7450	0.0752233	0.06	0.11	5
15	9944	0.0752158	0.05	0.10	3
16	13252	0.0752079	0.04	0.09	7

Tabela 7.2: Przebieg zagęszczania siatki dla problemu z rys.7.8; N – liczba węzłów, W_m – energia magnetyczna, ε_{est} – błąd estymowany, ε_t – błąd prawdziwy względem W_{mt} .



Rysunek 7.9: Rozkład siatki i potencjału magnetycznego dla płaszczyzny rozcięcia dochodzącego blisko osobliwości w narożniku przewodnika – po 10 kroku adaptacyjnego zagęszczania (z lewej) pojawiły się zaburzenia wynikające z bliskości narożnika; poprawny rozkład potencjału po 16 kroku przedstawia rysunek z prawej strony.

krok	N	W_m	$\varepsilon_{\text{est}} [\%]$	$\varepsilon_t [\%]$	iteracje
0	22	0.0974560	15.00	29.70	9
1	48	0.0888658	9.20	18.27	10
2	105	0.0807709	4.70	7.50	12
3	142	0.0794409	3.60	5.73	13
4	259	0.0773147	2.10	2.90	26
5	342	0.0765975	1.50	1.94	13
6	475	0.0760757	0.99	1.25	18
7	643	0.0759424	0.78	1.07	20
8	881	0.0756341	0.55	0.66	21
9	1298	0.0754739	0.37	0.45	36
10	1620	0.0755522	0.32	0.55	22
11	2180	0.0753426	0.23	0.27	24
12	2884	0.0752837	0.17	0.20	20
13	3870	0.0755056	0.15	0.49	16
14	5014	0.0752406	0.10	0.14	34
15	6548	0.0752878	0.08	0.20	21
16	8773	0.0751911	0.06	0.07	16

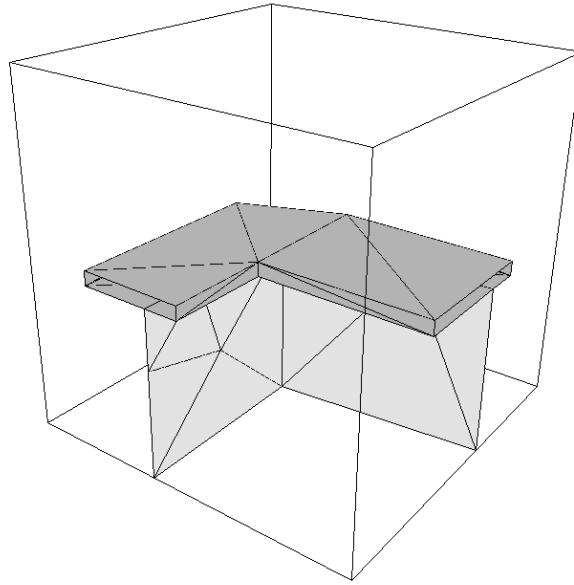
Tabela 7.3: Przebieg zagęszczania siatki dla problemu z rys.7.9; oznaczenia jak w tabeli 7.2.

- umieszczanie rozcięcia na powierzchniach możliwie zbliżonych do powierzchni ekwipotencjalnych
- poprawienie jakości elementów siatki – unikanie siatek o zbyt długich lub spłaszczonych elementach
- unikanie siatek początkowych zbyt rozrzedzonych, na których mogłyby pojawiać się ogniska dużego błędu aproksymacji
- otoczenie powierzchni rozcięcia w siatce początkowej warstwą elementów, oddzielającą od bezpośredniego wpływu błędów w okolicach osobliwości geometrii struktury

7.6.2 Przykład trójwymiarowy

Trójwymiarową analizę pola magnetycznego zilustrowano na przykładzie prostopadłego zagięcia paskowego ze ściętym narożnikiem, w jednorodnym ośrodku. Geometrię struktury wraz z powierzchnią rozcięcia przedstawia rysunek 7.10, gdzie naniesiono również początkową siatkę na uwidocznionych powierzchniach (dla zwiększenia czytelności rysunek przedstawia jedynie powierzchnie paska i płaszczyzn rozcięcia). Cała siatka jest bardzo rozrzedzona – 49 węzłów.

Rzut na powierzchnię paska, do której dochodzą płaszczyzny rozcięcia zawiera rysunek 7.11, który przedstawia siatkę oraz przebieg potencjału skalarnego po 5 kroku zagęszczania ($N = 8553$ węzłów, błąd estymowany $\varepsilon_{\text{est}} = 2.4\%$). Linie



Rysunek 7.10: Geometria zagięcia paskowego i powierzchni rozcięcia oraz część siatki początkowej

krok	N	W_m	ε_{est} [%]	ε_t [%]	iteracje
0	49	0.195317	45.0	77.3	11
1	145	0.150920	25.0	37.0	9
2	617	0.128585	12.0	16.7	13
3	1882	0.118287	6.2	7.4	13
4	3966	0.114869	3.8	4.3	22
5	8553	0.112829	2.4	2.4	13
6	17583	0.111923	1.6	1.6	35
7	36389	0.111022	0.99	0.79	22
8	72956	0.110732	0.65	0.53	32

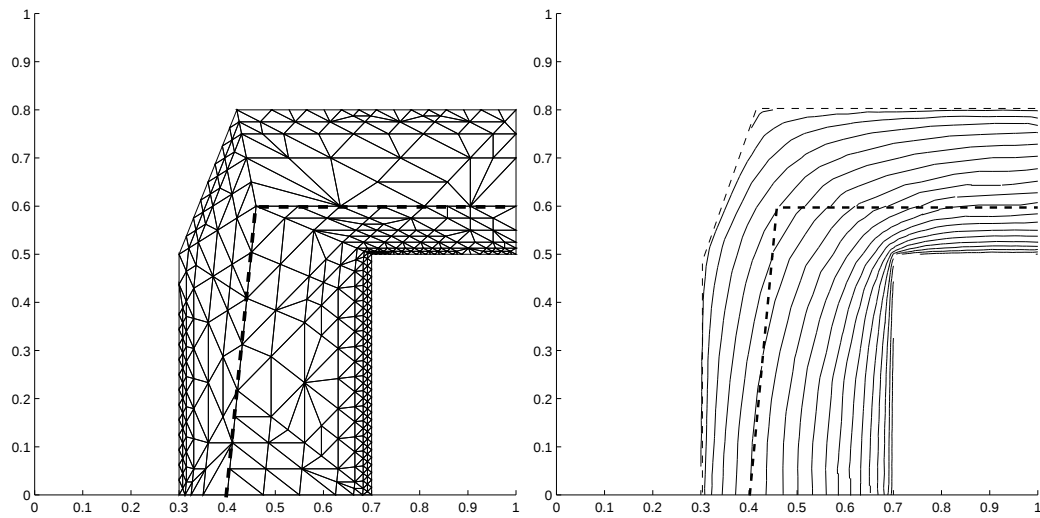
Tabela 7.4: Przebieg zagęszczania siatki dla problemu trójwymiarowego z rys.7.10; oznaczenia jak w tabeli 7.2.

ekwipotencjalne wyznaczają jednocześnie drogę przepływu prądu na uwidocznionej powierzchni paska. Większe zagęszczenie linii odpowiada większej gęstości prądu.

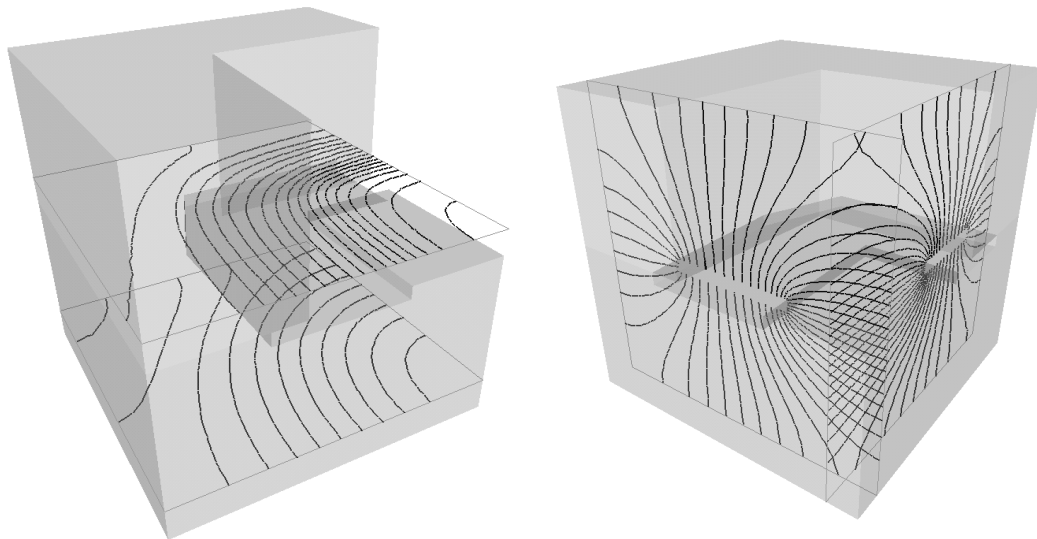
Rozkład potencjału po 8 krokach zagęszczania siatki ($N = 72956$ węzłów, błąd estymowany $\varepsilon_{\text{est}} 0.65\%$) uwidoczniiony na innych powierzchniach przekroju przedstawiono na rysunku 7.12. Struktura zobrazowana jest w postaci trzech różnych podobszarów dziedziny. Podobszar po jednej ze stron powierzchni rozcięcia usunięto dla poprawienia czytelności rysunku.

Widać, że również w analizie trójwymiarowej powierzchnia rozcięcia nie zaburza gładkiego przejścia linii ekwipotencjalnych, czyli ciągłości natężenia pola magnetycznego.

Analizowana struktura posiada symetrię względem płaszczyzny równoległej do



Rysunek 7.11: Siatka i linie ekwipotencjalne na dolnej powierzchni paska po 5 kroku zagęszczania; linia przerywana pokazuje przebieg powierzchni rozcięcia.



Rysunek 7.12: Linie ekwipotencjalne na różnych powierzchniach przekroju po 8 kroku zagęszczania. Widok jest zorientowany tak, że powierzchnia rozcięcia znajduje się nad paskiem.

paska, dzięki czemu możliwe było wykonanie obliczeń z warunkami Dirichleta w płaszczyźnie symetrii. Otrzymana w ten sposób unormowana energia pola magnetycznego $W_{mt} = 0.11015$ otrzymana z błędem estymowanym $\varepsilon_{est} = 0.30\%$ może służyć jako wynik odniesienia. Przebieg zagęszczania siatki przedstawia tabela 7.4. Estymowany błąd dyskretyzacji zestawiono z błędem ε_t względem wyniku odniesienia W_{mt} . Niewielkie różnice w obydwu rodzajach błędów jeszcze raz potwierdzają poprawność analizy pola magnetycznego z powierzchnią rozcięcia. Osobliwość macierzy nie przeszkadza metodzie gradientów sprzężonych w osiągnięciu zbieżności.

Rozdział 8

Implementacja metod wielosiatkowych

8.1 Procedury numeryczne

Do implementacji adaptacyjnych metod wielosiatkowych w analizie statycznej pola elektromagnetycznego wykorzystano pakiet procedur programu KASKADE [113]. Umożliwia on rozwiązywanie eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych z warunkami Dirichleta, Neumanna i Couchy’ego w przestrzeni jedno-, dwu- i trójwymiarowej przy użyciu następujących technik

- aproksymacja zagadnienia ciągłego za pomocą metody elementów skończonych z bazami węzłowymi dla funkcji skalarnej na siatce liniowych elementów trójkątnych i czworobocznych.
- adaptacyjne zagęszczanie siatki w oparciu o wybrane estymatory błędu dyskretyzacji oraz zarządzanie tak powstałą hierarchią zagnieżdżonych siatek, które umożliwia stosowanie algorytmów wielosiatkowych
- iteracyjne metody rozwiązywania układu równań liniowych powstałego po dyskretyzacji zagadnienia ciągłego – metody stacjonarne (Jacobięgo, Gaussa-Seidela, itp.) oraz niestacjonarne metody przestrzeni Kryłowa (CG, GMRES)
- podstawowy schemat wielosiatkowy (cykl V)
- prekondycjonowane odmiany metod niestacjonarnych

Procedury napisane są w języku C++ i tworzą strukturę obiektową, która daje dużą swobodę w kształtowaniu bardziej złożonych algorytmów wielosiatkowych, takich jak pełny cykl wielosiatkowy (FMG) oraz prekondycjonowanie wielosiatkowe.

Pakiet KASKADE rozszerzono o następujące procedury własne:

- importowanie siatek początkowych w formatach różnych generatorów siatek, w szczególności programu NETGEN

- kontrola zagęszczania siatki eliminująca błędy zagęszczania w pobliżu silnych osobliwości (np. bardzo cienkie paski przewodzące)
- wprowadzanie warunków brzegowych w postaci rozcięcia dziedziny, umożliwiające rozwiązywanie zagadnień magnetostatycznych dla potencjału skalarnego w strukturach pozbawionych symetrii
- ekstrapolacja Richardsona i korekcja błędem estymowanym dla poprawy dokładności dyskretyzacji

Program implementuje skalarne eliptyczne równanie różniczkowe cząstkowe o następującej postaci:

$$\begin{aligned} -\nabla(k\nabla u) + qu &= f \quad \text{w } \Omega \\ u &= u^D \quad \text{na } \Gamma^D \\ k \frac{\partial u}{\partial n} &= q_N \quad \text{na } \Gamma^N, \end{aligned} \tag{8.1}$$

gdzie Γ^D i Γ^N to fragmenty brzegu dziedziny $\partial\Omega$ z warunkami Dirichleta i Neumanna ($\Gamma^D \cup \Gamma^N = \partial\Omega$). Rzeczywiste współczynniki k i q mogą przyjmować dowolne wartości zależne od współrzędnych przestrzennych. W przypadku problemów elektro- i magnetostatycznych $q = 0$, co prowadzi do równania Poissona w dziedzinie o dowolnym rozkładzie wypełnienia $k = \varepsilon(x, y, z)$ lub $k = \mu(x, y, z)$. Dopuszczalne są nieciągłości w $k(x, y, z)$ pod warunkiem, że uskoki przenikalności leżą na granicach łączących elementy siatki. Możliwe jest proste rozwinięcie powyższej postaci równania różniczkowego dla anizotropii materiałów opisanych tensorem k_{ij} .

8.2 Testy wydajności metod wielosiatkowych

Na jakość rozwiązania uzyskanego adaptacyjnymi metodami wielosiatkowymi składa się dokładność dyskretyzacji zagadnienia ciągłego oraz dokładność rozwiązania samego problemu dyskretnego w postaci układu równań liniowych. Testy wydajności zostały więc przeprowadzone w dwóch głównych kategoriach

- efektywność schematów wielosiatkowych w rozwiązywaniu układów równań liniowych otrzymanych po dyskretyzacji problemu ciągłego
- efektywność adaptacyjnej dyskretyzacji problemu ciągłego.

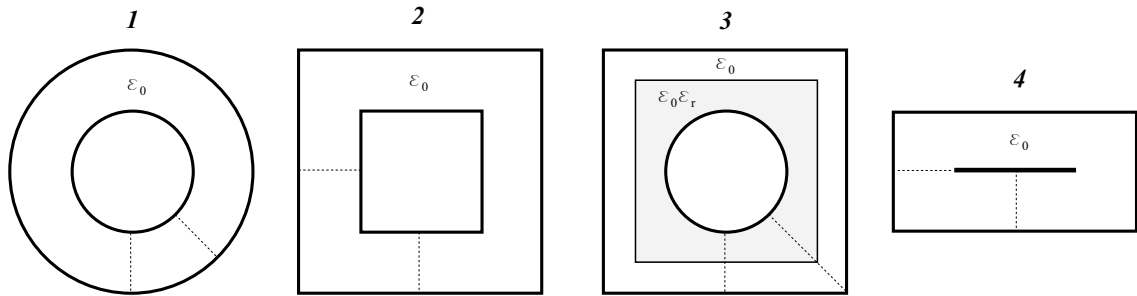
Analizowano następujące zagadnienia:

- elektrostatyczne 2D – przekrój poprzeczny przewodnic
- elektrostatyczne 3D
- magnetostatyczne 3D.

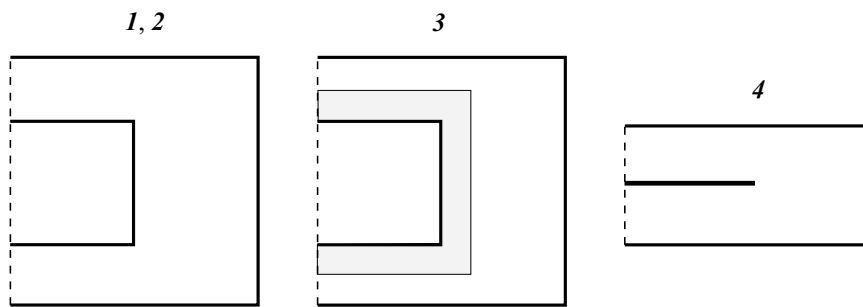
Pominięto analizę magnetostatyczną 2D, ponieważ do określenia parametrów przewodnic, w najczęstszym przypadku (wypełnienie dielektryczne) wystarcza analiza pola elektrycznego.

Do testów wybrano struktury o zróżnicowanym charakterze rozkładu pola. Oparte są na następujących przewodnicach (rys. 8.1)

1. cylindryczna linia współosiowa — brak osobliwości, równomierny rozkład pola
2. kwadratowa linia współosiowa — umiarkowane osobliwości na narożnikach przewodu wewnętrznego
3. kwadratowo-cylindryczna linia współosiowa z niejednorodnym wypełnieniem $\varepsilon_r = 25$ — nieciągłość pola na granicy dielektryk–powietrze
4. linia paskowa (pasek zerowej grubości) — silne osobliwości na krawędziach paska.

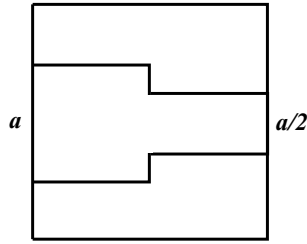


Rysunek 8.1: Przekroje poprzeczne przewodnic testowych. Szerokość przewodu wewnętrznego – a , szerokość przewodu zewnętrznego – $2a$, szerokość dielektryka ε_r – $1.5a$. Dzięki symetrii analiza prowadzona jest w 1/4 struktury nr 2,4 i w 1/8 struktury nr 1,3 (wycinki pomiędzy przerywanymi liniami).



Rysunek 8.2: Przekroje podłużne linii dla testów elektrostatycznych 3D (przekroje poprzeczne o numerach umieszczonych nad rysunkami przedstawia rys.8.1). Linia przerywana – ścianka magnetyczna (rozwarcie linii).

W testach 3D wykorzystywano linie o długości $2a$ i takich samych przekrojach poprzecznych jak w testach 2D. Numery testów 3D odpowiadają numerom przekrojów testowych 2D. Dla problemów elektrostatycznych analizowano linie rozwarte



Rysunek 8.3: Przekrój podłużny linii (uskok szerokości) dla wszystkich testów magnetostatycznych 3D (przekroje poprzeczne przedstawia rys.8.1).

– przewody zewnętrzne są zamknięte płaszczyzną przewodzącą (ścianka elektryczna) po jednej stronie, a przewody wewnętrzne są rozwarte w połowie długości linii (rys. 8.2). Po stronie pobudzenia linia jest rozwarta, czyli zamknięta ścianką magnetyczną. W problemach magnetostatycznych analizowano uskok wymiarów przewodu wewnętrznego – w połowie długości średnica lub szerokość przewodu maleje z a do $\frac{a}{2}$ (rys. 8.3). Linia z obu końców zwarta jest płaszczyzną przewodzącą.

8.2.1 Rozwiązanie układu równań liniowych

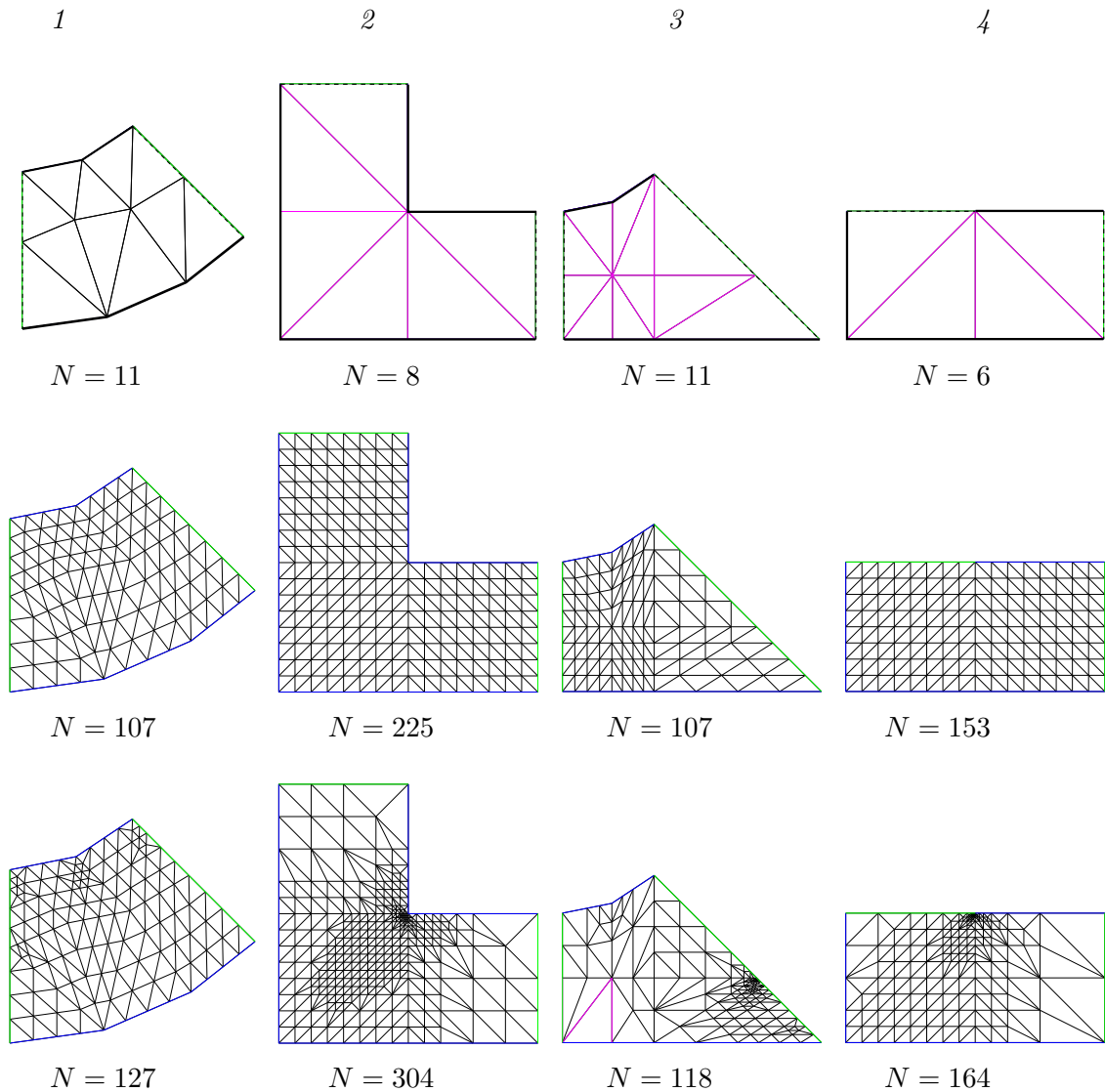
Powszechnie przyjmowaną miarą zbieżności iteracyjnego rozwiązywania układu równań liniowych $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ jest względny błąd residualny

$$\eta = \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|},$$

gdzie $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{u}}$, a $\tilde{\mathbf{u}}$ jest przybliżonym rozwiązaniem uzyskanym w bieżącej iteracji.

W pierwszej kolejności dokonano porównania zbieżności wybranych jednosiatkowych metod iteracyjnych (Jacobiego z wagą $\omega = 2/3$, Gaussa–Seidela – GS, gradientów sprzężonych – CG, metody CG prekondycjonowanej iteracjami GS – PCG-GS), w oparciu o które można budować algorytmy wielosiatkowe. Na przykładzie problemu elektrostatycznego o równomiernym rozkładzie rozwiązania (struktura nr 1) przedstawiono zależność profilu zbieżności (η w funkcji liczby iteracji) od gęstości siatki mierzonej liczbą węzłów N (rys. 8.5). Testy potwierdziły wygładzające właściwości stacjonarnych metod iteracyjnych polegające na dobrej zbieżności tylko dla siatek rozrzedzonych (małe N) lub w początkowych krokach iteracji. Metoda CG oferuje znaczną poprawę zbieżności dla gęstych siatek, ale dopiero po pewnej liczbie iteracji początkowych, w trakcie których profil zbieżności jest bardzo zbliżony do metod stacjonarnych. CG wykazuje wtedy właściwości wygładzające, które pozwalają na jej stosowanie w algorytmach wielosiatkowych w takim samym charakterze jak metody Jacobiego czy GS. Dalszą, choć umiarkowaną poprawę przynosi dodanie do CG prekondycjonera GS.

Profile zbieżności większej liczby metod, w tym metod wielosiatkowych, dla problemów elektrostatycznych 2D na gęstej siatce w różnych strukturach testowych zestawiono na rysunkach 8.6 (siatki równomierne) i 8.7 (siatki uzyskane przez zagęszczanie adaptacyjne). Analizując zbieżność metod wielosiatkowych trudno odnosić się

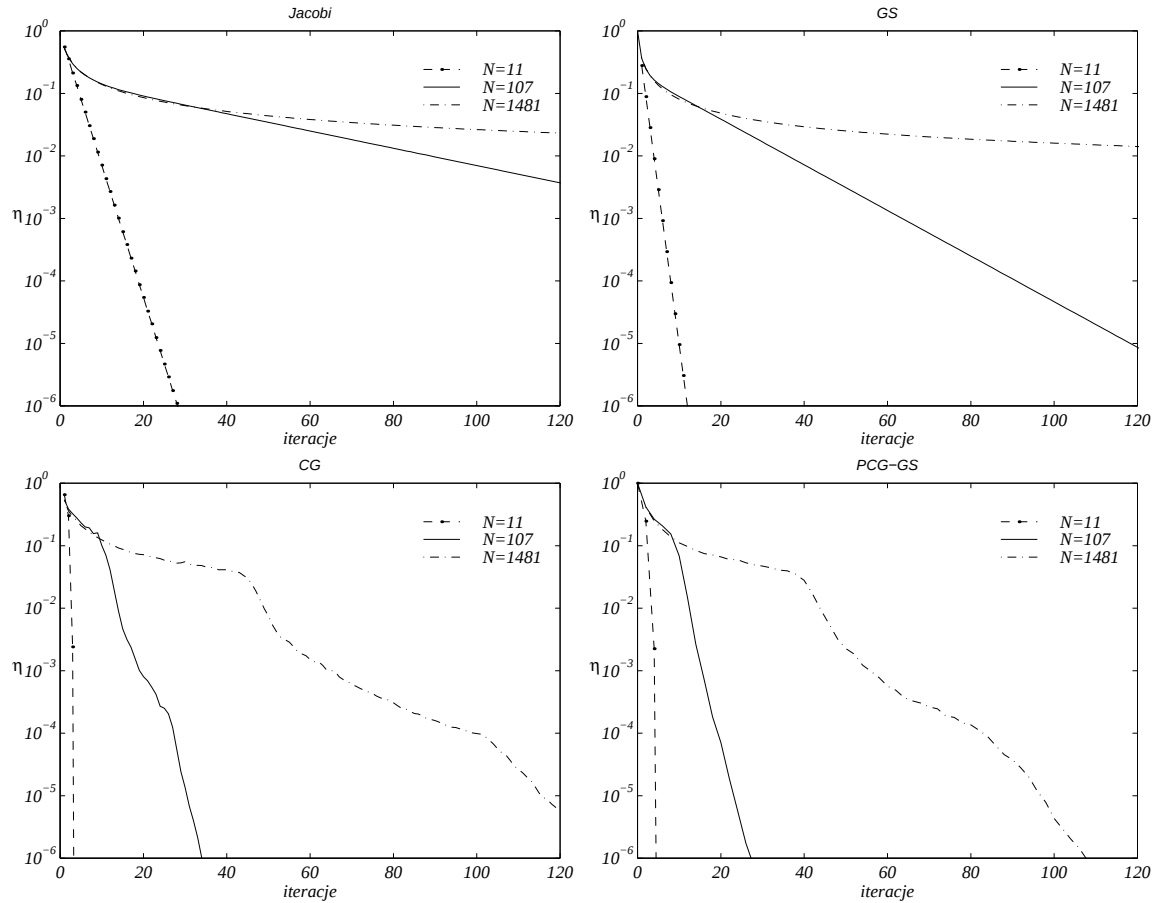


Rysunek 8.4: Porównanie siatek zagęszczonych równomiernie (w środku) i adaptacyjnie (na dole) dla problemów elektrostatycznych 2D, uzyskanych z tych samych siatek początkowych (na górze; linie pogrubione – warunki brzegowe Dirichleta, linie przerywane – warunki Neumanna).

do liczby iteracji jako kosztu rozwiązania. Nie można przyjmować sumy iteracji na wszystkich poziomach cyklu wielosiatkowego, gdyż wydatek na ich wykonanie nie jest stały i zmienia się zależnie od poziomu rozrzedzenia siatki. Jeśli przyjąć za jedną iterację cały cykl V, to koszt takiej jednostki będzie znacznie zawyżony w stosunku do metod jednosiatkowych. Z tego powodu, jako uniwersalną miarę kosztu rozwiązania przyjęto czas. Obliczenia prowadzono na komputerze PC Pentium III 760MHz 256MB RAM.

Poszczególne zagadnienia testowe oznaczono numerem struktury oraz literą U dla siatki równomiernej i A dla siatki adaptacyjnej. Testowane metody oznaczono jako *Jac* (ważona metoda Jacobiego, $\omega = 2/3$), *GS*, *CG*, *PCG-xx* (*xx* to symbol

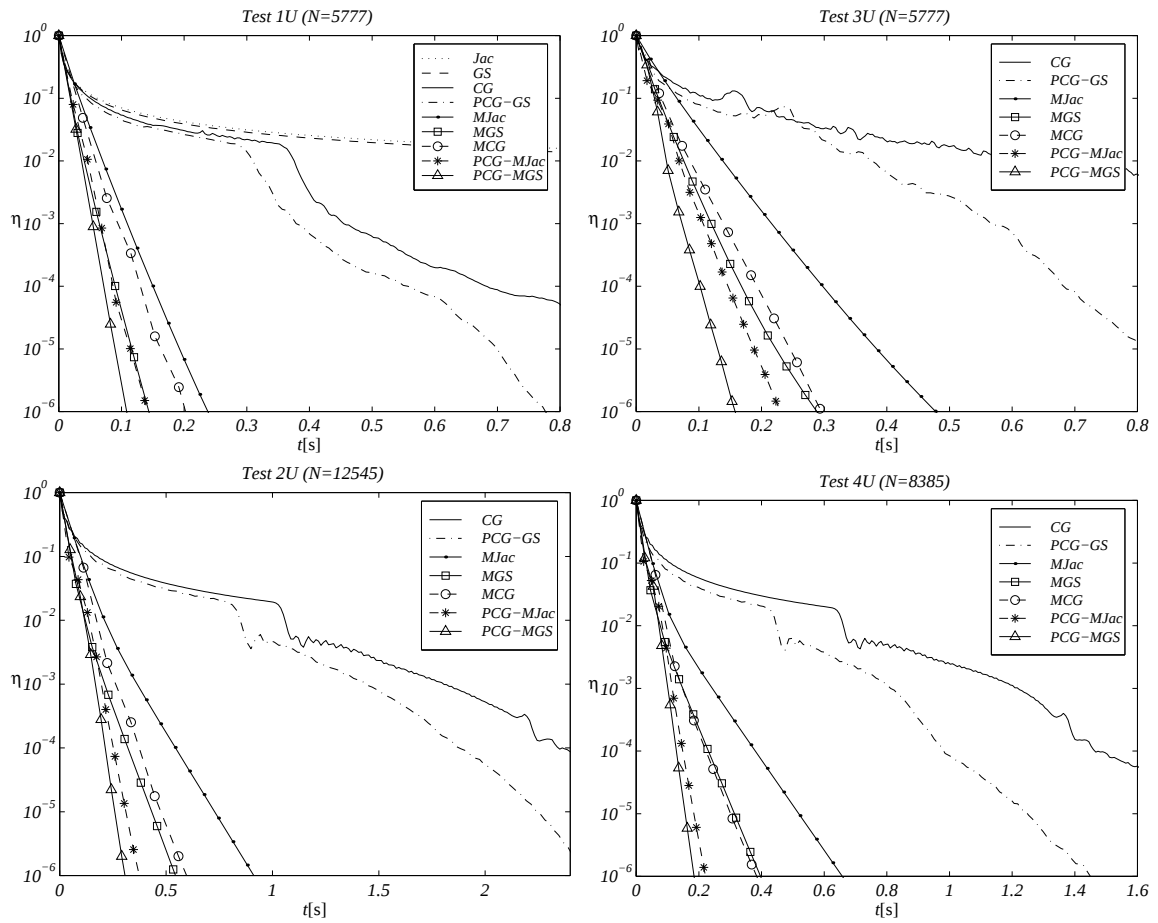
prekondycjonera dla metody CG), *Myy* (metoda wielosiatkowa o wielu cyklach V z iteracjami yy). Na przykład, *MGS* oznacza metodę wielosiatkową z iteracjami Gaussa-Seidela, a *PCG-MJac* to metoda gradientów sprzężonych z wielosiatkowym prekondycjonowaniem opartym na metodzie Jacobiego.



Rysunek 8.5: Profil zbieżności rozwiązywania układu równań dla metod jednosiatkowych – błąd względny η w funkcji liczby iteracji – problem elektrostatyczny 2D, struktura nr 1, siatka początkowa (liczba węzłów $N = 11$) zagęszczona równomiernie ($N = 107, 1481$). W metodzie PCG-GS liczone są iteracje CG i prekondycjonera GS

Podstawowe wnioski płynące z powyższych testów są następujące

- wszystkie metody wielosiatkowe znacznie przewyższają metody CG i PCG-GS na równomiernej siatce i są mało wrażliwe na niejednorodności samego rozkładu rozwiązania
- metody CG z prekondycjonowaniem wielosiatkowym (PCG-MJac, PCG-MGS) mają najlepszą zbieżność niezależnie od rodzaju siatki i rozkładu rozwiązania
- na nierównomiernej siatce adaptacyjnej o koncentracji węzłów w pobliżu wypukłych narożników brzegu proste metody wielosiatkowe (MJac, MGS, MCG)

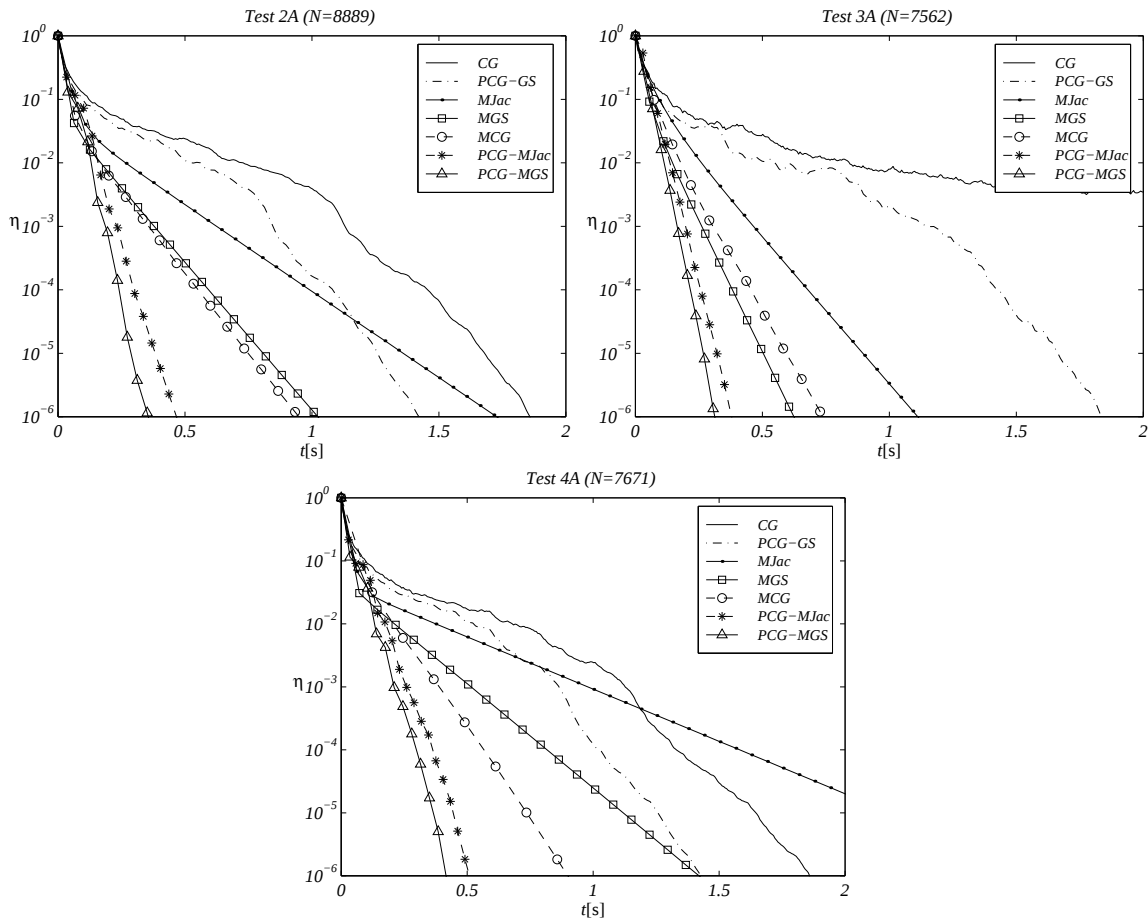


Rysunek 8.6: Profil zbieżności rozwiązywania układu równań – błąd względny η w funkcji czasu – dla różnych metod jedno- i wielosiatkowych na gęstej siatce równomiernej o dużej liczbie węzłów.

ulegają wyraźnemu spowolnieniu; w przypadku najsilniejszych osobliwości (test 4A) tylko MJac i MGS nie są lepsze od CG i PCG-GS

- nierównomierność siatki nie związana z geometrią warunków brzegowych Dirichleta (test 3A) tylko nieznacznie spowalnia proste metody wielosiatkowe, zachowując ich wyraźną przewagę nad metodami jednosiatkowymi

Na koniec porównano czas rozwiązywania układu równań różnymi metodami w funkcji liczby węzłów siatki. Iteracje przerywane są gdy $\eta < 10^{-6}$. Wprowadzono dwa warianty schematów wielosiatkowych – cykl V i FMG. W dotychczasowych testach metody wielosiatkowe występowały tylko jako cykle V, co oznaczało, że analizowano czas rozwiązania problemu tylko na najgęstszej docelowej siatce, niezależnie procedury zagęszczania tworzącej kompletną hierarchię siatek. Inaczej jest w pełnym schemacie wielosiatkowym FMG. Rozpoczynając od najrzadszej siatki, rozwiązanie uzyskane na bieżącym poziomie służy nie tylko do adaptacyjnej generacji następnej, gęstszej siatki, lecz również jako początkowe przybliżenie dla iteracji na wyższym poziomie. Rozwiązanie na docelowej siatce zostanie przyspieszone, lecz

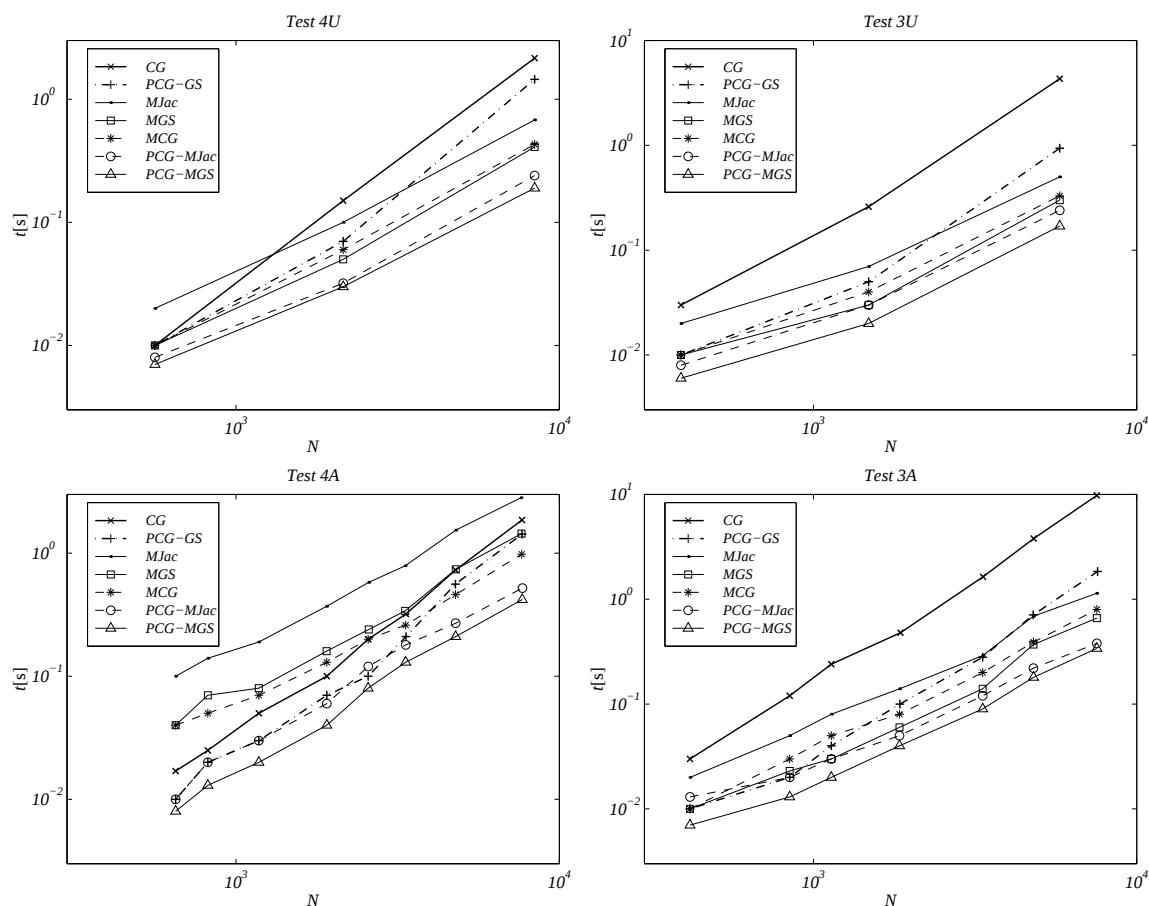


Rysunek 8.7: Profil zbieżności rozwiązywania układu równań – błąd względny η w funkcji czasu – dla różnych metod jedno- i wielosiatkowych na gęstej siatce nierównomiernej (zagęszczanie adaptacyjne) o dużej liczbie węzłów. Dla struktury nr 1 siatki adaptacyjna i równomierna są jednakowe, dlatego test 1A dałby wynik identyczny z 1U (rys. 8.6)

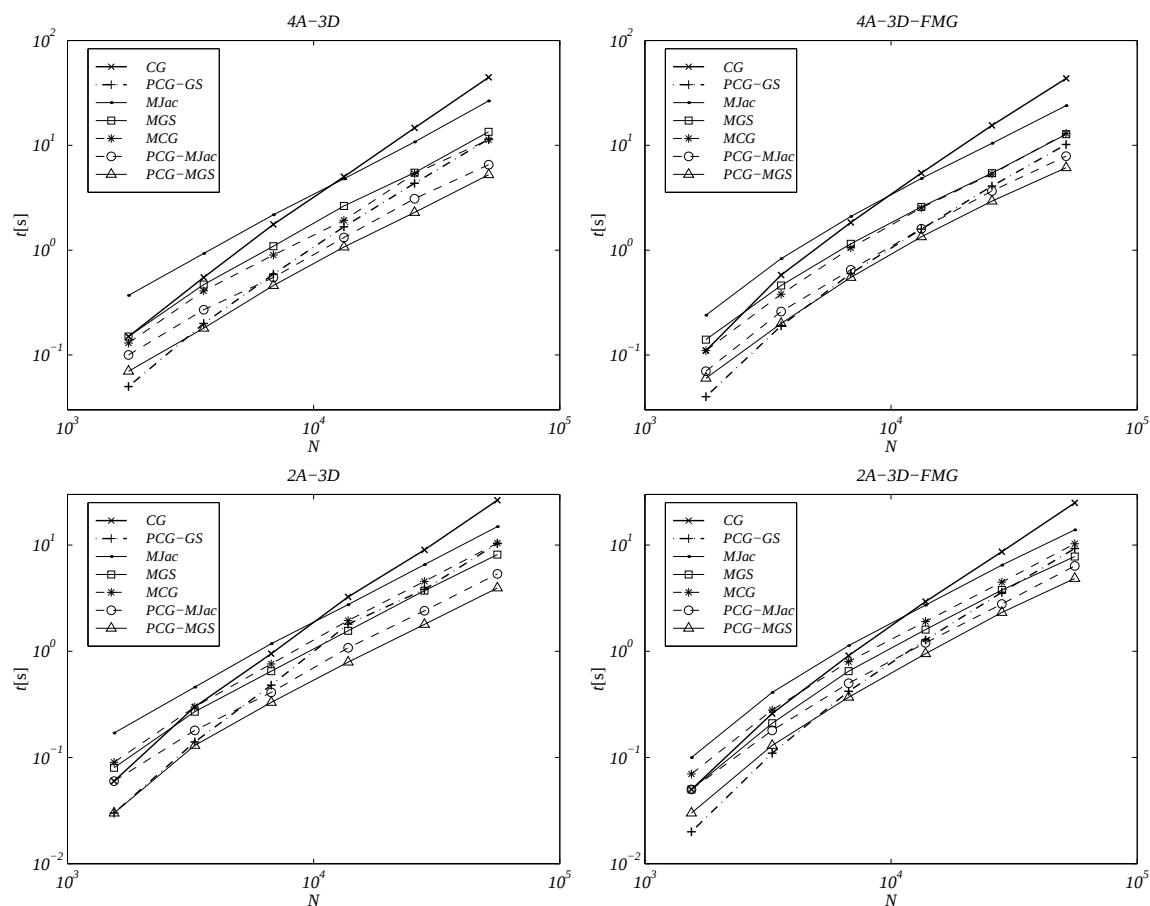
należy wtedy brać pod uwagę skumulowany czas rozwiązywania układów równań na wszystkich siatkach, od najrzadszej do najgęstszej. W przypadku metod jedno-siatkowych kategorie cykl V i FMG mają znaczenie umowne i nie są schematami wielosiatkowymi w ścisłym tego rozumieniu. Cykl V oznacza niezależne rozwiązanie na najgęstszej siatce, FMG – kaskadę rozwiązań na zagęszczających się siatkach zachowującą przenoszenie wektorów rozwiązań na kolejne poziomy oraz skumulowane zliczanie czasu.

Wyniki dla problemów elektrostatycznych 2D w strukturach 3 i 4 na siatce równomiernej i adaptacyjnej przedstawia rysunek 8.8. Wykresy te potwierdzają wcześniejsze spostrzeżenia, a dodatkowo pokazują wolniejsze narastanie czasu w funkcji liczby niewiadomych wszystkich metod wielosiatkowych w stosunku do jednosiatkowych metod CG i PCG-GS.

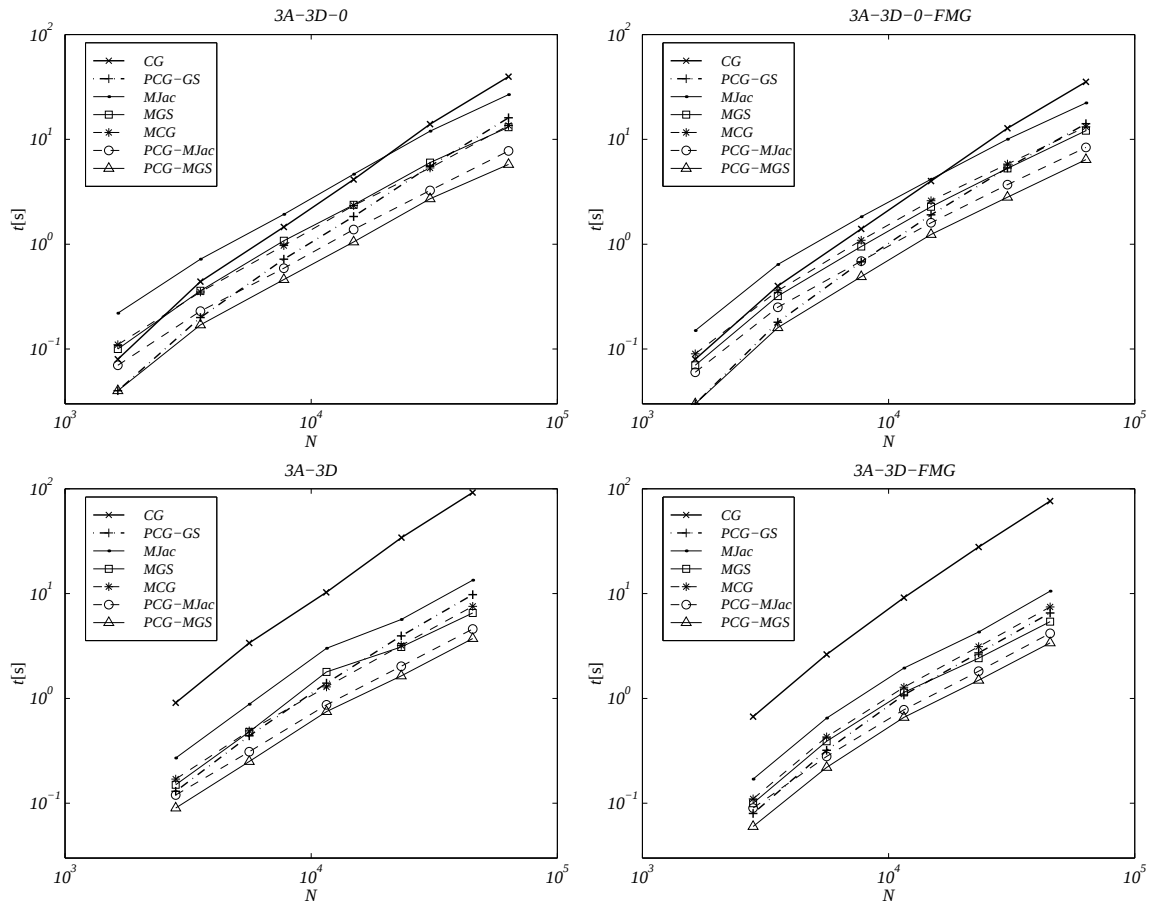
Kolejne wykresy (rys. 8.9–8.10) przedstawiają wyniki testów elektrostatycznych 3D w dwóch wariantach – cykl V i FMG. Podobnie jak w przypadku 2D, nachy-



Rysunek 8.8: Czas rozwiązywania układu równań w funkcji liczby węzłów – problem elektrostatyczny 2D, zagęszczanie równomierne (u góry) i adaptacyjne (na dole), cykl V; testy 4 i 3



Rysunek 8.9: Czas rozwiązywania układu równań w funkcji liczby węzłów – problem elektrostatyczny 3D, zagęszczanie adaptacyjne, cykl V i FMG (czas skumulowany); od góry – test 4 i 2

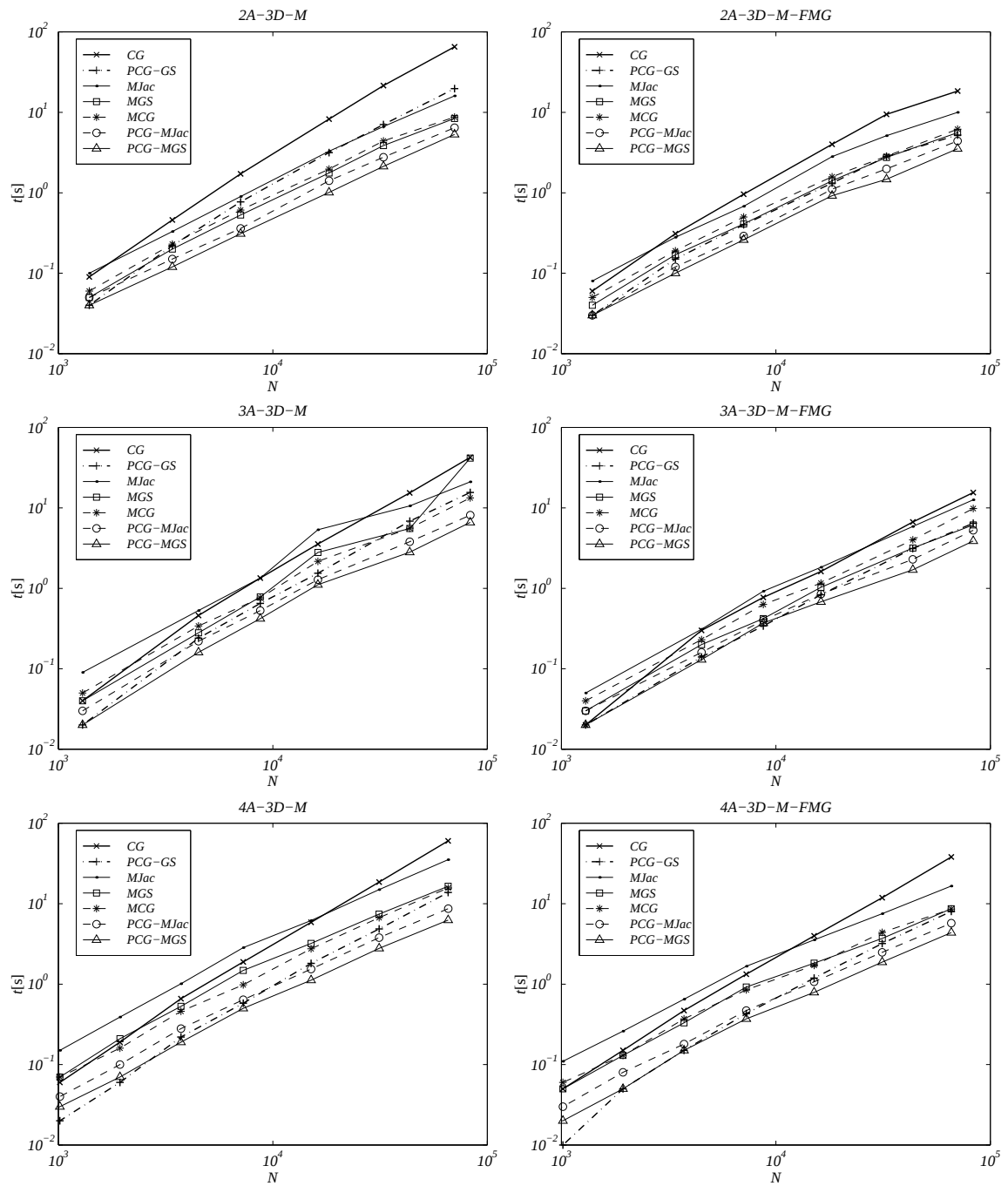


Rysunek 8.10: Czas rozwiązywania układu równań w funkcji liczby węzłów – problem elektrostatyczny 3D, zagęszczanie adaptacyjne, cykl V i FMG (czas skumulowany); test 3 przy $\varepsilon_r = 1$ (u góry) i $\varepsilon_r = 25$ (na dole)

lenie zależności czasu od liczby węzłów jest wyraźnie korzystniejsze w metodach wielosiatkowych i maleje wraz ze wzrostem N . Sprawia, to iż metody wielosiatkowe (zarówno proste jak i preconditioning wielosiatkowy) szczególnie nadają się do wielkich problemów z gęstymi siatkami.

W testach magnetostatycznych 3D pominięto strukturę nr 1 (cylindryczna linia współosiowa), gdyż daje ona rozkład pola bardzo zbliżony do struktury nr 3 (linia cylindryczna o kwadratowym przewodzie zewnętrznym z niejednorodnym wypełnieniem dielektrycznym, które nie wprowadza niejednorodności ośrodka dla pola magnetycznego).

Celem testów z polem magnetostatycznym jest zbadanie efektywności metod rozwiązywania układu równań dla problemów z rozkładem potencjału specyficznym dla pola magnetycznego, czyli z warunkami Neumanna na powierzchniach przewodzących. Celowo wybrano struktury posiadające symetrię, tak aby uniknąć osobliwości macierzy i nie odrzucać z testów prostych metod iteracyjnych (Jacobiego, Gaussa-Seidela), które źle radzą sobie z takim układem równań. Symetria struktury pozwala bowiem wprowadzić warunki Dirichleta dla skalarne go potencjału magnetycznego. Wyniki przedstawiają zależność czasu od liczby węzłów siatki – rys. 8.11. Potwierdzają one dotychczasowe spostrzeżenia dotyczące przewagi metod wielosiatkowych, szczególnie dla problemów z dużą liczbą niewiadomych. Nową właściwością jest dobra zbieżność metody z PCG-GS (preconditioning jednosiatkowych), która dorównuje i czasami przewyższa proste metody wielosiatkowe (MJac i MGS). Nadal jednak najszybszą metodą jest PCG-MGS oparta na preconditioningu wielosiatkowym. Innym ważnym wnioskiem jest przewaga schematu FMG na cyklem V, mimo zliczania w tym pierwszym czasie skumulowanego. Oznacza, to iż wymagające schematu FMG adaptacyjne zagęszczanie siatki może odbywać się bez ponoszenia dodatkowego kosztu związanego z rozwiązywaniem układu równań.



Rysunek 8.11: Czas rozwiązywania układu równań w funkcji liczby węzłów – problem magnetyczny 3D, zagęszczanie adaptacyjne, cykl V i FMG (czas skumulowany); od góry – test 2, 3, 4

8.2.2 Dokładność dyskretyzacji

Z testów przeprowadzonych w poprzednim podrozdziale wynika, że ze względu na szybkość rozwiązywania układu równań wskazane jest schemat FMG. Sprzyja to budowaniu hierarchii siatek od dołu, czyli poprzez sukcesywne zagęszczanie siatek, począwszy od najrzadszej. Rozważane będą dwa schematy zagęszczania – równomierny i adaptacyjny. Pierwszy z nich jest prosty i tani numerycznie lecz nie zapewnia efektywnego rozkładu punktów dyskretyzacji. Schemat adaptacyjny wymaga pewnego wysiłku numerycznego związanego głównie z estymacją błędu dyskretyzacji, lecz pozwala zbudować siatkę optymalną, czyli taką, która przy założonym błędzie wymaga minimalnej liczby węzłów. Koszt adaptacyjnego zagęszczania może się jednak zwrócić, jeżeli błąd estymowany zostanie wykorzystany powtórnie, czyli do ekstrapolacji rozwiązania technikami przedstawionymi w rozdziale 5. W testach zastosowano estymację błędu opartą na lokalnych problemach o aproksymacji kwadratowej (patrz podrozdział 3.3).

Dla wszystkich przedstawionych wcześniej problemów testowych zbadano profile zbieżności zagęszczania dyskretyzacji, czyli zależność względnego błędu estymowanego ε_{est} od narastającej liczby węzłów siatki N i czasu (rys. 8.14–8.16). Tam gdzie znane jest rozwiązanie dokładne, błąd estymowany zestawiono z błędem prawdziwym ε_t . Do rozwiązywania układu równań problemu zdyskretyzowanego zastosowano najlepszą z testowanych wcześniej metod – PCG-MGS (gradienty sprzężone z prekondycjonowaniem wielosiatkowym GS).

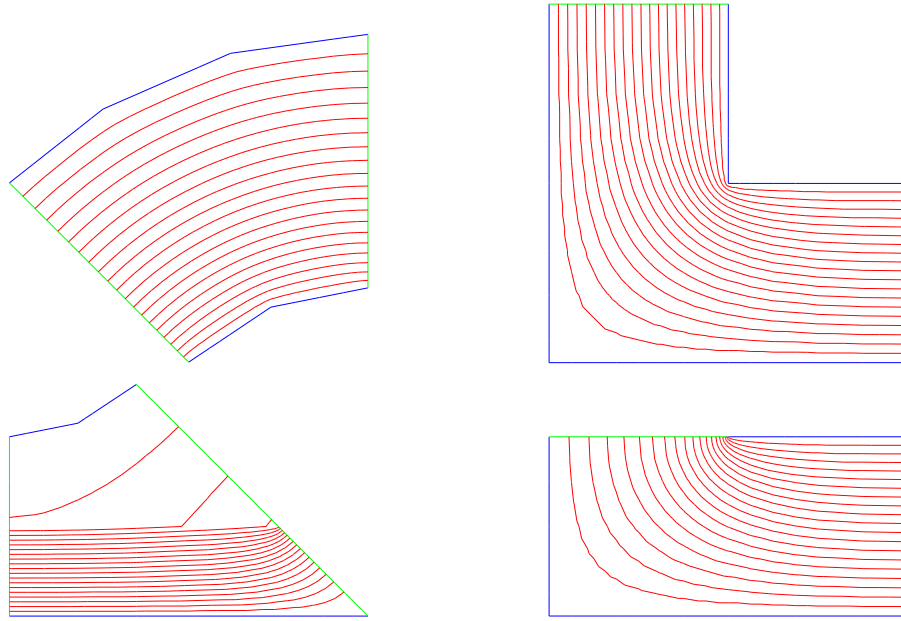
Dla problemów elektrostatycznych 2D siatki początkowe oraz zagęszczone równomiernie i adaptacyjnie po kilku początkowych krokach przedstawia rysunek 8.4. Na rysunku. 8.12 przedstawiono dodatkowo rozkład pola w postaci linii ekwipotencyjnych na siatce adaptacyjnej.

W cylindrycznej linii współosiowej, ze względu na równomierny rozkład pola, zagęszczanie adaptacyjne i równomierne dają praktycznie taką samą siatkę. Uzyskanie dobrej aproksymacji tego typu problemu ciągłego, to znaczy z zakrzywionymi brzegami, wymaga dodatkowo adaptacyjnego doprecyzowania przebiegu brzegów (rys. 8.13). W tabeli 8.1 przedstawiono stopień poprawy dokładności unormowanej pojemności zastępczej $C_n = C_1/\varepsilon_0$, względem rozwiązania analitycznego $C_t = 9.064720$, uzyskany dzięki adaptacyjnemu zakrzywianiu brzegu. W przypadku brzegu przybliżonego linią łamaną błąd samego zdefiniowania geometrii zagadnienia o dwa rzędy wielkości przewyższa błąd dyskretyzacji. Zagęszczanie siatki do tak małej wartości ε_{est} nie ma w tym przypadku sensu.

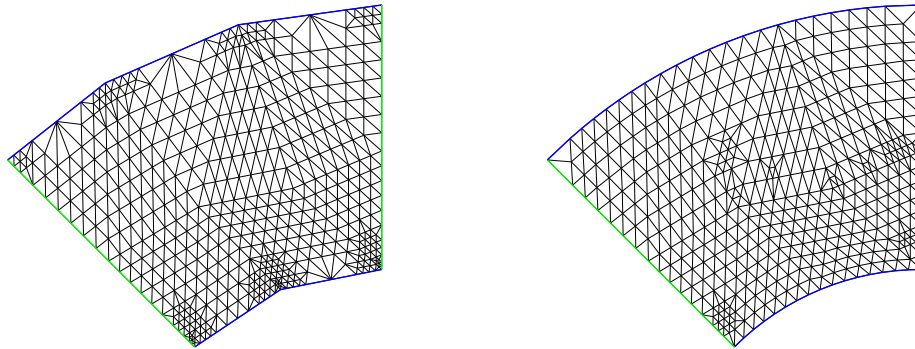
brzeg	C_t	C_n	N (węzły)	ε_{est}	ε_t
łamany	9.06472	8.983328	1844	0.009%	0.90%
adaptacyjny	9.06472	9.065024	1480	0.008%	0.003%

Tabela 8.1: Efekt adaptacyjnego doprecyzowania zakrzywionego brzegu w cylindrycznej linii współosiowej

Należy zwrócić uwagę na skuteczność adaptacyjnego zagęszczania siatki w oko-



Rysunek 8.12: Linie ekwipotencjalne (elektryczne) na siatce adaptacyjnej dającej $\varepsilon_{\text{est}} < 0.1\%$.



Rysunek 8.13: Porównanie siatek adaptacyjnych dla brzegu łamanego ($N = 501$) i adaptacyjnie zakrzywionego ($N = 434$).

licach narożników i krawędzi przewodów sygnałowych linii nr 3 i 4. Efektem jest bardzo dobra dokładność osiągnięta przy stosunkowo małej liczbie węzłów siatki, bowiem obszary odległe od tych załamań pozostają stosunkowo mocno rozrzedzone. Obliczoną za pomocą adaptacyjnej metody wielosiatkowej wartość unormowanej pojemności zastępczej linii $C_n = C_1/\varepsilon_0$ zestawiono w tabeli 8.2 z wartością dokładną C_t uzyskaną metodą odwzorowań konforemnych zaczerpniętą z [109].

O ile pewne, choć nieoptymalne, dogęszczenie siatki w okolicach narożników brzegu mogą zapewnić niektóre generatory siatek, to koncentracja węzłów w pobliżu narożnika niejednorodnego wypełnienia dielektrycznego w strukturze nr 3 wymaga już adaptacyjnego algorytmu zagęszczania. Wartość unormowanej pojemności linii uzyskaną w metodzie wielosiatkowej porównano z wynikiem uzyskanym w [109] z

prowadnica	C_t	C_n	N (węzły)	ε_{est}	ε_t
kwadratowa (nr 2)	10.234	10.242	837	0.09%	0.08%
paskowa (nr 4)	5.8769	5.8812	1419	0.09%	0.07%

Tabela 8.2: Porównanie wyników adaptacyjnej metody wielosiatkowej z wartościami dokładnymi C_t

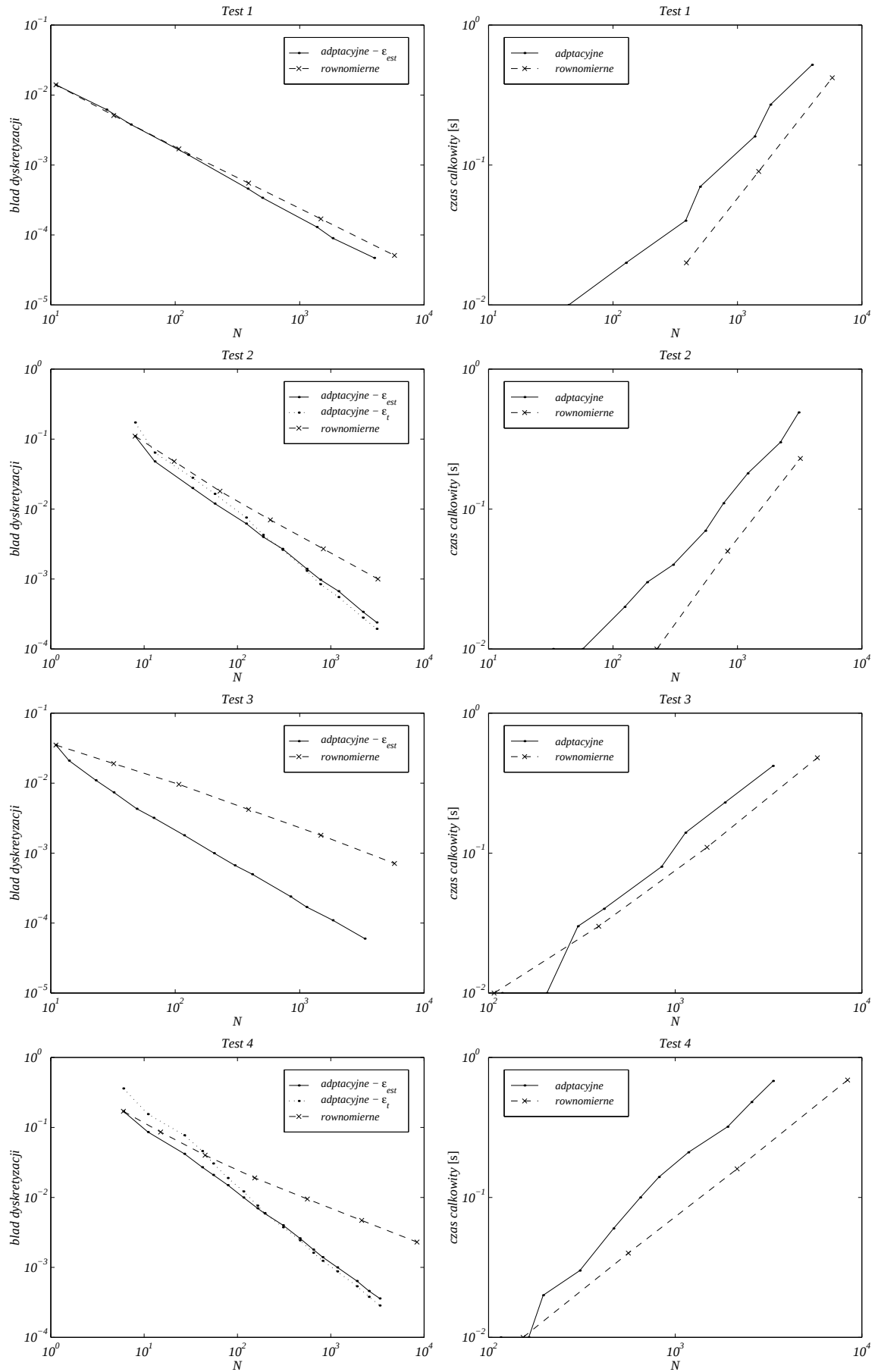
metoda	C_n	N	ε_{est}	czas całkowity [s]
MG	23.8160	67	0.30%	0.40
	23.7728	118	0.18%	0.60
AFE	23.7798	75		9.66

Tabela 8.3: Porównanie wyników adaptacyjnej metody wielosiatkowej (MG) z adaptacyjną metodą elementów skończonych (AFE); czasy obliczeń podano dla PC486 z 20MB pamięci oraz zegarem 50MHz (AFE) i 66MHz (MG) – obejmują one całkowity koszt numeryczny, zagęszczania siatki i rozwiązania układu równań

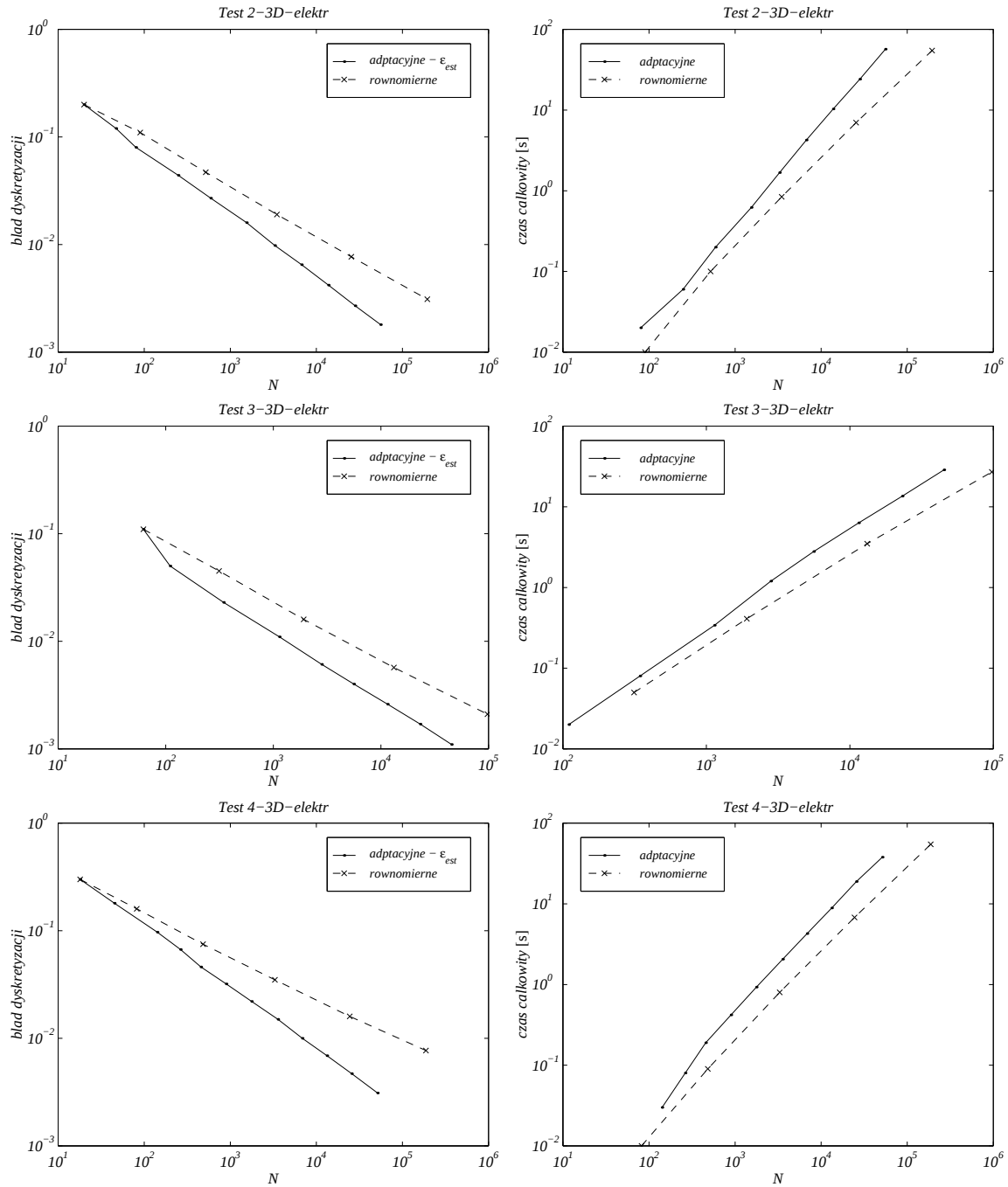
adaptacyjnej metody elementów skończonych (AFE) – tabela 8.3. Metoda ta mimo wbudowanego algorytmu adaptacyjnego zagęszczania siatki nie jest wielosiatkowa, gdyż nie wykonuje charakterystycznej korekcji na zgrubej siatce. W efekcie różnica w szybkości obliczeń jest bardzo duża – nawet przy większej liczbie węzłów metoda wielosiatkowa jest około 12 razy (!) szybsza (uwzględniając różnice zegarów).

Podstawowe wnioski płynące z analizy przebiegu zagęszczania siatek są następujące.

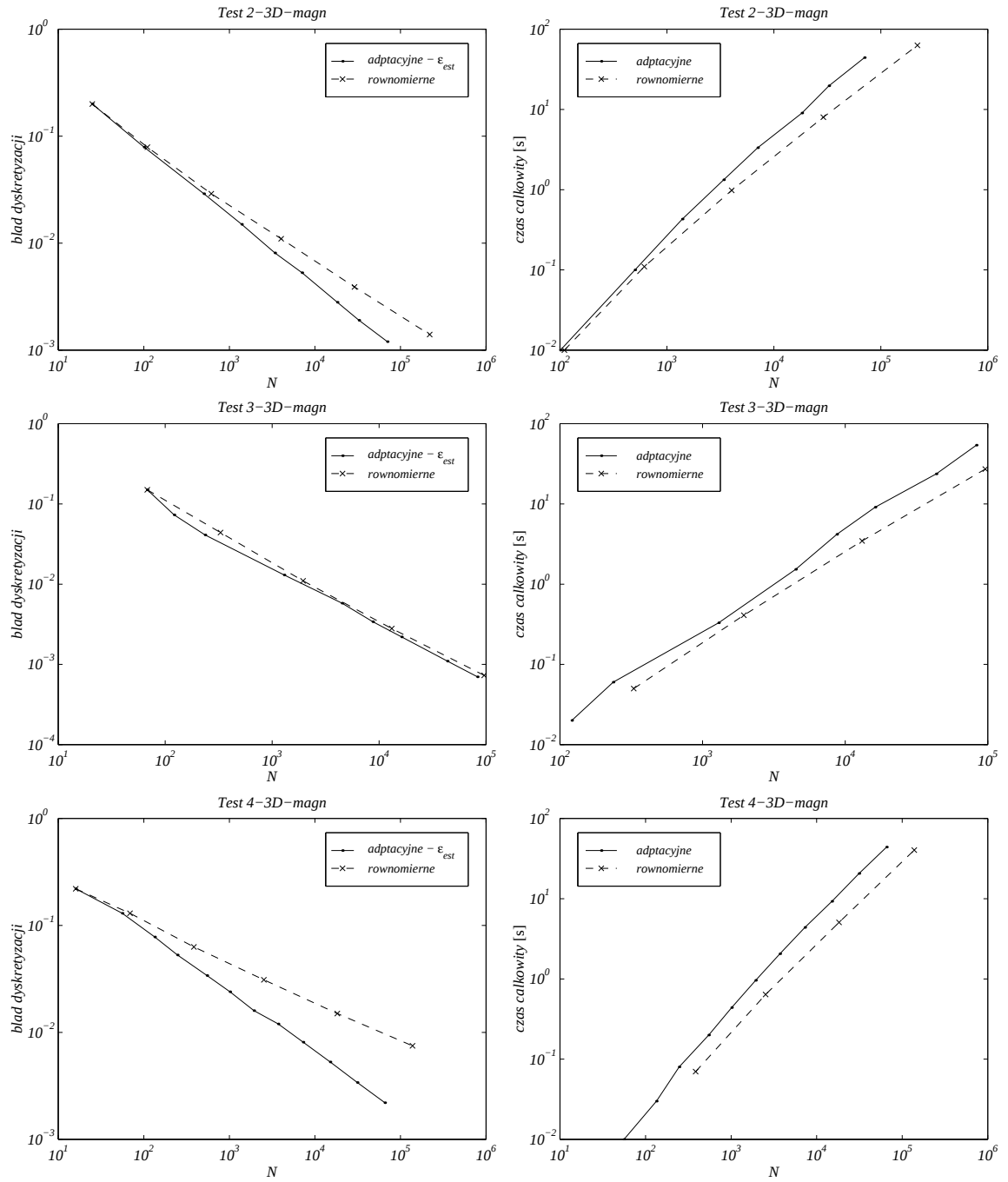
- Adaptacyjne, w porównaniu z równomiernym, zagęszczanie siatki daje wyraźnie lepszą zbieżność dyskretyzacji (w funkcji liczby węzłów) wszędzie za wyjątkiem struktur o znacznej jednorodności rozkładu pola
- Oszczędność czasu przy zagęszczaniu równomiernym kompensuje gorsze nachylenie redukcji błędu $\varepsilon_{\text{est}}(N)$ tylko w kilku początkowych krokach zagęszczania. Później, dla dużej liczby węzłów algorytm adaptacyjny przeważa również pod względem szybkości redukcji błędu $\varepsilon_{\text{est}}(t)$. Dodatkowe zastosowanie ekstrapolacji z błędem estymowanym przewagę tę jeszcze bardziej pogłębia.
- Mniejszy przyrost liczby węzłów pomiędzy kolejnymi krokami zagęszczania pozwala w metodzie adaptacyjnej na bardziej precyzyjne ograniczenie docelowego rozmiaru (N) problemu.
- Zastosowana estymacja błędu daje wyniki bardzo zbliżone do błędu prawdziwego.



Rysunek 8.14: Względny błąd dyskretyzacji ϵ_{est} i błąd prawdziwy ϵ_t oraz czas całkowity w funkcji liczby węzłów N przy zagęszczaniu równomiernym i adaptacyjnym – problemy elektrostatyczne 2D



Rysunek 8.15: Względny błąd dyskretyzacji ϵ_{est} i czas całkowity w funkcji liczby węzłów N przy zagęszczaniu równomiernym i adaptacyjnym – problemy elektrostatyczne 3D



Rysunek 8.16: Względny błąd dyskretyzacji ϵ_{est} i czas całkowity w funkcji liczby węzłów N przy zagęszczaniu równomiernym i adaptacyjnym – problemy magnetyczne 3D

Rozdział 9

Przykładowe zastosowania – analiza statyczna

Przeprowadzono obliczenia dla przykładowych struktur wybranych dla zilustrowania możliwości różnych zastosowań metody oraz w celu weryfikacji wyników w oparciu o dane dostępne w literaturze i uzyskane w analizie pełnofalowej. W pierwszym rzędzie analizowano przekroje przewodnic falowych (analiza dwuwymiarowa). Następnie wykonano obliczenia kilku nieciągłości w pełnym, trójwymiarowym ujęciu.

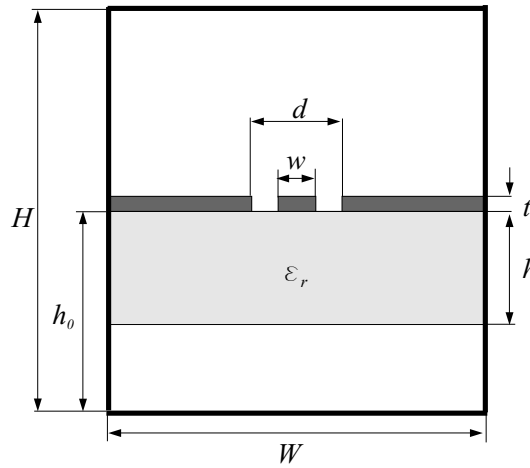
Dyskretyzacja zagadnienia za pomocą elementów skończonych daje pełną swobodę w kształtowaniu geometrii zamkniętych struktur z falą quasi-TEM. Praktycznym ograniczeniem jest jedynie zakres stosowalności podejścia quasi-statycznego, który zależy głównie od dyspersji w liniach i możliwości uznania elementów trójwymiarowych (nieciągłości) za skupione. Dla rzeczywistych zastosowań w układach mikrofalowych najczęściej buduje się elementy w oparciu o przewodnice planarne, z czego linie koplanarne wykazują dużo mniejszą dyspersję niż linie mikropaskowe. Jedynie z tego powodu wszystkie zaprezentowane przykłady dotyczą struktur planarnych, a najczęściej z przewodnicami koplanarnymi.

Przywoływane w niniejszym rozdziale czasy symulacji prezentowaną metodą dotyczą komputera PC Pentium III, 780MHz, 512MB RAM.

9.1 Parametry przewodnic

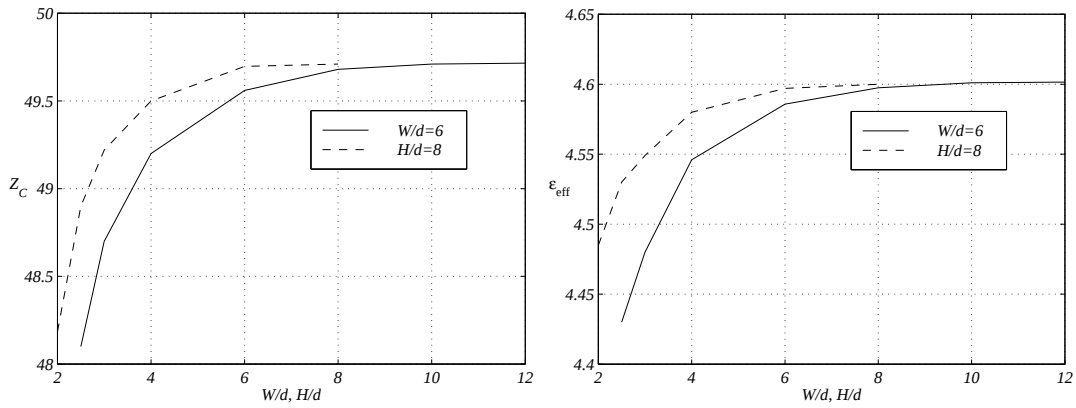
Wykonano obliczenia impedancji charakterystycznej i przenikalności efektywnej przewodnic koplanarnych o geometrii przedstawionej na rysunku 9.1.

Wpływ odległości ścian obudowy metalowej na impedancję i przenikalność efektywną linii ilustrują wykresy na rysunku 9.2. Wyniki uzyskano zagęszczając adaptacyjnie siatkę aż do osiągnięcia błędu $\varepsilon_{\text{est}} < 0.03\%$. Widać, że symulację struktury otwartej można uzyskać przez dostateczne oddalenie ekranów od linii – przyjęto $W/d = 6$ i $H/d = 8$. W takich warunkach obliczono parametry linii dla zmieniającej się szerokości paska w/d . Wyniki zestawiono w tabeli 9.1 wraz z rezultatami uzyskanymi z analizy statycznej metodą różnic skończonych (FD) [90] i odwzorowań konforemnych (CM – conformal mapping) (wyniki z [66] cytowane za [90]). W po-



Rysunek 9.1: Przekrój poprzeczny linii koplanarnej.

równaniu z wynikami teoretycznymi (CM), niniejsza metoda (MG-FE) daje lepszą dokładność niż FD.



Rysunek 9.2: Wpływ rozmiarów obudowy na Z_c i ε_{eff} linii koplanarnej ($t = 0$, $\varepsilon_r = 9.8$, $d = 625\mu m$, $h = 250\mu m$, $w/d = 0.6$ i $h_0 = H/2$)

w/d	Z_c			ε_{eff}		
	MG-FE	FD	CM	MG-FE	FD	CM
0.2	81.76	81.07	82.70	4.738	4.734	4.719
0.4	62.54	61.97	63.35	4.628	4.633	4.614
0.6	49.68	49.26	50.34	4.597	4.602	4.589
0.8	38.02	37.82	38.50	4.652	4.652	4.650

Tabela 9.1: Porównanie parametrów linii koplanarnej ($t = 0$, $\varepsilon_r = 9.8$, $d = 625\mu m$, $h = 250\mu m$, $W/d = 6$, $H/d = 8$ i $h_0 = H/2$) wg. różnych metod – niniejszej (MG-FE), FD, CM .

Wpływ grubości metalizacji t na parametry monolitycznej linii koplanarnej na podłożu z GaAs przedstawia tabela 9.2, gdzie dołączono wyniki z analizy FD [90] oraz hybrydowej metody elementów skończonych (HybFE) [39]. Różnice pomiędzy wynikami uzyskanymi z metody FD i metod FE (HybFE i MG-FE) dla rosnącej grubości metalizacji wynikają raczej z trudności w dobrej dyskretyzacji bardzo wąskiej przestrzeni pomiędzy paskami oraz okolic narożników. W prezentowanej tu metodzie siatka dopasowuje się do dowolnego rozkładu metalizacji i rozwiązania, co sugeruje bardziej poprawny wynik.

$t[\mu m]$	Z_c			ε_{eff}	
	MG-FE	FD	HybFE	MG-FE	FD
$h = 100\mu m$					
0	49.70	49.8	–	6.913	6.891
1	47.24	48.0	–	6.427	6.525
3	43.82	44.8	–	5.781	5.925
5	41.11	42.3	–	5.293	5.456
$h = 200\mu m$					
0	49.60	–	49.65	6.944	–
1	47.14	–	–	6.455	–
3	43.74	–	43.73	5.806	–

Tabela 9.2: Wpływ grubości metalizacji na parametry linii koplanarnej ($\varepsilon_r = 12.9$, $d = 35\mu m$, $w = 15\mu m$, $W = 350\mu m$, $H = 600\mu m$ i $h_0 = H/2$) wg. różnych metod – niniejszej (MG-FE), FD, HybFE.

9.2 Proste nieciągłości

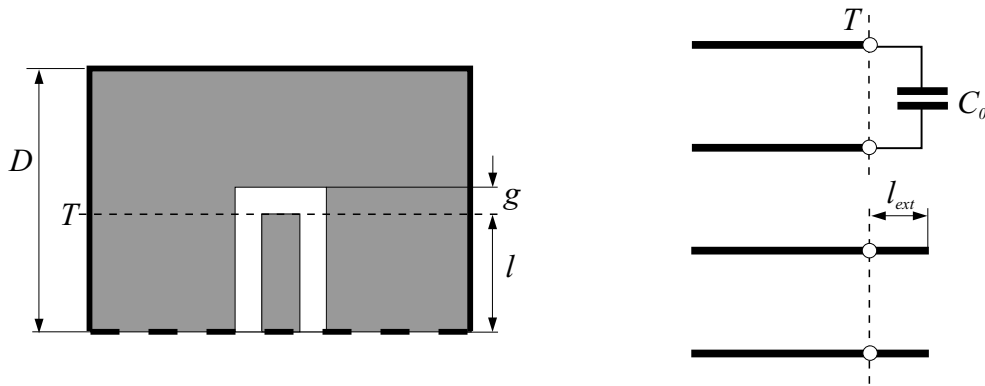
Rozwarcie linii koplanarnej

Przeprowadzono analizę trójwymiarową linii koplanarnej oraz pojemności zastępczej rozwartego końca linii koplanarnej (rys. 9.3), którą reprezentuje pojemność C_o w schemacie zastępczym lub efektywne wydłużenie linii l_{ext} obliczane jako

$$l_{ext} = \frac{W_e}{W_{e1}} - l,$$

gdzie W_e i W_{e1} oznaczają energię pola elektrycznego w całej strukturze rozwarcia (3D) i w przekroju poprzecznym linii (2D).

Wyniki dla struktury monolitycznej, w postaci wydłużenia linii uzależnionego od przerwy rozwarcia g porównano z metodą HybFE [39] w tabeli 9.3. Zagęszczanie siatki w analizie 3D prowadzono aż do osiągnięcia błędu dyskretyzacji $\varepsilon_{est} \approx 1\%$, czemu odpowiadało średnio 120000 węzłów. Zastosowanie ekstrapolacji polegającej na korekcji błędem estymowanym dokładność dyskretyzacji wrosła do około 0.25%.



Rysunek 9.3: Geometria rozwarcia linii koplanarnej i jego schemat zastępczy.

W tabeli 9.3 podano wartości wydłużenia linii uzyskane z energii obliczonej dla tych dwóch wariantów dokładności. Różnice pomiędzy wynikami uzyskanymi niniejszą metodą z zastosowaniem ekstrapolacji (wariant docelowy) a metodą HybFE nie przekraczają 4%. Dla wariantu z obniżoną dokładnością (bez ekstrapolacji) zgodność wyraźnie wzrasta, co sugeruje, iż w obliczeniach metodą HybFE nie osiągnięto właściwej dokładności dyskretyzacji.

$g[\mu m]$	$l_{ext} [\mu m]$		
	MG-FE z ekstrapolacją	MG-FE bez ekstrapolacji	HybFE
2	15.86	16.21	15.50
5	12.64	12.88	13.08
10	10.94	11.34	11.38
20	9.98	10.28	10.31
30	9.65	10.06	10.05
50	9.43	10.00	9.83

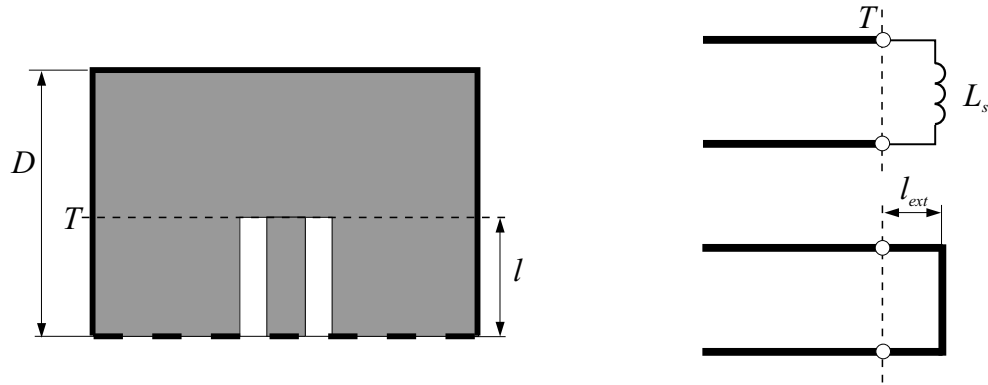
Tabela 9.3: Wpływ szerokości szczeliny rozwarcia g linii koplanarnej na wydłużenie l_{ext} równoważne zastępczej równoległej pojemności końca linii ($t = 3\mu m$, $\varepsilon_r = 12.9$, $d = 50\mu m$, $w = 10\mu m$, $h = 200\mu m$, $W = 400\mu m$, $H = 600\mu m$, $h_0 = H/2$, $D = 200\mu m$, $l = D/2$)

Zwarcie linii koplanarnej

Geometria i schemat zastępczy zwarcia (rys. 9.4) są analogiczne do przedstawionego wcześniej rozwarcia. Wydłużenie zastępcze linii l_{ext} równoważne jest indukcyjności szeregowej L_s i oblicza się na podstawie energii pola magnetycznego w całej strukturze 3D (W_m) i przekroju poprzecznym linii (W_{m1}). Rozkład skalarne go potencjału

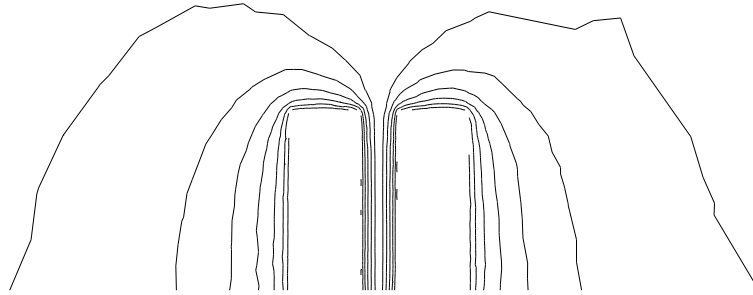
magnetycznego na powierzchni metalizacji przedstawia rysunek 9.5.

$$l_{ext} = \frac{W_m}{W_{m1}} - l,$$



Rysunek 9.4: Geometria zwarcia linii koplanarnej i jego schemat zastępczy.

Dla struktury o identycznych parametrach jak w przypadku rozwarcia linii (tabela 9.3) uzyskano $l_{ext} = 5.953\mu m$, czemu odpowiada $L_s = 2.97pH$.



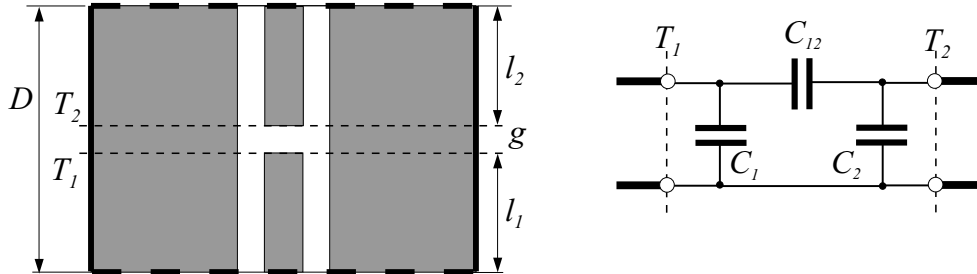
Rysunek 9.5: Zwarcie linii koplanarnej – rozkład linii ekwipotencjalnych dla pola magnetycznego na powierzchni metalizacji, równoważnych liniom prądu powierzchniowego (siatka 3D z 19085 węzłami – błąd 2.3%).

9.3 Nieciągłości o złożonym schemacie

Szczelina poprzeczna w linii koplanarnej

Geometrię i schemat zastępczy poprzecznej szczeliny przedstawia rysunek 9.6. W przypadku braku zmiany wymiarów linii przy przejściu przez szczelinę pojemności

równoległe są jednakowe, $C_1 = C_2$. Niniejsza metoda pozwala jednak na dowolne kształtowanie geometrii analizowanej struktury – linie sprzężone ze sobą przez pojemność szeregową C_{12} mogą mieć różne wymiary, przesunięte osie, czy wreszcie ukośny kierunek podejścia lub samej szczeliny.



Rysunek 9.6: Geometria szczeliny w linii koplanarnej i jej schemat zastępczy.

Wyznaczenie pojemności w schemacie zastępczym szczeliny bez zmiany szerokości linii wymaga, dzięki symetrii, tylko dwukrotnego obliczenia energii pola elektrycznego, dla następujących kombinacji pobudzeń

	V_1	V_2
C_{10}	1	0
C_{11}	1	1

gdzie V_1 i V_2 to potencjały linii 1 i 2 wymuszone przez warunki brzegowe, a $C_{10} = C_1 + C_{12}$ i $C_{11} = C_1 + C_2$ oznaczają wypadkowe pojemności przy tych pobudzeniach liczone z energii pola elektrycznego $W_e = C/(2V^2)$ (dla $V = 1$).

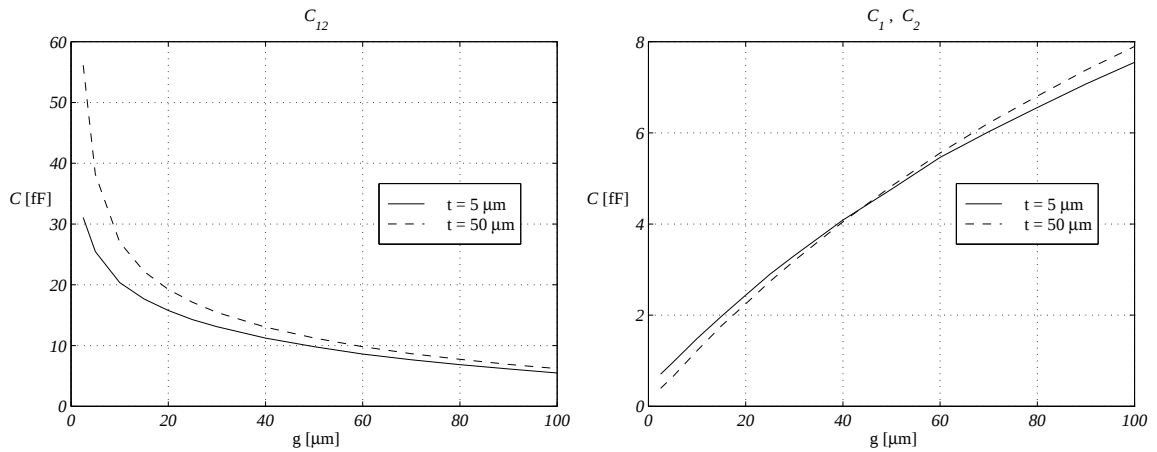
$$C_{12} = \frac{1}{2}(2C_{10} - C_{11}) \quad C_1 = C_2 = C_{10} - C_{12} \quad (9.1)$$

Wykonano obliczenia pojemności schematu zastępczego szczeliny dla różnych grubości metalizacji t i szerokości szczeliny g , czego wyniki przedstawia rysunek 9.7.

Struktura była analizowana dla całkowitej długości linii $l_1 + l_2 + g = H = 1000\mu m$. Wyniki o dokładności dyskretyzacji wahającej się w przedziale 0.1%-0.25% osiągnięto na siatkach o liczbie węzłów od 87000 do 170000, zależnie od kombinacji pobudzeń. Czas obliczeń dla jednego kompletu pobudzeń wynosił od 50 do 110 sekund. Rezygnacja z ostatniego kroku zagęszczania siatki zmniejszała ten czas o połowę przy dwukrotnym wzroście błędu dyskretyzacji, który wciąż pozostawał poniżej 1%. Z reguły dla $V_1 = V_2 = 1$ tworzona była gęstsza siatka ze względu na silne zakrzywienie linii sił pola w obszarze szczeliny.

Pojemności struktury o innych wymiarach i podłożu porównano z wynikami eksperymentalnymi zaczerpniętymi z [90], gdzie elementy schematu zastępczego szczeliny obliczano na podstawie pomiarów macierzy rozproszenia w zakresie 0.04–40 GHz (tabela 9.4). Uzyskano dobrą zgodność prezentowanej metody z pomiarami.

Dla jednej ze struktur testowych o $\epsilon_r = 12.9$ i wymiarach $t = 10\mu m$, $d = 250\mu m$, $w = 150\mu m$, $g = 10\mu m$, $h = 100\mu m$, $H = D = 700\mu m$, $W = 1000\mu m$, $h_0 = H/2$, $l_1 = l_2$ obliczono charakterystyki elementów macierzy rozproszenia na podstawie



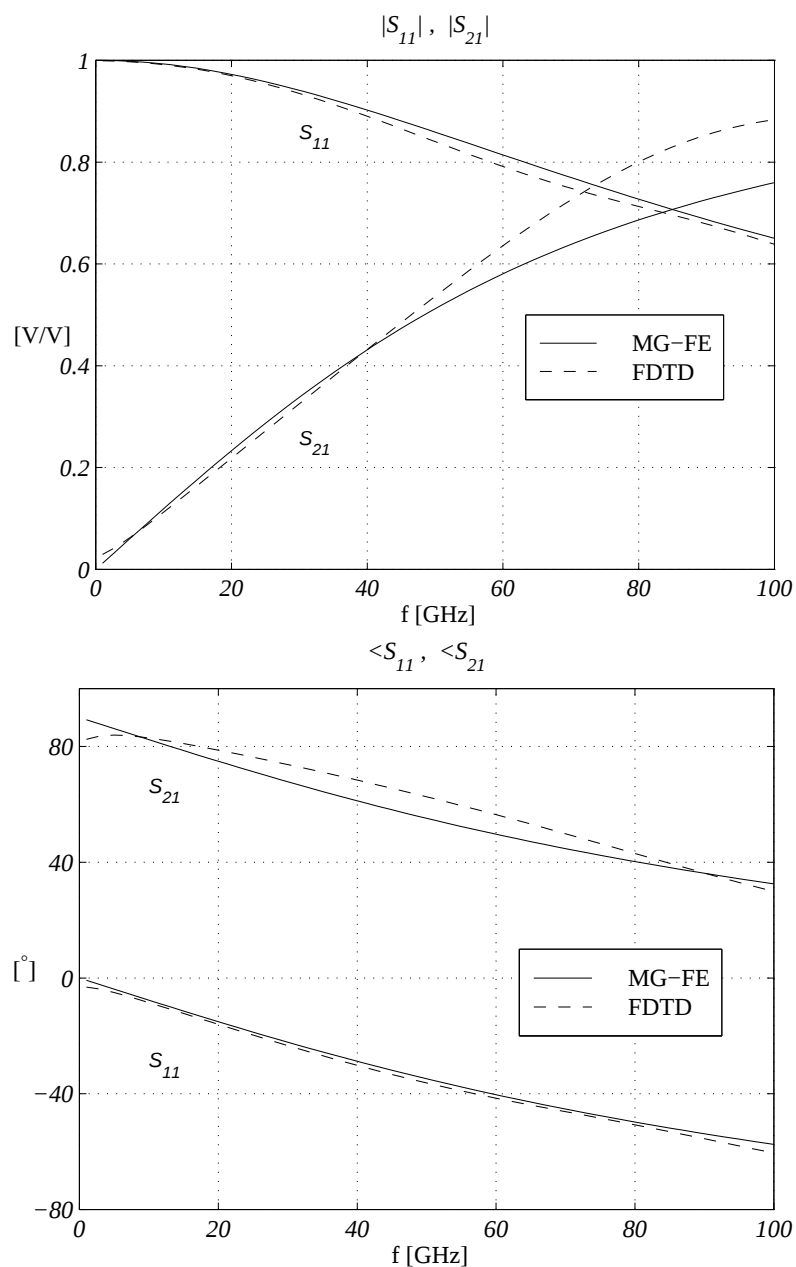
Rysunek 9.7: Pojemności schematu zastępczego szczeliny poprzecznej w linii koplanarnej ($\varepsilon_r = 12.9$, $d = 250\mu m$, $h = 500\mu m$, $h_0 = 0$, $w/d = 0.6$, $h_0 = 0$, $H = W = 1000\mu m$)

$g[\mu m]$	C_{12} [fF]		$C_1 = C_2$ [fF]	
	MG-FE	pomiar	MG-FE	pomiar
47	5.94	6.0	1.87	2.0
25	8.26	8.3	0.94	1.0

Tabela 9.4: Porównanie pojemności schematu zastępczego poprzecznej szczeliny ($t = 5\mu m$, $\varepsilon_r = 9.8$, $d = 220\mu m$, $w = 120\mu m$, $h = 625\mu m$) z wynikami pomiarowymi [90]. Symulację MG-FE prowadzono dla $W = H = D = 1400\mu m$, $h_0 = H/2$, $l_1 = l_2$)

schematu zastępczego otrzymanego z analizy statycznej metodą MG-FE. Wyliczone pojemności schematu to $C_1 = C_2 = 0.874$ fF i $C_{12} = 23.3$ fF, a parametry falowe linii koplanarnej – $\varepsilon_{eff} = 5.15$ i $Z_c = 40.8\Omega$. Energię całkowitą pola elektrycznego obliczono z dokładnością ok. 0.3% w dwóch symulacjach 3D – na siatce o 160000 i 106000 węzłów w łącznym czasie ok. 3 minut. Obniżenie dokładności do 0.6% (rezygnacja z ostatniego kroku zagęszczania) skracало czas obliczeń o połowę, do 1.5 minuty. Tę samą strukturę zanalizowano za pomocą pełnofalowego symulatora QuickWave-3D [60] opartego na metodzie FDTD. Siatka dyskretyzacji złożona jest z 148000 komórek (pomiędzy węzłami). Analiza pełnofalowa dostarczyła charakterystyk macierzy rozproszenia w zakresie od 2 do 100 GHz, w ciągu ok. 25 minut. Wyniki porównano na rysunku 9.8.

Test potwierdził dobrą zgodność analizy quasi-statycznej opartej na adaptacyjnej metodzie wielosiatkowej z elementami skończonymi z analizą pełnofalową w szerokim zakresie częstotliwości. Szczególnie dobre wyniki uzyskano dla S_{11} – zarówno dla fazy jak i modułu – aż do 100 GHz. Dla S_{21} większe odchyłki modułu rozpoczynają się dopiero powyżej 50 GHz, różnice fazy nie przekraczają 10° w całym zakresie symulacji. Wspomniane wcześniej ograniczenie dokładności obliczania energii pola elektrostatycznego nie wprowadza istotnych zmian w relacjach pomiędzy wynika-



Rysunek 9.8: Porównanie charakterystyk szczeliny poprzecznej w linii koplarnarnej wyrażonej poprzez schemat zastępczy o pojemnościach $C_1 = C_2 = 0.874$ fF i $C_{12} = 23.3$ fF (analiza statyczna wg. niniejszej metody, MG-FE) z wynikami symulacji pełnofalowej programem QuickWave3D (FDTD)

mi symulacji statycznej i pełnofalowej, dzięki czemu prezentowana metoda pozwala osiągnąć ponad 16-krotną oszczędność czasu.

Należy pamiętać, że zakres częstotliwości obowiązywania modelu statycznego związany jest ściśle z rozmiarami struktury. W rozważanym przykładzie wymiary odpowiadają układom monolitycznym. Przeskalowanie go do około 1 cm obniży maksymalną częstotliwość w okolicy 10 GHz.

Dwuwarstwowe skręcone skrzyżowanie mikropasków

Jako przykład struktury o złożonym schemacie zastępczym zawierającym zarówno pojemności jak i indukcyjności wybrano skręcone pod dowolnym kątem skrzyżowanie dwóch bezstratnych linii mikropaskowych ułożonych w różnych warstwach struktury planarnej [97].

Ukośne kierunki linii dają okazję na skorzystanie ze swobody jaką oferuje dyskretyzacja metodą elementów skończonych w odróżnieniu od większości metod różnic skończonych. Ponadto analizowany układ nie posiada, w ogólnym przypadku, symetrii pozwalającej na łatwe wprowadzenie ścianek magnetycznych, co zmusza do stosowania takich technik obliczania rozkładu pola magnetycznego jak proponowane w niniejszej pracy podejście z potencjałem skalarnym i powierzchnią rozcięcia dziedziny.

Geometrię struktury przedstawia rysunek 9.9. Mikropasek M_1 leży na podłożu ε_r , podczas gdy M_2 jest w nim zagrzebany. Paski mogą mieć niezerową grubość t . Dla zapewnienia takich samych warunków symulacji w szerokim zakresie kątów α pomiędzy liniami, struktura jest ograniczona cylindryczną obudową.

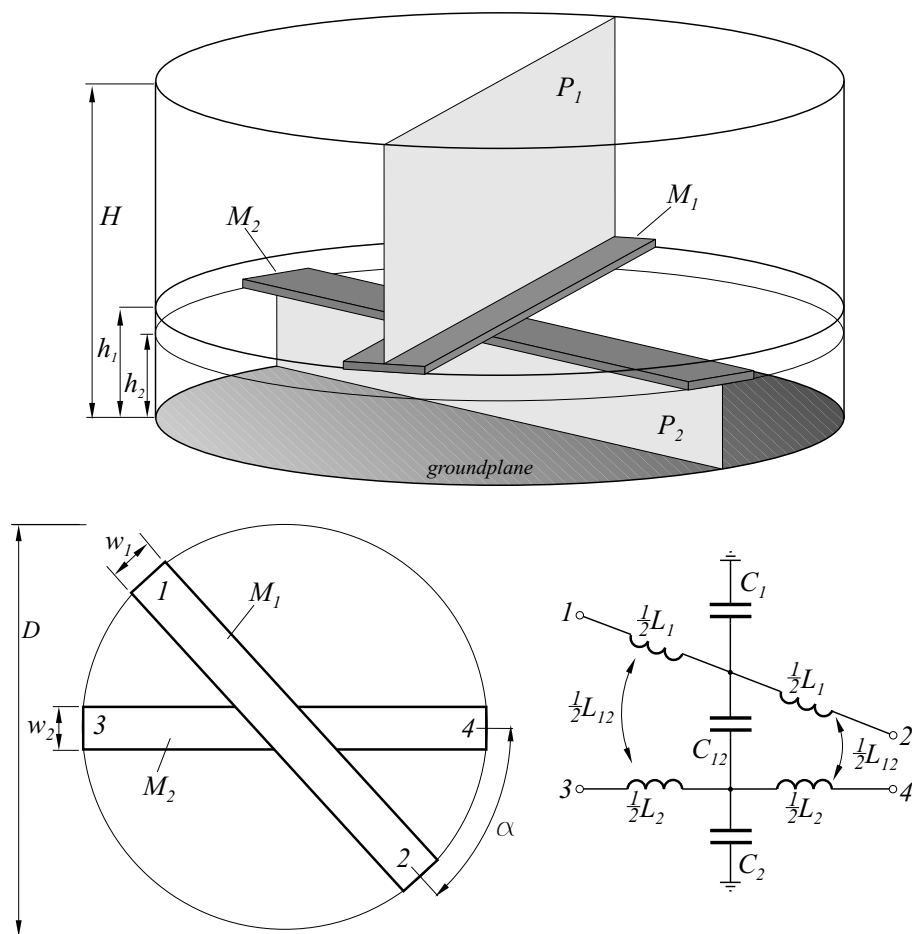
W podejściu statycznym skrzyżowanie uważa się za skupione niezależnie od jego fizycznych rozmiarów, dlatego schemat zastępczy jest podobny do schematu jednorodnych odcinków linii (rys. 9.9). Jednak rozmiary nieciągłości będą oczywiście wpływały na zakres częstotliwości, dla którego model ten będzie dokładny. W skrajnym przypadku, dla $\alpha = 0$ mamy jednorodne linie sprzężone bez nieciągłości. Gdy $\alpha > 0$ jest małe, sprzężenie pomiędzy liniami nie jest jednorodne (zmienia się wzdłuż linii), zajmuje przy tym stosunkowo rozległy obszar, co uniemożliwia traktowanie go jak skupioną nieciągłość.

Pojemności i indukcyjności oblicza się na podstawie niezależnej analizy elektrostatycznej i magnetostatycznej w oparciu o schematy wyodrębnione z całościowego układu zastępczego (rys. 9.10). Poszczególne elementy wyznacza się z rozwiązania równania Laplace'a korzystając ze sformułowania energetycznego

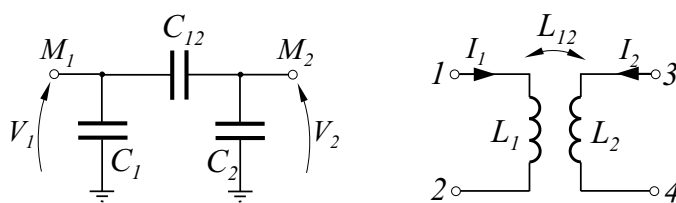
$$W_e = \frac{C V^2}{2} \quad W_m = \frac{L I^2}{2}, \quad (9.2)$$

gdzie $V \equiv \Delta\varphi$ i $I \equiv \Delta\psi$ są pobudzeniami zadanymi jako warunki brzegowe dla potencjałów elektrycznych i magnetycznych, a W_e i W_m to całkowite energie pola elektrycznego i magnetycznego.

Każdy element obwodu uzyskiwany jest z energii dla różnych kombinacji pobudeń.



Rysunek 9.9: Geometria i schemat zastępczy skróconego skrzyżowania mikropasków. P_1 i P_2 są powierzchniami rozcięcia dziedziny w analizie magnetostatycznej.



Rysunek 9.10: Schematy zastępcze w analizie elektrostatycznej (pojemności) i magnetostatycznej (indukcyjności).

	V_1	V_2		I_1	I_2
C_{10}	1	0	L_{10}	1	0
C_{01}	0	1	L_{01}	0	1
C_{11}	1	1	L_{11}	1	1

oraz

$$\begin{aligned}
 C_{12} &= \frac{1}{2}(C_{10} + C_{01} - C_{11}) & C_1 &= C_{10} - C_{12} \\
 & & C_2 &= C_{01} - C_{12} \\
 L_{12} &= \frac{1}{2}(L_{10} + L_{01} - L_{11}) & L_1 &= L_{10} \\
 & & L_2 &= L_{01}.
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Warunki brzegowe na cylindrycznej obudowie są różne dla analizy elektrycznej i magnetycznej. W pierwszym przypadku zamknięcie dolne i górne są metalowe z potencjałem $\varphi = 0$, ale powierzchnia boczna musi być ścianką magnetyczną z warunkami Neumanna ($\partial\varphi/\partial n = 0$), żeby odizolować elektrycznie mikropaski od ekranu. W analizie magnetycznej wszystkie powierzchnie są metalowe, stanowiąc dla potencjału magnetycznego ψ ścianki elektryczne z warunkami Neumanna ($\partial\psi/\partial n = 0$).

Wymiary i parametry materiałowe struktury zaczerpnięto z [67], gdzie skrzyżowanie prostopadłe ($\alpha = 90^\circ$) analizowano numerycznie metodą różnic skończonych (FD) i zweryfikowano eksperymentalnie w układzie dwuwarstwowego sprzęgacza kierunkowego. Podłoże $\varepsilon_r = 3.25$ ma dwie jednakowe warstwy $h_2 = h_1 - h_2 = 0.787$ mm. Mikropaski M_1 i M_2 mają grubość $t = 0.018$ mm, a szerokości $w_1 = 3.1$ mm i $w_2 = 2.08$ mm. Cylindryczna obudowa o średnicy $D = 10$ mm ma górny ekran położony $H - h_1 = 5h_1 = 7.87$ mm nad podłożem dielektrycznym.

Elementy schematu zastępczego całej struktury dla różnych α (nieciągłość i linie doprowadzające) przedstawiono w tabeli 9.5 i na wykresach (rys. 9.11). Parametry nieciągłości dla przypadku prostopadłego ($L_{12} = 0$), wyizolowanej poprzez odjęcie pojemności i indukcyjności jednorodnych odcinków linii, porównano z [67] w tabeli 9.6. Obudowę cylindryczną zastąpiono w tym przypadku prostopadłościanem o tej samej wysokości i ścianach bocznych odległych od brzegów mikropasków na odległość równą ich szerokości. Wrota nieciągłości po wyodrębnieniu (deembedding) przesunięte są ze ścian bocznych o $w_1 - h_1$ i $w_2 - h_1$ w stronę środka wzdłuż M_2 i M_1 , odpowiednio, czyli na odległość h_1 od brzegu drugiego paska.

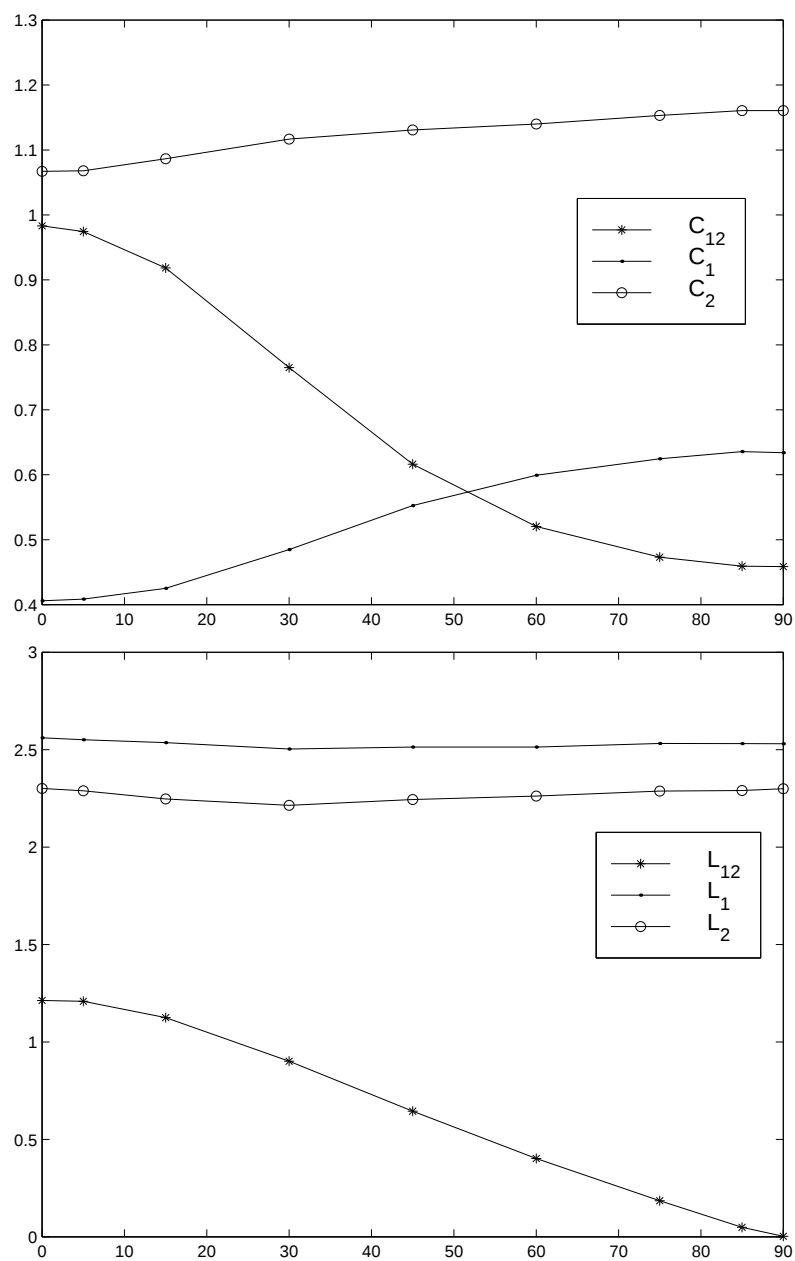
Rozmiary początkowej siatki elementów skończonych (czworościanów) wynosiły od 1053 do 1273 węzłów, a po 6 krokach adaptacyjnego zagęszczania docelowa siatka liczyła od 38310 do 66260. Średni błąd dyskretyzacji po korekcji błędem estymowanym wynosił około 0.3%.

α	[pF]			[nH]		
	C_1	C_2	C_{12}	L_1	L_2	L_{12}
0°	0.406	1.067	0.983	2.561	2.301	1.213
5°	0.409	1.068	0.974	2.551	2.289	1.209
15°	0.425	1.086	0.918	2.536	2.247	1.125
30°	0.485	1.117	0.765	2.504	2.214	0.901
45°	0.553	1.131	0.616	2.513	2.244	0.645
60°	0.599	1.140	0.520	2.513	2.262	0.402
75°	0.625	1.153	0.473	2.532	2.288	0.186
85°	0.636	1.161	0.459	2.532	2.291	0.049
90°	0.634	1.161	0.459	2.531	2.299	0.0025

Tabela 9.5: Wyniki numeryczne dla całej struktury skrzyżowania przy zmieniającym się kącie α

metoda	[pF]			[nH]	
	C_1	C_2	C_{12}	L_1	L_2
MG-FE	0.0571	0.480	0.464	0.975	1.036
FD [67]	0.0548	0.472	0.454	0.972	1.03

Tabela 9.6: Porównanie wyodrębnionych elementów nieciągłości skrzyżowania prostopadłego $\alpha = 90^\circ$ uzyskanych niniejszą metodzie (MG-FE) i metodą różnic skończonych (FD).



Rysunek 9.11: Pojemności [pF] i indukcyjności [nH] dla całej struktury skrzyżowania w funkcji kąta α

Rozdział 10

Wprowadzenie do analizy pełnofalowej

Rozdział ten zawiera propozycje zastosowania metod wielosiatkowych w analizie pełnofalowej. Rozważane są równania Maxwella dla pobudzeń harmoniczných i dyskretyzacja w dziedzinie częstotliwości. Przedstawione zostały następujące zagadnienia obejmujące problemy własne 2D oraz deterministyczne 3D:

- przegląd możliwości zastosowania metod wielosiatkowych do rozwiązywania zagadnień własnych
- propozycje algorytmów rozwiązywania dwuwymiarowych wektorowych zagadnień własnych elektrodynamiki (prowadnice falowe) za pomocą metod wielosiatkowych przeznaczonych dla problemów skalarnych
- propozycje zastosowania metod wielosiatkowych dla problemów skalarnych do rozwiązywania trójwymiarowych, pełnofalowych zagadnień wewnętrznych elektrodynamiki w strukturach z niejednorodnym wypełnieniem dielektrycznym

10.1 Analiza pełnofalowa 2D – zagadnienia własne

10.1.1 Sformułowanie zagadnienia własnego

Rozważymy dwie kategorie struktur, dla których równania Maxwella w obszarach bez źródeł, w dziedzinie częstotliwości przekształcić można do dwóch typów postaci równań falowych. Są to dowolnego kształtu „obudowy” zamknięte lub falowody cylindryczne o dowolnym przekroju, zawierające bezstratne dielektryki izotropowe:

1. puste lub z wypełnieniem jednorodnym – skalarne równanie Helmholtza
2. z dowolnym wypełnieniem niejednorodnym (np. ekranowane prowadnice dielektryczne) – wektorowe równania falowe (układ sprzężonych skalarnych równań Helmholtza)

Ograniczmy się do przewodnic falowych jednorodnych w kierunku propagacji i ich poprzecznego przekroju w płaszczyźnie (x, y) , wiedząc, że wprowadzenie trzeciego wymiaru spowoduje jedynie numeryczną komplikację zagadnienia nie zmieniając samych koncepcji proponowanych metod.

Równania falowe dla wypełnień jednorodnych sprowadza się do postaci skalarne równania Helmholtza ze względu na funkcję $u(x, y)$:

$$(\nabla_t^2 + k^2) u(x, y) = 0$$

Jest to zagadnienie własne z operatorem ∇_t^2 , gdzie wartości własne określają charakterystykę dyspersyjną $\beta(\omega)$ i można je zdefiniować jako:

$$\lambda = -k^2 = k_0^2 - \beta^2 \quad k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$$

Dyskretyzacja operatora różniczkowego przy pomocy różnic lub elementów skończonych prowadzi do macierzowego zagadnienia własnego:

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad (10.1)$$

Jest to jednocześnie ogólna i najprostsza postać zagadnienia własnego, do której sprowadza się również wiele szczegółowych problemów fizycznych z innych dziedzin.

W przypadku niejednorodnego wypełnienia falowodu pole $\vec{E}$ i $\vec{H}$ określone są oddzielnymi wektorowymi równaniami falowymi lecz o jednakowych wartościach własnych. Żeby uniknąć trudności związanych z ewentualnymi osobliwościami i nieciągłościami składowych poprzecznych pola $\vec{E}$ z powodu uskoków dielektryka, wygodnie jest sformułować zagadnienie własne ze względu na poprzeczne składowe $\vec{H}_t$ w postaci dwóch sprzężonych równań skalarnych [47]:

$$\begin{aligned} (\nabla_t^2 - \beta^2) H_x + \frac{1}{\epsilon_r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial y} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) &= -k_0^2 \epsilon_r H_x \\ (\nabla_t^2 - \beta^2) H_y + \frac{1}{\epsilon_r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial x} \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) &= -k_0^2 \epsilon_r H_y \end{aligned} \quad (10.2)$$

Przedstawiając (10.2) na siatce różnic skończonych otrzymuje się równoważny problem dyskretny:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x \mathbf{u}_x + \mathbf{C}_y \mathbf{u}_y &= \lambda \mathbf{B} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{A}_y \mathbf{u}_y + \mathbf{C}_x \mathbf{u}_x &= \lambda \mathbf{B} \mathbf{u}_y \end{aligned} \quad (10.3)$$

gdzie $\lambda = k_0^2$, a macierze i wektory są następującymi odpowiednikami funkcji i operatorów ciągłych:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_x &\leftarrow H_x & \mathbf{u}_y &\leftarrow H_y \\
\mathbf{L} &\leftarrow \nabla_t^2 - \beta^2 & \mathbf{B} &\leftarrow -\epsilon_r(x, y) \\
\mathbf{A}_x &= \mathbf{L} + \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_x &\leftarrow -\frac{1}{\epsilon_r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} & \mathbf{C}_x &\leftarrow \frac{1}{\epsilon_r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \\
\mathbf{A}_y &= \mathbf{L} + \mathbf{D}_y & \mathbf{D}_y &\leftarrow -\frac{1}{\epsilon_r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} & \mathbf{C}_y &\leftarrow \frac{1}{\epsilon_r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned} \tag{10.4}$$

Najprostszym sposobem traktowania zagadnienia własnego o sprzężonym układzie równań (10.3) jest *metoda potęgowa*, w której iteracyjne obliczanie lewych stron (na przemian dla obu równań układu) daje parę ciągów wektorów zbieżnych do pary wektorów własnych $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$ odpowiadających **dominującej** wartości własnej λ_1 . Określa ona jednak najwyższy rodzaj fali (wzbudzony przy największej częstotliwości). Dla rodzaju podstawowego (najniższe $k_0^2 = \lambda$) konieczne jest stosowanie metod „odwrotnych”, opartych na zasadzie *odwrotnej metody potęgowej* (metoda *iteracji odwrotnych*). W ciągu iteracji obliczane są teraz **prawe** strony (10.3), co wiąże się już z większym wysiłkiem numerycznym polegającym na „synchronicznym” odwróceniu macierzy $\mathbf{A}_x$ i $\mathbf{A}_y$ lub, inaczej mówiąc, równoczesnym rozwiązaniu równań macierzowych ze względu na $\mathbf{u}_x$ i $\mathbf{u}_y$ z lewej strony (10.3). Dalszym rozwinięciem metody potęgowej jest bardzo skuteczna i powszechnie stosowana metoda *iteracji z ilorazami Rayleigha* [52, 58]. Algorytm ten zostanie dokładniej omówiony później, na przykładzie falowodu prostokątnego z niejednorodnym wypełnieniem dielektrycznym.

Przedstawione powyżej metody iteracyjne są oczywiście również stosowane do standardowego problemu własnego (10.1), jednak w tym przypadku wybór metod jest znacznie szerszy, gdyż nie istnieje już problem jednoczesnego rozwiązania problemów wzajemnie ze sobą sprzężonych. Do numerycznie najefektywniejszych należy *metoda Arnoldiego* w której jednocześnie oblicza się kilka wartości własnych – dominujących lub wybranych za pomocą specjalnego mechanizmu „filtrowania” [108]. Inna grupa metod stosowanych do problemu skalarnego oparta jest na minimalizacji ilorazów Rayleigha.

W dalszej części zaprezentowane zostaną główne sposoby modyfikacji algorytmów na obliczanie wartości własnych, tak aby zwiększyć ich numeryczną efektywność poprzez zastosowanie koncepcji metod wielosiatkowych.

10.1.2 Metody wielosiatkowe w zagadnieniach własnych

Rozwijane przez matematyków i informatyków metody rozwiązywania zagadnień własnych w przeważającej większości odnoszą się do równania (10.1), które w kontekście elektrodynamiki odpowiada skalarnemu równaniu falowemu. Specyficzny przypadek równania wektorowego w formie dwóch sprzężonych równań Helmholtza (10.3)

można traktować jako swoiste rozwinięcie problemu (10.1). Istnieją dwa zasadnicze podejścia do zastosowania metod wielosiatkowych (MG) w numerycznym rozwiązywaniu ogólnego zagadnienia własnego (10.1).

1. MG zastosowana do rozwiązywania równania liniowego (odwracania macierzy) w iteracjach odwrotnych, czyli w zlinearyzowanym zagadnieniu własnym
2. MG zastosowana bezpośrednio do problemu własnego (równanie nieliniowe) – najczęściej w podejściu wariacyjnym jako minimalizacja ilorazów Rayleigha

Zlinearyzowane zagadnienie własne

Linearyzacja rozwiązania zagadnienia własnego, w którym poszukuje się najmniejszych wartości własnych, najczęściej towarzyszy zastosowaniu *iteracji odwrotnych* [58, 52]. Klasyczny algorytm tej metody jest następujący.

$$\begin{aligned}
 &\text{start: } \mathbf{u}_0, \mu_0 \\
 &\text{dla } i = 1, 2, \dots : \\
 &\quad \mathbf{u}_i = (\mathbf{A} - \mu_{i-1}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{u}_{i-1} \\
 &\quad \mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|} \\
 &\quad \lambda_i = RQ_i = \frac{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{A}\mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle}
 \end{aligned} \tag{10.5}$$

Ilorazy Rayleigha RQ_i wyznaczają ciąg kolejnych przybliżeń wartości własnych $\{\lambda_i\}$ i są zbieżne do najmniejszej wartości własnej λ_{min} . Szybkość zbieżności jest największa, gdy w każdym kroku przesunięcie $\mu_i = \lambda_{i-1}$. Kluczowym elementem algorytmu jest obliczanie nowego przybliżenia wektora własnego:

$$\mathbf{u}_i = (\mathbf{A} - \mu_{i-1}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{u}_{i-1} \tag{10.6}$$

Odwracanie macierzy w (10.6) można bardzo efektywnie wykonać przy użyciu algebraicznych metod wielosiatkowych. Jak widać, jest to bardzo naturalne zastosowanie metod wielosiatkowych w zagadnieniach własnych. Mimo prostoty koncepcji algorytm ten wykazuje ogólnie dobre właściwości [7], choć wymaga też pewnej staranności przy doborze wartości przesunięcia μ_i . Łatwo zauważyć, że dążąc do osiągnięcia najszybszej zbieżności samych iteracji odwrotnych, gdy $\mu_i = \lambda_{i-1}$, macierz odwracana w (10.6) staje się coraz bardziej osobliwa, co pogarsza z kolei uwarunkowanie problemu i zbieżność algorytmu wielosiatkowego. Poprawę przynosi modyfikacja metody do postaci tzw. *odwrotnej korekcji wielosiatkowej* [105], w której zamiast obliczania wprost kolejnych przybliżeń wektorów $\mathbf{u}_i$ odwracanie macierzy służy wyznaczaniu korekcji poprzedniego przybliżenia $\mathbf{u}_{i-1}$.

Zauważmy, że w iteracjach odwrotnych metoda wielosiatkowa użyta jest do iteracyjnego rozwiązywania równania liniowego, które zmienia się również w trakcie iteracji. Metodę wielosiatkową często określa się tu jako *wewnętrzną pętlę iteracji*, której kolejne pełne cykle są od siebie niezależne i wykonywane każdorazowo dla

nieco innego problemu liniowego. Z tego powodu konieczne jest stosowanie „czysto” algebraicznej metody wielosiatkowej, która nie jest w stanie wykorzystać informacji o pierwotnym, fizycznym zagadnieniu własnym. Stwarza to istotną trudność w zastosowaniu algorytmu adaptującego siatkę dyskretyzacji do właściwości problemu ciągłego.

Inną okazją do wykorzystania metod wielosiatkowych w zlinearyzowanym zagadnieniu własnym jest odwracanie macierzy w *odwrotnej metodzie Arnoldiego* [108]. Jest to więc podejście identyczne jak przy iteracjach odwrotnych lecz zastosowane do bardziej efektywnej metody, która również iteracyjnie oblicza, już nie jedną, lecz kilka wartości własnych jednocześnie. W oryginalnej, „prostej” metodzie Arnoldiego znajduje się wartości o największych modułach, można więc, analogicznie do metod potęgowych, odwrócić problem wyjściowy poszukując wartości najmniejszych.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{u} &= \lambda \mathbf{u} & \longrightarrow & \lambda_{max} \\ \mathbf{S} \mathbf{u} &= \sigma \mathbf{u} & \longrightarrow & \sigma_{max} = \frac{1}{\lambda_{min} - \mu} \\ \mathbf{S} &= (\mathbf{A} - \mu \mathbf{I})^{-1} & \text{— macierz problemu odwrotnego} \end{aligned}$$

Z uwagi na krótki jeszcze żywot odwrotnej metody Arnoldiego, bardzo nieliczne są opracowania na ten temat [84], natomiast całkiem brak jest jakichkolwiek wzmianek o próbach zastosowania w niej metod wielosiatkowych.

Podejście wariacyjne

Sposobem na wykorzystanie adaptacyjnych możliwości metod wielosiatkowych jest włączenie koncepcji wielosiatkowej do procedury rozwiązywania samego problemu własnego. Ilorazy Rayleigha (10.5), które w procesie iteracji potęgowych zbiegają się do dominującej wartości własnej, można „zmusić” do przybliżania wartości minimalnej λ_{min} poprzez jego minimalizację. Powstały tak problem wariacyjny prowadzi do określenia wektora własnego $\mathbf{u}$ odpowiadającego λ_{min} :

$$RQ(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \neq 0} RQ(\mathbf{v}) \quad (10.7)$$

gdzie iloraz Rayleigha :

$$RQ(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \quad (10.8)$$

W standardowych metodach rozwiązywania tak sformułowanego zadania wariacyjnego (np. gradienty sprzężone, minimalizacja Gaussa-Seidela) na docelowej gęstej siatce dyskretyzacji problemu ciągłego, proces minimalizacji można sprowadzić do relaksacyjnego rozwiązywania pewnego równania liniowego. Wykonując te relaksacje technikami wielosiatkowymi, tzn. w oparciu o kilka poziomów rozrzedzenia siatki docelowej, otrzymuje się ogólną klasę metod *wielosiatkowej minimalizacji ilorazów Rayleigha* (RQMG – Rayleigh quotient minimization multigrid). Istnieje wiele wariantów tej koncepcji zależnych zarówno od wyboru ogólnej metody minimalizacji, jak i od algorytmu integracji jej z metodą wielosiatkową [79, 62, 114]. Poza samym

przyspieszeniem procesu relaksacji, metoda pozwala zastosować techniki adaptacyjnego zagęszczania siatki. Relaksacja wielosiatkowa jest tu bowiem dokonywana na układzie liniowym, który jest jednoznacznie określony poprzez dyskretyzację wyjściowego zagadnienia ciągłego, a informacja o nim jest dostępna i może być wykorzystana do automatycznej generacji gęstszych siatek. Przykładem jest tzw. szybka adaptacyjna metoda siatek złożonych (FAC – fast adaptive composite grid) [79, 83].

Bardzo ważną odmianą minimalizacji ilorazów Rayleigha są metody *jednoczesne* oparte na *iteracjach w podprzestrzeni* (subspace iterations). Równoczesne obliczanie kilku wektorów własnych umożliwia zastosowanie specjalnych technik separacji, które zapobiegają tzw. mieszanii przybliżonych wektorów własnych. Zjawisko to prowadzi do powstawania znaczących błędów (łącznie z „gubieniem” niektórych rozwiązań) i występuje głównie przy bliskich lub równych wartościach własnych oraz przy zbyt zgrubej aproksymacji problemu ciągłego. Druga z sytuacji jest niejako wbudowana w algorytm wielosiatkowy, w którym właśnie zgrube siatki wykorzystuje się do przyspieszania relaksacji. Szczegółową analizę tych zjawisk oraz propozycje metod ich wyeliminowania w oparciu o uogólnioną technikę rzutowania Ritza podano w [45, 43]. Algorytmy separacji blisko sąsiadujących ze sobą rodzajów przedstawiono również w [114]. W obu przypadkach zastosowano też adaptacyjne zagęszczanie siatek.

10.1.3 Przykłady zastosowań do problemów ze skalarnym równaniem Helmholtza

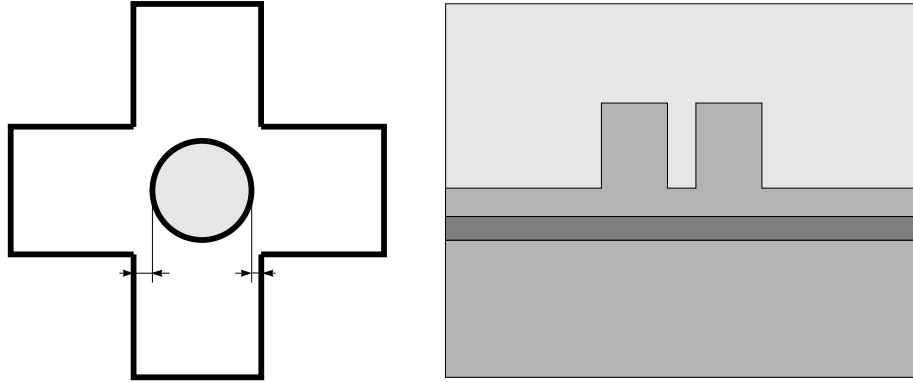
Dla skalarnego równania Helmholtza przedstawione metody stosuje się bezpośrednio. W przypadku sprzężonego układu równań potrzebne jest jednak ich pewne uzupełnienie. Obie te sytuacje rozważymy w odniesieniu do poniższych przykładowych przypadków.

Pusty rezonator falowodowy

W [44] przedstawiono metodę oraz wyniki zastosowania algorytmu wielosiatkowego do analizy pustego rezonatora cylindrycznego (odcinek falowodu) o przekroju krzyżowym z metalowym prętem stojącym w środku (rys.10.1). Z uwagi na jednorodność wypełnienia kolejne częstotliwości rezonansowe określa się poprzez rozwiązanie skalarnego problemu własnego w postaci równania Helmholtza (10.1.1) dla najmniejszych wartości własnych. Dyskretyzację zagadnienia ciągłego przeprowadzono przy użyciu różnic skończonych na siatce, która adaptuje się do złożonej geometrii metalowych ścian przekroju przy pomocy procedury nazwanej przez autorów *boundary layer relaxation* – nie jest to jednak typowy wielosiatkowy algorytm adaptacyjny. Do rozwiązania zagadnienia dyskretnego zastosowano jednoczesną metodę iteracji w podprzestrzeni, którą rozbudowano o specjalną technikę separacji wektorów własnych (*subspace continuation technique*) zapobiegającą „mieszanii rodzajów” o bliskich częstotliwościach własnych.

Wybrana do analizy struktura rezonatora z nieznacznie przesuniętym rdzeniem centralnym dobrze wykorzystuje zalety opracowanej metody z uwagi na istnienie, w

poszczególnych gałęziach przekroju krzyżowego, słabo sprzężonych między sobą rodzajów o bliskich częstotliwościach rezonansowych. Odnotowano zdecydowane przyspieszenie zbieżności metody w stosunku do przypadku jednosiatkowego, uzyskując optymalną szybkość rzędu $O(qN)$ dla q –rodzajów na siatce N –węzłowej. Algorytm ma postać algebraiczną, jest więc niezależny od techniki dyskretyzacji i może z równym powodzeniem być wykorzystany również w oparciu o elementy skończone, które dają jeszcze większą swobodę w kształtowaniu geometrii struktury.



Rysunek 10.1: Przykładowe struktury, których analizę problemów własnych wykonano przy pomocy metod wielosiatkowych – powietrzny rezonator krzyżowy (odcinek falowodu krzyżowego) z przesuniętym metalowym prętem strojącym (z *lewej*) [44], sprzężone przewodnice dielektryczne w optyce zintegrowanej (z *prawej*) [114].

Prowadnice optyki zintegrowanej

Dwuwymiarową analizę uproszczonego zagadnienia własnego dla przekroju poprzecznego sprzężonych linii dielektrycznych (rys.10.1) w optyce zintegrowanej przeprowadzono w [114]. Uproszczenie problemu polegało tu na założeniu, że przewodnice pobudza się światłem o ściśle określonej polaryzacji, czyli o jednej tylko składowej pola elektrycznego. Dzięki temu wektorowe równanie falowe, konieczne w ogólnym przypadku struktury o zmiennym profilu przenikalności elektrycznej, redukuje się do postaci skalarnego równania Helmholtza:

$$-\nabla_t^2 u(x, y) - \epsilon_r(x, y) u(x, y) = \lambda u(x, y)$$

Po dyskretyzacji odpowiada ono zagadnieniu macierzowemu (10.1). Do jego rozwiązania zastosowano podejście wariacyjne, w którym minimalizację ilorazów Rayleigha przeprowadzono przy pomocy wielosiatkowych wersji nieliniowej metody Gaussa-Seidela, gradientów sprzężonych (CG) oraz ich jednoczesnych odpowiedników z iteracjami w podprzestrzeni. Do metod tych włączono algorytm adaptacyjny automatycznie zagęszczający trójkątną siatkę elementów skończonych. Przeprowadzone eksperymenty numeryczne potwierdziły skuteczność metod, z których najlepszą zbieżność wykazywała wielosiatkowa metoda gradientów sprzężonych.

10.1.4 Falowód prostokątny z niejednorodnym wypełnieniem dielektrycznym

Dla falowodów z niejednorodnym wypełnieniem stosuje się wektorowe równanie falowe w kompletnej formie (10.2), dla wszystkich składowych pola. Po dyskretyzacji przyjmuje postać macierzowego zagadnienia własnego o sprzężonym układzie równań (10.3). Przypadek równania wektorowego w formie układu równań Helmholtza wymaga oryginalnego podejścia. Do tej pory w literaturze nie przedstawiono wielosiatkowej metody rozwiązywania tak sformułowanego problemu. Opierając się na naszkicowanym już wcześniej algorytmie [47] zaproponowano zastosowanie metod wielosiatkowych (MG) do bardzo efektywnego obliczania wektorów niewiadomych w **iteracjach odwrotnych** (np. iteracje z ilorazami Rayleigha). Możliwe są dwa warianty takiego podejścia:

1. rozwiązywanie równań macierzowych (odwracanie macierzy) uzyskanych po wcześniejszej dyskretyzacji równań różniczkowych (układ sprzężonych skalar-nych równań Helmholtza) – *algebraiczne metody wielosiatkowe*
2. rozwiązanie równań różniczkowych (przekształconych z układu równań Helmholtza) – metoda wielosiatkowa zintegrowana z procedurą dyskretyzacji

Dla układu równań (10.3) ilorazy Rayleigha, zbieżne w toku iteracji odwrotnych do minimalnej wartości własnej, w i -tym kroku iteracji można zapisać jako:

$$RQ^{(i)} = \frac{\langle \mathbf{u}_x^{(i)}, \mathbf{B}\mathbf{u}_x^{(i-1)} \rangle + \langle \mathbf{u}_y^{(i)}, \mathbf{B}\mathbf{u}_y^{(i-1)} \rangle}{\langle \mathbf{u}_x^{(i)}, \mathbf{B}\mathbf{u}_x^{(i)} \rangle + \langle \mathbf{u}_y^{(i)}, \mathbf{B}\mathbf{u}_y^{(i)} \rangle} \quad (10.9)$$

Kolejne przybliżenia wektorów własnych w bieżącym kroku iteracji $\mathbf{u}_x^{(i)}$ i $\mathbf{u}_y^{(i)}$ oblicza się rozwiązując układ równań na podstawie $(i-1)$ -go przybliżenia:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x \mathbf{u}_x^{(i)} + \mathbf{C}_y \mathbf{u}_y^{(i)} &= \mathbf{B} \mathbf{u}_x^{(i-1)} \\ \mathbf{A}_y \mathbf{u}_y^{(i)} + \mathbf{C}_x \mathbf{u}_x^{(i)} &= \mathbf{B} \mathbf{u}_y^{(i-1)} \end{aligned} \quad (10.10)$$

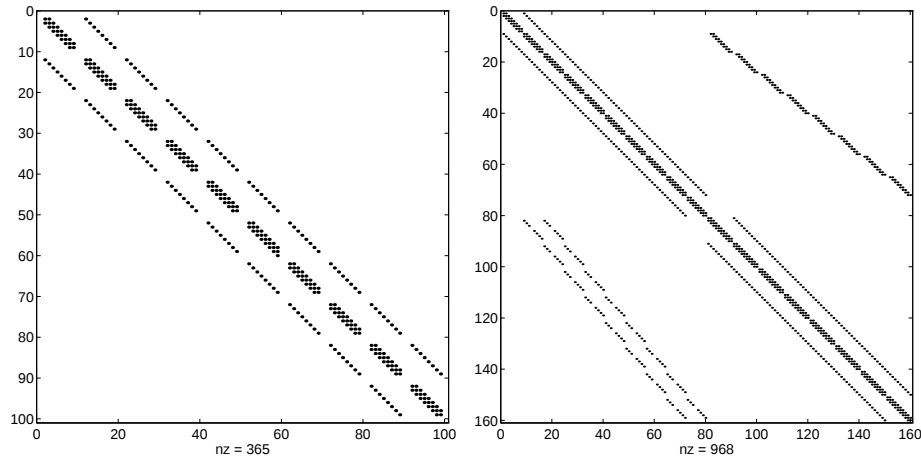
Ze względu na wzajemne sprzężenie obu równań (za pośrednictwem macierzy $\mathbf{C}_x$ i $\mathbf{C}_y$) układ ten najprościej jest rozwiązać również iteracyjnie, w *wewnętrznej* pętli z krokami j , powtarzanej w każdym kroku i , według następującego algorytmu.

$$\begin{aligned} &\text{start : } \mathbf{u}_y^{(i)(0)} \\ &\text{dla } j = 1, 2, \dots : \\ &\quad \text{rozwiązać: } \mathbf{A}_x \mathbf{u}_x^{(i)(j)} = -\mathbf{C}_y \mathbf{u}_y^{(i)(j-1)} + \mathbf{B} \mathbf{u}_x^{(i-1)} \longrightarrow \mathbf{u}_x^{(i)(j)} \\ &\quad \text{rozwiązać: } \mathbf{A}_y \mathbf{u}_y^{(i)(j)} = -\mathbf{C}_x \mathbf{u}_x^{(i)(j)} + \mathbf{B} \mathbf{u}_y^{(i-1)} \longrightarrow \mathbf{u}_y^{(i)(j)} \end{aligned} \quad (10.11)$$

Możliwe są różne modyfikacje tego algorytmu polegające głównie na wyborze iteracyjnej metody rozwiązywania układu dwóch równań macierzowych.

Do rozwiązania niezależnych już równań w (10.11) można użyć algebraicznej metody wielosiatkowej. Zbieżność wewnętrznej pętli iteracji (po j), a co za tym idzie, zbieżność całego algorytmu na obliczanie wartości własnych sprawdzono w [47] wykorzystując do rozwiązania równań macierzowych metodę bezpośrednią opartą na FFT. Mimo dużej szybkości metody bezpośrednie nie nadają się do rozwiązywania problemów o złożonej geometrii, w których wzrost rozmiaru macierzy dyskretnego operatora powoduje gigantyczny wzrost zapotrzebowania na pamięć operacyjną. Metody wielosiatkowe osiągają zbliżoną szybkość lecz przy umiarkowanym rozmiarze numerycznym zadania.

Zgodnie z pierwszym wariantem zaproponowanej koncepcji obliczania wartości własnej, do rozwiązania niezależnych już równań w (10.11) użyto algebraicznej metody wielosiatkowej. Zbieżność wewnętrznej pętli iteracji (po j), a co za tym idzie, zbieżność całego algorytmu na obliczanie wartości własnych sprawdzono w [47]. Metody wielosiatkowe osiągają szybkość zbliżoną do optymalnych metod bezpośrednich, lecz przy umiarkowanym rozmiarze numerycznym zadania, co ma szczególne znaczenie w rozwiązywaniu problemów o złożonej geometrii.



Rysunek 10.2: Rozkład elementów niezerowych w macierzach zdyskretyzowanych operatorów różniczkowych (5-elementowy schemat różnic skończonych dla ∇^2) – macierze $\mathbf{A}_x$ i $\mathbf{A}_{xy}$ dla siatki 10×10 w przekroju falowodu prostokątnego z niejednorodnym wypełnieniem

Układ (10.10) można sprowadzić do równoważnej postaci pojedynczego równania macierzowego o dwukrotnie większym rozmiarze, gdzie wektor niewiadomych zawiera jednocześnie obie składowe pola, $\mathbf{u}_x$ i $\mathbf{u}_y$.

$$\mathbf{A}_{xy} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x^{(i)} \\ \mathbf{u}_y^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{u}_x^{(i-1)} \\ \mathbf{B} \mathbf{u}_y^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

$$\mathbf{A}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{C}_y \\ \mathbf{C}_x & \mathbf{A}_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{xy}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x^{(i)} \\ \mathbf{u}_y^{(i)} \end{bmatrix}$$

Sprzężenie pomiędzy równaniami (czyli składowymi $\mathbf{u}_x$ i $\mathbf{u}_y$) będzie wówczas zachodziło wewnątrz samej macierzy $\mathbf{A}_{xy}$ poprzez podmacierze pozadiagonalne $\mathbf{C}_x$

i $\mathbf{C}_y$. W tym przypadku ilorazy Rayleigha, oblicza się według zależności:

$$RQ_{AC}^{(i)} = \frac{\langle \mathbf{u}_{xy}^{(i)}, \mathbf{B} \mathbf{u}_{xy}^{(i-1)} \rangle}{\langle \mathbf{u}_{xy}^{(i)}, \mathbf{B} \mathbf{u}_{xy}^{(i)} \rangle} \quad (10.13)$$

Zbędne będzie już stosowanie iteracyjnego schematu (10.11), jednak pozostanie do rozwiązania równanie o podwojonym rozmiarze i dwukrotnie zagęszczonej macierzy. Na dodatek pogorszą się numeryczne właściwości macierzy $\mathbf{A}_{xy}$ w stosunku do $\mathbf{A}_x$ i $\mathbf{A}_y$ – oprócz trzech pasm ułożonych blisko przekątnej (pięcioelementowa dyskretyzacja drugich pochodnych) pojawią się dwa odległe pasma w podmacierzach pozadiagonalnych (rys.10.2).

Taka postać macierzy całkowicie wyklucza możliwość stosowania proponowanej w [47] metody bezpośredniej z pakietu FISHPAK. Podobnych ograniczeń nie mają metody iteracyjne, w tym metody wielosiatkowe. Przy zastosowaniu algebraicznej metody wielosiatkowej należy oczekiwać nieco ponad 4-krotnego zwiększenia wydatku numerycznego w stosunku do pojedynczego równania macierzowego z układu (10.10). Składa się na to podwojenie liczby iteracji w skutek podwojenia liczby niewiadomych (obciążenie numeryczne $O(N)$) oraz dwukrotne wydłużenie poszczególnych iteracji poprzez wzrost liczby mnożeń na elementach niezerowych w wierszach macierzy. Zatem rozwiązanie pojedynczego równania (10.10) przyniesie oszczędności czasu obliczeń w stosunku do układu równań, jeśli tylko algorytm (10.11) potrzebowałby więcej niż 2 kroki iteracji.

W celu przedstawienia drugiego wariantu algorytmu (wykorzystanie metody wielosiatkowej bezpośrednio do równania różniczkowego) przekształcimy równania (10.10) do ich pierwotnej różniczkowej postaci i zastosujemy algorytm iteracyjny analogiczny do (10.11).

(i – ty krok iteracji na RQ)

start : $u_y^{(i)(0)}$

dla $j = 1, 2, \dots$:

rozwiązać równanie ze względu na $u_x^{(i)(j)}$

$$(\nabla_t^2 - \beta^2)u_x^{(i)(j)} - \frac{\partial \epsilon_r}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_x^{(i)(j)}}{\partial y} = -\frac{\partial \epsilon_r}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_y^{(i)(j-1)}}{\partial x} - \epsilon_r u_x^{(i-1)} \quad (10.14)$$

rozwiązać równanie ze względu na $u_y^{(i)(j)}$

$$(\nabla_t^2 - \beta^2)u_y^{(i)(j)} - \frac{\partial \epsilon_r}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_y^{(i)(j)}}{\partial y} = -\frac{\partial \epsilon_r}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_x^{(i)(j)}}{\partial x} - \epsilon_r u_y^{(i-1)}$$

Podobnie jak w algorytmie (10.11) czynniki sprzęgające (pochodna po prawej stronie równania) można traktować jako dane, uzyskane z poprzedniej iteracji, i na przemian rozwiązywać niezależne już równania różniczkowe.

Bezpośrednie zastosowanie metody wielosiatkowej do rozwiązywania równań eliptycznych różniczkowych w (10.14) daje możliwość skorzystania z adaptacyjnego zagęszczania siatki dyskretyzującej te równania. Należy jednak pamiętać, że w kolejnych krokach iteracji zarówno po i jak i j rozwiązuje się inny problem ciągły, modyfikowany jest bowiem przez uaktualnienie wartości niewiadomych z poprzedniego

kroku $(u^{(i)(j-1)}, u^{(i-1)})$ traktowanych jako dane z prawej strony równań. Za każdym więc razem będzie generowana adaptacyjnie inna siatka dyskretyzacji. Nawet po uzyskaniu dostatecznej zbieżności obu pętli iteracji każdy z obu wektorów własnych będzie określony na innej siatce. Trzeba zatem adaptacyjną metodę wielosiatkową wzbogacić o procedurę transformującą zdyskretyzowane wektory niewiadomych na dowolną siatkę, inną niż ta adaptacyjnie wygenerowana w trakcie rozwiązywania równania różniczkowego.

10.1.5 Testy numeryczne

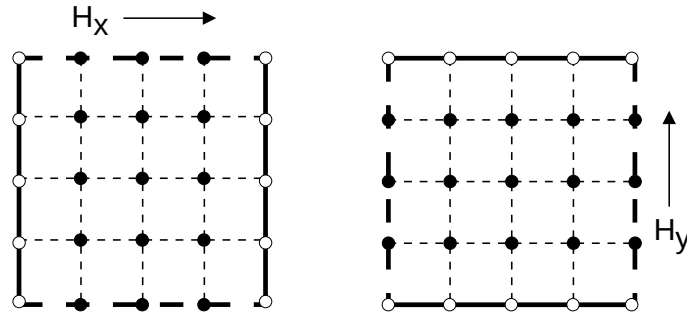
Przedstawione algorytmy oparte na algebraicznej metodzie wielosiatkowej zaimplementowano numerycznie w postaci programu w języku wewnętrznym pakietu MATLAB. Wybrano do tego celu wielosiatkowe procedury rozwiązywania układów równań liniowych zawarte z pakiecie MGLab [22]. Przetestowano właściwości podstawowych procedur wielosiatkowych – pojedynczy cykl-V i pełny wielosiatkowy (FMG – rys.2.7) porównując je z metodą bezpośrednią opartą na dekompozycji LU oraz metodą iteracyjną dla macierzy niesymetrycznych – BiCG. Testy przeprowadzono dla równania Helmholtza o stałych współczynnikach i Poissona, na obszarze równomiernie zdyskretyzowanym siatkami o podwajającej się gęstości.

równanie	metoda	15×15	31×31	61×61
Helmholtza	LU	0.083	0.99	16.20
	FMG	0.108	0.42	1.83
	V-cykl	0.278	1.11	4.58
	BiCG	0.666	1.31	5.66
Poissona	FMG	0.107	0.421	1.72

Tabela 10.1: Porównanie obciążenia numerycznego (Mflops) metod wielosiatkowych z metodą bezpośrednią (LU) i jednosiatkową iteracyjną (BiCG)

Widać, że metoda LU (bezpośrednia), która jest bardzo efektywna dla stosunkowo małych problemów z równaniem Helmholtza, gwałtownie pogarsza się przy zagęszczaniu siatki. Potwierdziło się, że dla przy analizie struktur o złożonej geometrii i silnych niejednorodnościach materiałów (gęsta siatka) bardzo, dobrze zachowują się metody iteracyjne, a w szczególności wielosiatkowe, z FMG na czele – prawie liniowy wzrost czasu obliczeń przy wzroście rozmiaru problemu. Nawet najprostszy algorytm wielosiatkowy, cykl-V przewyższa metodę jednosiatkową. Bardzo cenne jest również to, że FMG jest prawie niewrażliwy na zaburzenia symetrii macierzy, co przejawia się nieznaczną tylko poprawą szybkości przy uproszczeniu problemu do równania Poissona.

Opracowano procedurę dyskretyzującą skalarne równania Helmholtza dla składowych H_x i H_y w falowodzie prostokątnym przy pomocy różnic skończonych na regularnej siatce prostokątnej (rys. 10.3). Falowód wypełniony jest dielektrykiem bezstratnym o **dowolnie** zadanym profilu przenikalności $\epsilon_r(x, y)$.



Rysunek 10.3: Schemat dyskretyzacji rozkładów pola H_x i H_y w przekroju falowodu prostokątnego na siatce różnic skończonych. Ze względu na odmienne warunki brzegowe (— warunki Dirichleta, - - - warunki Neumanna) macierze operatorów i wektory niewiadomych mają dla składowych x i y różne położenie zer (kółka) i muszą zostać wzajemnie uzgodnione przed połączeniem ich w układ sprzężonych równań.

Przeprowadzono testy numeryczne dla falowodu prostokątnego o stosunku boków $a/b = 2$ ($x = 1 \dots a$ i $y = 1 \dots b$) dla trzech przypadków wypełnienia:

1. pusty falowód (dielektryk jednorodny) – częściowa weryfikacja poprawności programu i oszacowanie najbardziej korzystnego przypadku zbieżności
2. dielektryk o łagodnym profilu przenikalności
3. dielektryk o skokowym profilu przenikalności – zbadanie skuteczność metody przy dyskretyzacji nieciągłych pochodnych

Pusty falowód

Dla ustalenia jednostek przyjęto szerokość falowodu $a = 1\text{cm}$. Kolejne wartości własne $\lambda = k_0^2$ wyliczone dla $\beta = 0$ wyznaczają częstotliwości odcięcia [GHz] odpowiadającym im rodzajom pola. Przy dyskretyzacji na siatce $n_x/n_y = 11/6$ ($h = a/(n_x - 1) = b/(n_y - 1)$) częstotliwość graniczna rodzaju podstawowego $f_{g1} = 14.9384$ (wartość dokładna – 15.0), co daje błąd względny $\epsilon_{err} = 0.4\%$. Jest to wyłącznie błąd dyskretyzacji i może zostać zredukowany tylko poprzez zagęszczenie siatki. Określa również najlepszą teoretyczną dokładność możliwą do osiągnięcia przy niejednorodnie wypełnionym falowodzie.

Stała wartość przenikalności wewnątrz falowodu, zeruje pozadiagonalne macierze sprzężeń, co powoduje bardzo szybką zbieżność ilorazów Rayleigha. Już w dla 3 kroków iteracji $RQ^{(i)}$ dał wartość f_{g1} z dokładnością 4 miejsc po przecinku (14.9384). Niejednorodny dielektryk może spowodować tylko pogorszenie tego tempa zbieżności.

Dielektryk o łagodnym profilu przenikalności

Falowód ma wymiary jak w poprzednim teście, a profil przenikalności względnej dielektryka przyjęto za [47]:

$$\epsilon_r(x, y) = 1.0 + 1.5 \cdot \sin(\pi x/a) \cdot \cos(\pi y/2b) \quad (10.15)$$

Największa przenikalność $\epsilon_r = 2.5$ występuje w środku dolnej ścianki falowodu i łagodnie maleje do 1.0 przy pozostałych ściankach. Można sobie wyobrazić, że jest to falowód typu „image” o „rozmytych” brzegach. Analizę takiego falowodu odnaleziono tylko w [47], jednak nie można odnieść się do obliczonych tam wartości własnych, gdyż nie podano wszystkich ich parametrów. Zostaną za to zweryfikowane charakterystyki zbieżności ilorazów Rayleigha. Przebieg iteracji $RQ^{(i)}$ i $RQ_{AC}^{(i)}$ dla rodzaju najniższego, na siatce 11/6, liczonych według zależności (10.9) i (10.13), przedstawiono, w przeliczeniu na częstotliwość odcięcia, w tabeli 10.2 i na rys. 10.4.

N_j	RQ_{AC}		$RQ(N_j)$	
	$f_{g1}[\text{GHz}]$	$Mflops$	$f_{g1}[\text{GHz}]$	$Mflops$
1	11.1000	0.19	4.6380	0.07
2			10.0741	0.15
3			11.0539	0.20
4			11.0983	0.26
5			11.1000	0.34

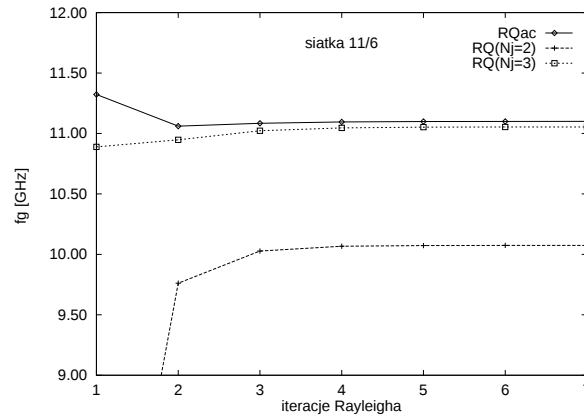
Tabela 10.2: Zbieżność pętli wewnętrznej dla falowodu z dielektrykiem o profilu gradientowym

N_j to założona liczba kroków w pętli wewnętrznej, która iteracyjnie rozwiązuje układ równań sprzężonych według algorytmu (10.11), w każdym kroku iteracji po i z ilorazami Rayleigha. Korzystając z drugiej metody (10.13) wewnętrzna pętla w ogóle nie istnieje, gdyż w iteracjach na $RQ_{AC}^{(i)}$ rozwiązuje się już tylko jedno równanie z macierzą $\mathbf{A}_{xy}$. Zgodnie z oczekiwaniami, czasochłonność (w Mflops) obu algorytmów zrównuje się przy założeniu $N_j = 3$ kroki iteracji wewnętrznej.

Przykładowe rozkłady poprzecznych składowych pola magnetycznego w falowodzie, dla dwóch pierwszych rodzajów przedstawiono na rys. 10.5. Należy zaznaczyć, że stosunkowo dobra symetria rozkładów pola na tak rzadkiej siatce (11/6) wynika z małych gradientów przenikalności dielektryka.

Dielektryk o skokowym profilu przenikalności

Jest to falowód typu „image” o identycznych wymiarach jak poprzednio. Na środku dolnej ścianki znajduje się prostokątna wkładka z dielektryka o przenikalności $\epsilon_r = 2.5$ i wymiarach $0.4a \times 0.4b$. Podobnie jak poprzednio, zestawiono wartości częstotliwości odcięcia rodzaju podstawowego liczone z iteracji $RQ^{(i)}$ i $RQ_{AC}^{(i)}$ na siatce 11/6 – tabela 10.3 i rys. 10.7.



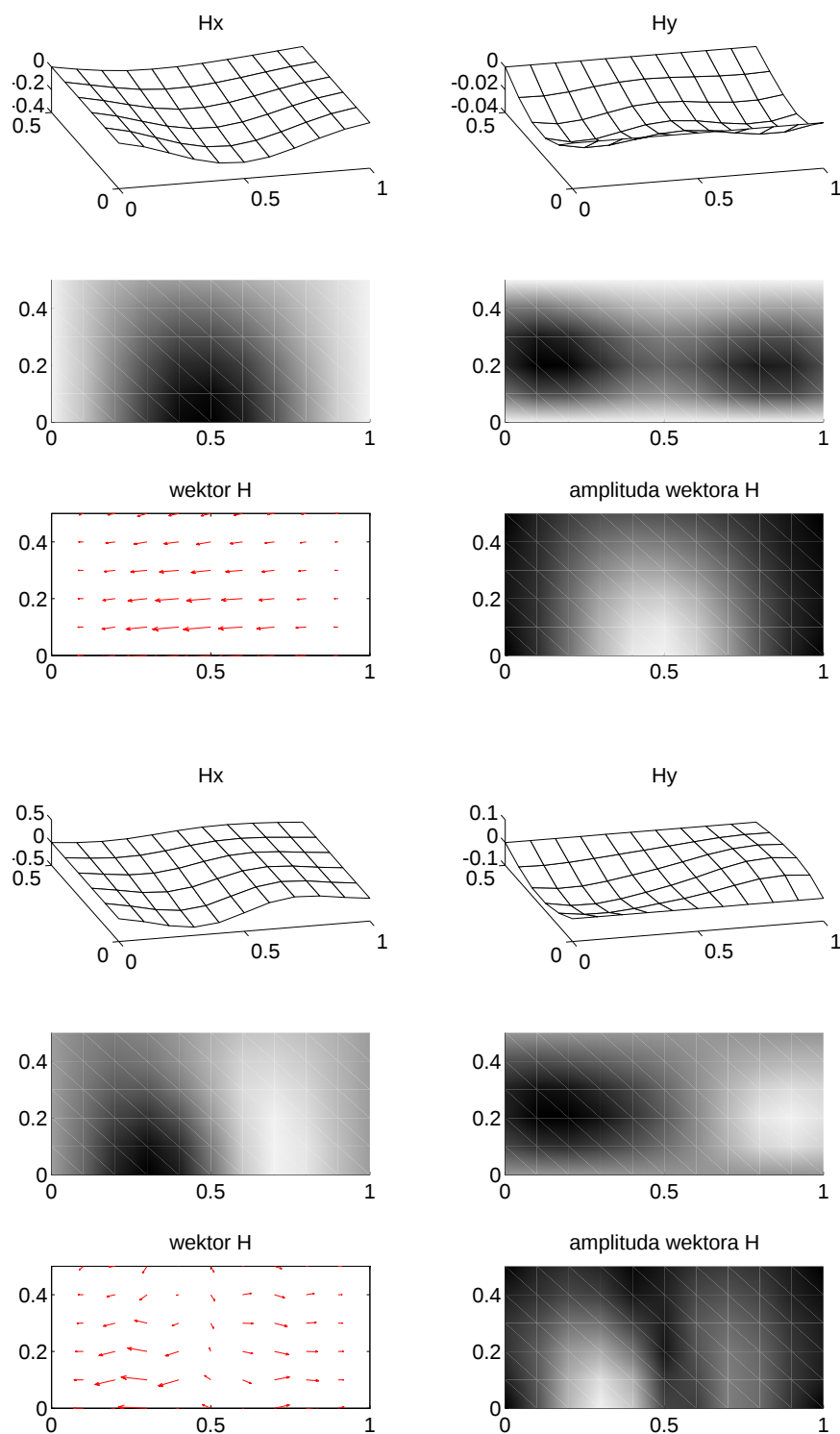
Rysunek 10.4: Zbieżność iteracji ilorazów Rayleigha bez pętli wewnętrznej ($RQ_{AC}^{(i)}$) i z pętlą ($RQ^{(i)(N_j)}$) dla dielektryka o płynnych zmianach przenikalności.

N_j	RQ_{AC}		$RQ(N_j)$	
	$f_{g1}[\text{GHz}]$	$Mflops$	$f_{g1}[\text{GHz}]$	$Mflops$
1	11.8310	0.12	9.9119	0.08
2			11.8242	0.16
3			11.8310	0.24
4			11.8310	0.31

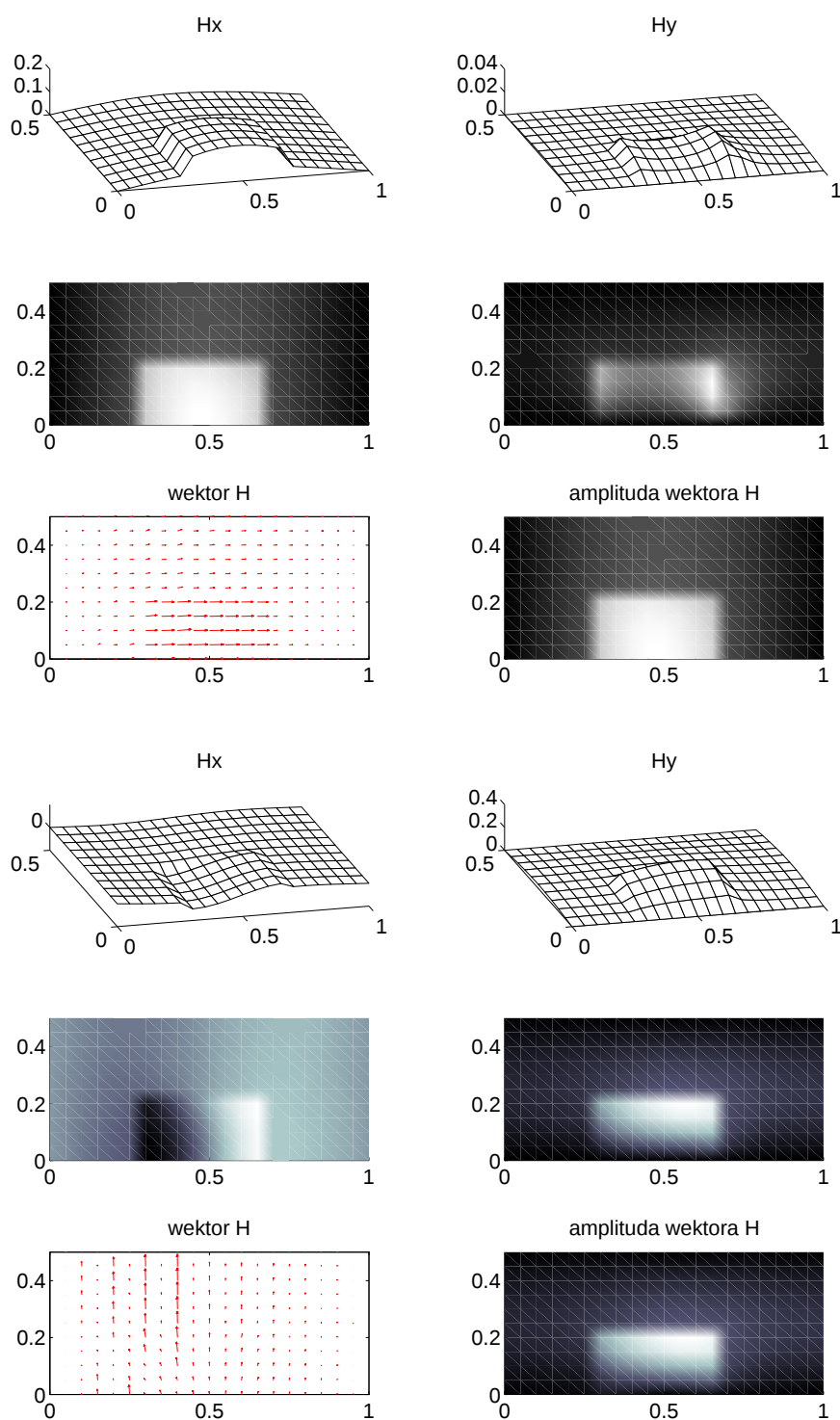
Tabela 10.3: Zbieżność pętli wewnętrznej dla falowodu „image”

Właściwości algorytmów z ilorazami Rayleigha są zbliżone do przypadku poprzedniego, co świadczy o małej wrażliwości na nieciągłości dielektryka w falowodzie.

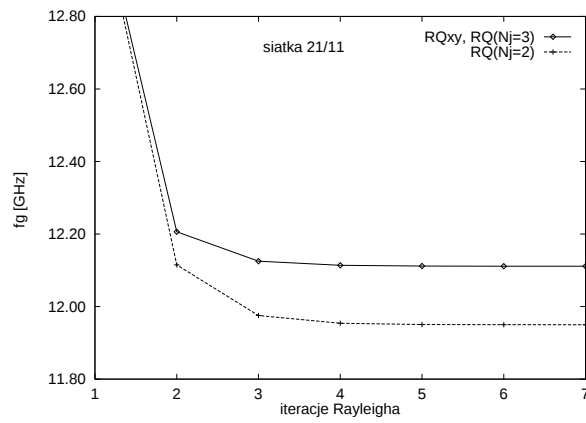
Obliczenia porównano z wynikami podanymi w [89]. Przedstawioną tam wartość $\beta/k_0 = 1.5320$ otrzymano dla podstawowego rodzaju przy częstotliwości równoważnej $k_0/a = 25$. Wyniki otrzymane w tych samych warunkach przy pomocy tutaj prezentowanej metody wynoszą 1.5495 (błąd 1.14%) na siatce 11/6 i 1.5414 (błąd 0.63%) na siatce 21/11. Widać, że nieciągłości w przenikalności dielektryka wypełniającego falowód wymagają dyskretyzacji problemu na gęstej siatce; przypomnijmy, że w stosunku do falowodu pustego, dokładność na siatce 11/6 spadła z wartości 0.4% aż do 1.16%. Z tego powodu przykładowe rozkłady pola magnetycznego w falowodzie tyłu „image” przedstawiono dla gęstszej siatki – 21/11 (rys. 10.6).



Rysunek 10.5: Rozkład składowych poprzecznych pierwszych dwóch rodzajów pola magnetycznego w falowodzie o płynnym profilu wypełnienia; „wektor H” oznacza $\vec{H}_t$; siatka – 11/6; częstotliwości odcięcia – $f_{g1} = 11.1000$ GHz, $f_{g2} = 22.5691$ GHz



Rysunek 10.6: Rozkład składowych poprzecznych pierwszego i drugiego rodzaju pola magnetycznego w falowodzie typu „image”; siatka – 21/11; częstotliwości odcięcia – $f_{g1} = 12.1111$ GHz, $f_{g2} = 25.4851$ GHz



Rysunek 10.7: Zbieżność iteracji ilorazów Rayleigha bez pętli wewnętrznej ($RQ_{AC}^{(i)}$) i z pętlą ($RQ^{(i)(N_j)}$) dla falowodu typu „image” – dielektryk o skokowych zmianach przenikalności.

10.2 Analiza pełnofalowa 3D

10.2.1 Sformułowanie równania falowego

Rozważymy na początek ogólną trójwymiarową strukturę nieciągłości ograniczonej metalowymi ekranami, która może zawierać niejednorodne wypełnienie z bezstratnych dielektryków izotropowych.

Gdyby wypełnienie dielektryczne było jednorodne, wówczas wektorowe równanie falowe dla pól w strukturze sprowadziłoby się do postaci skalarnego równania Helmholtza ze względu na funkcję $u(x, y, z)$ reprezentującą dowolnie wybraną składową pola:

$$(\nabla_{x,y,z}^2 + k^2) u(x, y, z) = f(x, y, z) \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \quad (10.16)$$

Prawa strona równania reprezentuje testowe pobudzenia rodzajem pola, dla którego struktura ma być scharakteryzowana. Pobudzenia mogą występować jedynie na granicy i tylko jako warunki brzegowe, w taki sposób, że dziedzina analizy nadal uznawana jest za obszar bez źródeł. Funkcję $f(x, y, z)$ przywołano więc jedynie po to, aby odróżnić przedstawiany tu problem deterministyczny od zagadnienia własnego.

Problem komplikuje się jednak w przypadku niejednorodnego wypełnienia struktury. Żeby uniknąć trudności związanych z ewentualnymi osobliwościami i nieciągłościami składowych pola $\vec{E}$ z powodu istnienia uskoków dielektryka, wygodnie jest sformułować równanie falowe ze względu na wektor natężenia pola magnetycznego $\vec{H}$. Dla składowych pola równanie wektorowe przyjmuje postać trzech **sprzężonych** równań skalarnych [118]:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - k^2) H_x &= \frac{\partial \epsilon_r}{\epsilon_r \partial y} \cdot \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \epsilon_r}{\epsilon_r \partial z} \cdot \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ (\nabla^2 - k^2) H_y &= \frac{\partial \epsilon_r}{\epsilon_r \partial z} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial \epsilon_r}{\epsilon_r \partial x} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ (\nabla^2 - k^2) H_z &= \frac{\partial \epsilon_r}{\epsilon_r \partial x} \cdot \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial \epsilon_r}{\epsilon_r \partial y} \cdot \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (10.17)$$

Przedstawiając (10.17) na siatce różnic lub elementów skończonych otrzymuje się równoważny problem dyskretny w formie trzech sprzężonych równań macierzowych:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x \mathbf{u}_x + \mathbf{C}_{xy} \mathbf{u}_y + \mathbf{C}_{xz} \mathbf{u}_z &= \mathbf{b}_x \\ \mathbf{C}_{yx} \mathbf{u}_x + \mathbf{A}_y \mathbf{u}_y + \mathbf{C}_{yz} \mathbf{u}_z &= \mathbf{b}_y \\ \mathbf{C}_{zx} \mathbf{u}_x + \mathbf{C}_{zy} \mathbf{u}_y + \mathbf{A}_z \mathbf{u}_z &= \mathbf{b}_z \end{aligned} \quad (10.18)$$

gdzie macierze i wektory są następującymi odpowiednikami funkcji i operatorów ciągłych:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_x &= \mathbf{L} + K_y \mathbf{D}_y + K_z \mathbf{D}_z & \mathbf{C}_{xy} &= -K_y \mathbf{D}_x & \mathbf{C}_{xz} &= -K_z \mathbf{D}_x \\
\mathbf{A}_y &= \mathbf{L} + K_z \mathbf{D}_z + K_x \mathbf{D}_x & \mathbf{C}_{yz} &= -K_z \mathbf{D}_y & \mathbf{C}_{yx} &= -K_x \mathbf{D}_y \\
\mathbf{A}_z &= \mathbf{L} + K_x \mathbf{D}_x + K_y \mathbf{D}_y & \mathbf{C}_{zx} &= -K_x \mathbf{D}_z & \mathbf{C}_{zy} &= -K_y \mathbf{D}_z
\end{aligned} \tag{10.19}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &\leftarrow \nabla^2 + k^2 & \mathbf{u}_x &\leftarrow H_x & \mathbf{u}_y &\leftarrow H_y & \mathbf{u}_z &\leftarrow H_z \\
\mathbf{D}_x &\leftarrow -\frac{\partial}{\partial x} & \mathbf{D}_y &\leftarrow -\frac{\partial}{\partial y} & \mathbf{D}_z &\leftarrow -\frac{\partial}{\partial z} \\
K_x &\leftarrow \frac{\partial \epsilon_r}{\epsilon_r \partial x} & K_y &\leftarrow \frac{\partial \epsilon_r}{\epsilon_r \partial y} & K_z &\leftarrow \frac{\partial \epsilon_r}{\epsilon_r \partial z}
\end{aligned} \tag{10.20}$$

Wektory $\mathbf{b}_x$, $\mathbf{b}_y$, $\mathbf{b}_z$ zawierają pobudzenia pola zadane w postaci warunków brzegowych nałożonych na operatory różniczkowe.

10.2.2 Rozwiązanie równań falowych za pomocą metod wielosiatkowych

Zostaną przedstawione możliwości zastosowania standardowych metod wielosiatkowych dla pojedynczych równań różniczkowych do rozwiązywania wektorowego równania falowego przekształconego do postaci sprzężonych równań Helmholtza.

Spotykane w literaturze doniesienia na temat wielosiatkowych metod rozwiązywania równań Helmholtza dotyczą jedynie pojedynczego równania (10.16), które w kontekście elektrodynamiki odpowiada skalarnemu równaniu falowemu. Podobnie jak to miało miejsce w przypadku zagadnień własnych, przypadek równania wektorowego w formie trzech sprzężonych równań Helmholtza (10.17) wymaga oryginalnego podejścia. Opierając się na analogicznym do przedstawionego w poprzednim rozdziale (str. 156) algorytmie iteracyjnego eliminowania kolejnych wektorów niewiadomych [47] zaproponowano zastosowanie metod wielosiatkowych (MG) do efektywnego obliczania wszystkich składowych pola. Identycznie jak w zagadnieniach własnych, możliwe są dwa warianty takiego podejścia:

1. rozwiązywanie równań macierzowych (10.18) uzyskanych po wcześniejszej dyskretyzacji równań różniczkowych (układ sprzężonych skalarnych równań Helmholtza) – *algebraiczne* lub *abstrakcyjne metody wielosiatkowe*
2. rozwiązanie równań różniczkowych (przekształconych z układu równań Helmholtza) – metoda wielosiatkowa zintegrowana z procedurą dyskretyzacji

Algorytm obliczeniowy

Ze względu na wzajemne sprzężenie układu równań (10.18) układ ten można rozwiązać iteracyjnie, w pętli z krokami i . W każdym kroku rozwiązywane jest kolejno jedno równanie, w którym wyrazy z macierzami sprzęgającymi $\mathbf{C}_{jk}$ ($j, k = x, y, z$) przenoszone są na prawą stronę. Dwa pozostałe wektory niewiadomych zastępuje się ich przybliżeniami uzyskanymi w poprzednich iteracjach według następującego algorytmu:

$$\begin{aligned}
 &\text{start : } \mathbf{u}_y^{(0)}, \mathbf{u}_z^{(0)} \\
 &\text{dla } i = 1, 2, \dots : \\
 &\quad \text{rozwiązać:} \\
 &\quad \quad \mathbf{A}_x \mathbf{u}_x^{(i)} = \mathbf{b}_x - \mathbf{C}_{xy} \mathbf{u}_y^{(i-1)} - \mathbf{C}_{xz} \mathbf{u}_z^{(i-1)} \longrightarrow \mathbf{u}_x^{(i)} \\
 &\quad \text{rozwiązać:} \\
 &\quad \quad \mathbf{A}_y \mathbf{u}_y^{(i)} = \mathbf{b}_y - \mathbf{C}_{yx} \mathbf{u}_x^{(i)} - \mathbf{C}_{yz} \mathbf{u}_z^{(i-1)} \longrightarrow \mathbf{u}_y^{(i)} \\
 &\quad \text{rozwiązać:} \\
 &\quad \quad \mathbf{A}_z \mathbf{u}_z^{(i)} = \mathbf{b}_z - \mathbf{C}_{zx} \mathbf{u}_x^{(i)} - \mathbf{C}_{zy} \mathbf{u}_y^{(i)} \longrightarrow \mathbf{u}_z^{(i)}
 \end{aligned} \tag{10.21}$$

Zgodnie z pierwszym wariantem zaproponowanej koncepcji, do rozwiązania każdego z niezależnych już równań w każdym kroku iteracji (10.21) użyto abstrakcyjnej (uproszczonej algebraicznej) metody wielosiatkowej. Metody wielosiatkowe osiągają szybkość zbliżoną do optymalnych metod bezpośrednich, lecz przy umiarkowanym rozmiarze numerycznym zadania, co ma szczególne znaczenie w rozwiązywaniu problemów o złożonej geometrii.

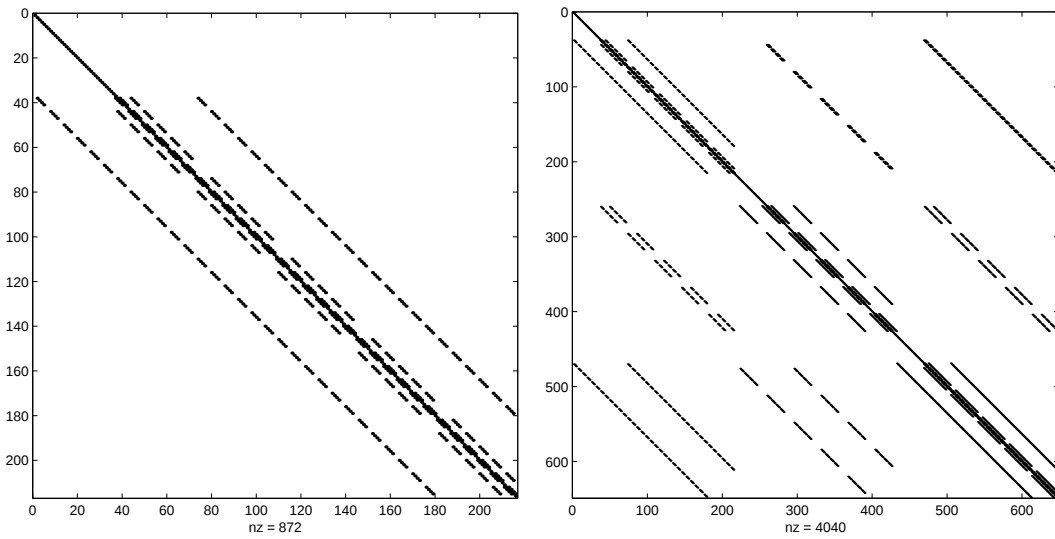
Dokładność rozwiązania całego procesu iteracji rośnie w miarę wykonywania kolejnych kroków, nie ma więc potrzeby rozwiązywania poszczególnych równań ze zbyt dużą dokładnością. Stosując metody wielosiatkowe takie ograniczenie można wprowadzić zawężając w cyklu FMG stopień zagęszczenia siatek. Coraz dokładniejsze siatki poszerzające zakres elementarnego cyklu V byłyby wprowadzane w miarę osiągania przez cykl (10.21) coraz lepszej dokładności.

Układ (10.18) można sprowadzić do równoważnej postaci pojedynczego równania macierzowego o trzykrotnie większym rozmiarze, gdzie wektor niewiadomych zawiera jednocześnie wszystkie składowe pola, $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ i $\mathbf{u}_z$.

$$\mathbf{A}_{xyz} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_y \\ \mathbf{b}_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{xyz} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{C}_{xy} & \mathbf{C}_{xz} \\ \mathbf{C}_{yx} & \mathbf{A}_y & \mathbf{C}_{yz} \\ \mathbf{C}_{zx} & \mathbf{C}_{zy} & \mathbf{A}_z \end{bmatrix} \tag{10.22}$$

Sprzężenie pomiędzy równaniami będzie wówczas zachodziło wewnątrz samej macierzy $\mathbf{A}_{xyz}$ poprzez podmacierze pozadiagonalne $\mathbf{C}_{jk}$.

Zbędne będzie już stosowanie iteracyjnego schematu (10.21), jednak pozostanie do rozwiązania równanie o potrojonym rozmiarze i trzykrotnie zagęszczonej macierzy. Na dodatek pogorszą się numeryczne właściwości macierzy $\mathbf{A}_{xyz}$ w stosunku do $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ i $\mathbf{A}_z$ – oprócz pasm ułożonych blisko przekątnej (7-elementowa dyskretyzacja drugich pochodnych) pojawią się odległe pasma w podmacierzach pozadiagonalnych (rys.10.8). Taka postać macierzy może znacznie spowolnić zbieżność metody,



Rysunek 10.8: Rozkład elementów niezerowych w macierzach zdyskretyzowanych operatorów różniczkowych (7-elementowy schemat różnic skończonych dla ∇^2) – macierze $\mathbf{A}_x$ i $\mathbf{A}_{xyz}$ dla siatki $n_x/n_y/n_z = 6/6/6$ w falowodzie prostokątnym z dielektrykiem o gradientowym profilu przenikalności (patrz rozdział 10.2.3).

a w szczególnych przypadkach nawet całkowicie ją zahamować. Ponadto rozproszone w ten sposób niezerowe elementy macierzy mogą skutecznie utrudnić zrównoleglenie algorytmu. W korzystnym przypadku, gdy zbieżność metody nie zostanie wyraźnie zaburzona (elementy w pobliżu głównej przekątnej będą dominować), należałoby oczekiwać nieco ponad 9-krotnego zwiększenia wydatku numerycznego w stosunku do pojedynczego równania macierzowego z układu (10.18). Składa się na to potrojenie liczby iteracji wynikające z potrojenia liczby niewiadomych (obciążenie numeryczne $O(N)$) oraz trzykrotne wydłużenie poszczególnych iteracji poprzez wzrost liczby mnożeń na elementach niezerowych w wierszach macierzy. Jednoczesne rozwiązywanie równań układu w postaci równania z macierzą $\mathbf{A}_{xyz}$ ma jeszcze jedną wadę. W przeciwieństwie do procedury iteracyjnej nie można zaoszczędzić na czasie obliczeń ograniczając żadaną dokładność do założonego błędu dyskretyzacji.

W drugim wariantcie algorytmu pętla iteracji zawierać będzie trzy niezależne równania różniczkowe (10.17) ze względu na jedną z kolejnych trzech składowych pola, podczas gdy pozostałe dwie składowe zostaną przybliżone rozwiązaniami osiągniętymi w poprzednich iteracjach. W tym przypadku możliwe będzie zastosowanie adaptacyjnej metody wielosiatkowej wprost do równania różniczkowego. Pamiętać należy jednak, że adaptacyjne zagęszczanie siatki będzie zachodziło inaczej dla rozkładu każdej ze składowych pola. Ponieważ jednak rozwiązanie uzyskiwane iteracyjnie dla każdego z równań jest wykorzystywane przez pozostałe, konieczne będzie cykliczne przenoszenie wyników pomiędzy różnymi siatkami. Procedura taka może być numerycznie kosztowna, jeżeli każda z siatek oparta będzie na nie pokrywających się układach węzłów, co ma zwykle miejsce przy dyskretyzacji elementami skończonymi.

Na koniec warto jeszcze zwrócić uwagę na przypadek, w którym niejednorodność

dielektryka ograniczono tylko do jednego kierunku. Jest to sytuacja dość powszechna w układach planarnych, gdzie dielektryk tworzy podłoże jednorodne w obydwu kierunkach równoległych do powierzchni metalizacji. Przyjmując, że powierzchnie metalizacji są prostopadłe do osi OY , wyrazy K_x i K_z w (10.20) zerują się, a układ równań po dyskretyzacji przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x \mathbf{u}_x + \mathbf{C}_{xy} \mathbf{u}_y &= \mathbf{b}_x \\ \mathbf{A}_y \mathbf{u}_y &= \mathbf{b}_y \\ \mathbf{C}_{zy} \mathbf{u}_y + \mathbf{A}_z \mathbf{u}_z &= \mathbf{b}_z \end{aligned} \quad (10.23)$$

Mimo, iż równania nadal pozostają ze sobą sprzężone, można je rozwiązać w jednym tylko kroku, jako sekwencję trzech **niezależnych** równań:

$$\begin{aligned} \text{rozwiązać: } \mathbf{A}_y \mathbf{u}_y &= \mathbf{b}_y & \longrightarrow & \mathbf{u}_y^* \\ \text{rozwiązać: } \mathbf{A}_x \mathbf{u}_x &= \mathbf{b}_x - \mathbf{C}_{xy} \mathbf{u}_y^* & \longrightarrow & \mathbf{u}_x^* \\ \text{rozwiązać: } \mathbf{A}_z \mathbf{u}_z &= \mathbf{b}_z - \mathbf{C}_{zy} \mathbf{u}_y^* & \longrightarrow & \mathbf{u}_z^* \end{aligned} \quad (10.24)$$

10.2.3 Testy numeryczne

Przedstawione algorytmy oparte na algebraicznej metodzie wielosiatkowej zaimplementowano numerycznie w postaci programu w języku wewnętrznym pakietu MATLAB. Wybrano do tego celu wielosiatkowe procedury rozwiązywania układów równań liniowych zawarte z pakiecie MGLab [22], które rozbudowano dla potrzeb zagadnień 3-wymiarowych. Procedury te realizują abstrakcyjne metody wielosiatkowe, bowiem użytkownik musi sam przygotować macierze równań różniczkowych zdyskretyzowanych na wszystkich zaplanowanych poziomach zagęszczenia siatki.

Opracowano procedurę dyskretyzującą skalarne sprzężone równania Helmholtza dla składowych H_x i H_y , H_z w falowodzie prostokątnym o wymiarach $a \times b \times c$ ($x = 0 \dots a$, $y = 0 \dots b$, $z = 0 \dots c$), przy pomocy różnic skończonych na **nierównomiernej** siatce prostokątnej. Dyskretyzacja w każdym z kierunków może być dokonywana z indywidualnie dobranym i zmieniającym się krokiem. Falowód wypełniony jest dielektrykiem bezstratnym o **dowolnie** zadanym profilu przenikalności $\epsilon_r(x, y, z)$.

W kierunku propagacji (z) falowód zamknięty jest warunkami granicznymi, które umożliwią określenie elementów macierzy rozproszenia. We wrotach wejściowych ($z = 0$) założono pobudzenie wybranym rodzajem pola w pustym odcinku falowodu wymuszając odpowiedni rozkład składowych w przekroju poprzecznym wrót. Do testów wybrano rodzaj podstawowy (TE_{10} przy założeniu, że $b > a$) i pracę w zakresie jednorodząjowym. Na wyjściu ($z = c$) falowód obciążono warunkami absorbcyjnymi, dla rodzaju pobudzonego na wejściu, w postaci:

$$u_{(c+h)} = u_{(c)} e^{-j\beta h} \quad (10.25)$$

Podczas kolejnych testów przebadano charakterystyki zbieżności iteracyjnego rozwiązywania układu równań falowych według algorytmu (10.21). Ażeby uniknąć mieszania błędów zbieżności badanego algorytmu z błędami metod iteracyjnych (w

tym wielosiatkowych) dla poszczególnych równań układu, do ich rozwiązywania użyto metody dokładnej – GE. Za miarę rozwiązania przyjęto wypadkową normę energetyczną wektorów rozkładu przestrzennego składowych pola w postaci:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\|\mathbf{u}_x\|^2 + \|\mathbf{u}_y\|^2 + \|\mathbf{u}_z\|^2} \quad (10.26)$$

Wypadkowy wektor rozwiązania otrzymany w toku iteracji (10.21) oznaczmy jako

$$\mathbf{u}^{(i)} = \{\mathbf{u}_x^{(i)} \mathbf{u}_y^{(i)} \mathbf{u}_z^{(i)}\}$$

podczas gdy $\mathbf{u}_{xyz}$ oznacza wektor rozwiązania układu równań (10.22) z macierzą $\mathbf{A}_{xyz}$.

Wprowadzono dwie miary zbieżności – względna zmiana $\mathbf{u}$ pomiędzy kolejnymi iteracjami:

$$\delta^{(i)} = \frac{\|\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}^{(i-1)}\|}{\|\mathbf{u}^{(i)}\|} \quad (10.27)$$

oraz względny błąd rozwiązań w kolejnych iteracjach w stosunku do rozwiązania z macierzą $\mathbf{A}_{xyz}$:

$$\delta_{xyz}^{(i)} = \frac{\|\mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}_{xyz}\|}{\|\mathbf{u}_{xyz}\|} \quad (10.28)$$

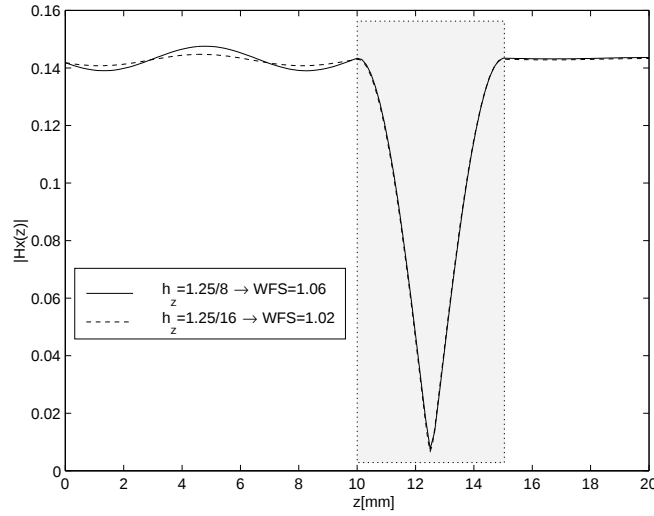
Przeprowadzono testy numeryczne dla falowodu prostokątnego dla trzech przypadków wypełnienia:

1. falowód z jednorodną przegrodą dielektryczną – weryfikacja absorbcyjnych warunków brzegowych i skuteczności różnic skończonych przy uskoju dielektryka
2. dielektryk o gradientowym profilu przenikalności – zbadanie skuteczności metody przy rozległym sprzężeniu równań (maksymalnie wypełnione macierze sprzęgające)
3. dielektryk o skokowym profilu przenikalności – zbadanie skuteczności metody przy punktowym sprzężeniu równań na uskokach dielektryka

Przyjęto stałe rozmiary falowodu: $a \times b \times c = 10 \times 5 \times 20$ [mm],

Falowód z przegrodą dielektryczną

W falowodzie umieszczono przegrodę dielektryczną jednorodną w całym przekroju falowodu, dla $z = 10 \dots 15$ mm. Przenikalność ($\epsilon_r = 1.63$) dobrano tak, żeby dla testowej częstotliwości ($k_o = 0.55$) grubość przegrody wynosiła pół długości fali w dielektryku. Kształt fali stojącej przed dielektrykiem (patrząc od strony pobudzenia) powinien idealnie odtwarzać falę stojącą za dielektrykiem, po stronie obciążenia. W przypadku obciążenia dopasowanego zamodelowanego przez absorbcyjny warunek brzegowy (10.25) przebieg amplitudy pola magnetycznego w falowodzie powinien być stały po obu stronach przegrody. Dielektryk wprowadza niejednorodność tylko w kierunku z i tylko pochodna $\frac{\partial \epsilon}{\partial z}$ daje wartości niezerowe (na obu powierzchniach przegrody), powodując częściowe rozprężenie układu równań do postaci typu



Rysunek 10.9: Rozkład fali stojącej składowej H_x w falowodzie z przegrodą półfalową ($z = 10 \dots 15 \text{ mm}$); $h_x = h_y = 1.25$, $h_z = 1.25/8$ i $1.25/16$ ($n_x/n_y/n_z = 9/5/129$ i 257).

(10.23). Składowa H_z wyliczana jest niezależnie od pozostałych i nie zależy też od pochodnych ϵ_r . Składowa $H_y = 0$ i tylko na H_x wpływ ma któraś z macierzy sprzęgających ($\mathbf{A}_x \mathbf{u}_x = \mathbf{b}_x - \mathbf{C}_{xz} \mathbf{u}_z$).

Obliczenia pokazały:

- brak fali stojącej w pustym odcinku falowodu przed obciążeniem; jedyne za-falowania rozkładu podłużnego amplitudy pola wynikły z błędu dyskretyzacji i szybko zanikały przy zagęszczaniu siatki wzdłuż kierunku z
- dla H_z brak fali stojącej przed przegrodą, podobnie jak przed obciążeniem
- dla H_x przed przegrodą większą falę stojącą niż dla H_z , której stłumienie wymagało dodatkowego zagęszczenia dyskretyzacji w kierunku z (rys.10.9); $WFS = 1.02$ dla liczby podziałów w kierunku z , $n_z = 257$

Dielektryk o gradientowym profilu przenikalności

Rozkład przenikalności względnej dielektryka przyjęto tak, aby pochodne ϵ_r we wszystkich kierunkach osiągały niezerowe wartości w możliwie największym obszarze.

$$\epsilon_r(x, y, z) = 1.0 + 1.5 \cdot \sin(\pi x/a) \cdot \cos(\pi y/2b) \cdot \sin(\pi z/c) \quad (10.29)$$

Największa przenikalność $\epsilon_r = 2.5$ występuje w środku dolnej ścianki falowodu i łągodnie maleje do 1.0 przy pozostałych ściankach. W ten sposób uzyskano naj-pięniejsze sprzężenie pomiędzy równaniami układu (10.18), co wyraża się również maksymalnym dogęszczeniem całkowitej macierzy układu równań $\mathbf{A}_{xyz}$ (rys. 10.8). Dla siatki $n_x/n_y/n_z = 9/5/33$ liczba elementów niezerowych w całej macierzy $\mathbf{A}_{xyz}$

(o rozmiarze 4455×4455) wynosi 31602, z czego na macierze sprzęgające $\mathbf{C}_{ij}$ (daleko od przekątnej) przypada aż 26% (8246 elementów).

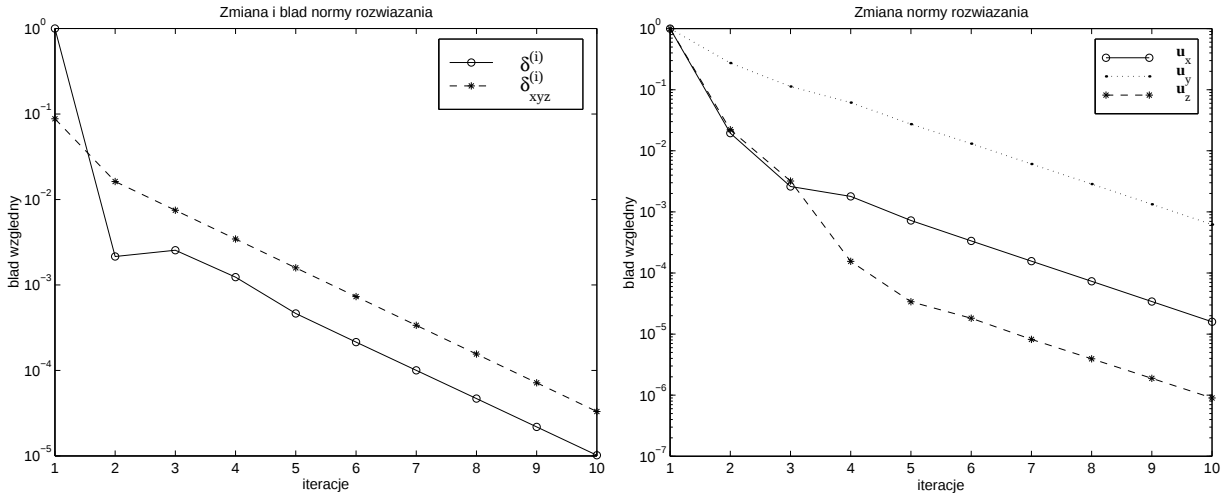
i	$\mathbf{u}_{xyz}$		$\mathbf{u}^{(i)}$		
	$\ \mathbf{u}_{xyz}\ $	Mflops	$\ \mathbf{u}^{(i)}\ $	Mflops	$\delta_{xyz}^{(i)}$
1			5.4411	67	8.8e-2
2			5.4294	133	1.6e-2
3			5.4156	200	7.5e-3
4			5.4089	267	3.5e-3
5			5.4114	334	1.6e-3
6			5.4103	401	7.3e-4
7			5.4108	467	3.4e-4
8			5.4106	534	1.6e-4
9			5.4107	601	7.2e-5
10	5.4107	770	5.4106	667	3.3e-5

Tabela 10.4: Wydatek numeryczny na rozwiązanie sprzężonego układu równań dla dielektryka o gradientowym profilu przenikalności (siatka 9/5/33).

Przebieg iteracji (10.21) rozwiązywania układu równań sprzężonych dla siatki 9/5/33 (1485 węzłów) przedstawiono w tabeli 10.4 i na rys. 10.10. Widać, iż korzyść płynąca z zastosowania iteracyjnego rozwiązywania sprzężonych równań Helmholtza jest znaczna. Jeśli przyjmie się, że błąd dyskretyzacji na stosunkowo rzadkiej siatce, jaką zastosowano w tym przykładzie, jest większy niż 0.1%, to oszczędność czasu obliczeń w stosunku do równania z macierzą A_{xyz} wynosi ponad połowę. Wynika to ze znacznego rozproszenia elementów w tej macierzy. Z drugiej strony stosunkowo małe wartości pochodnych ϵ_r powodują zmniejszenie sprzężenia między kolejnymi równaniami w cyklu iteracyjnym.

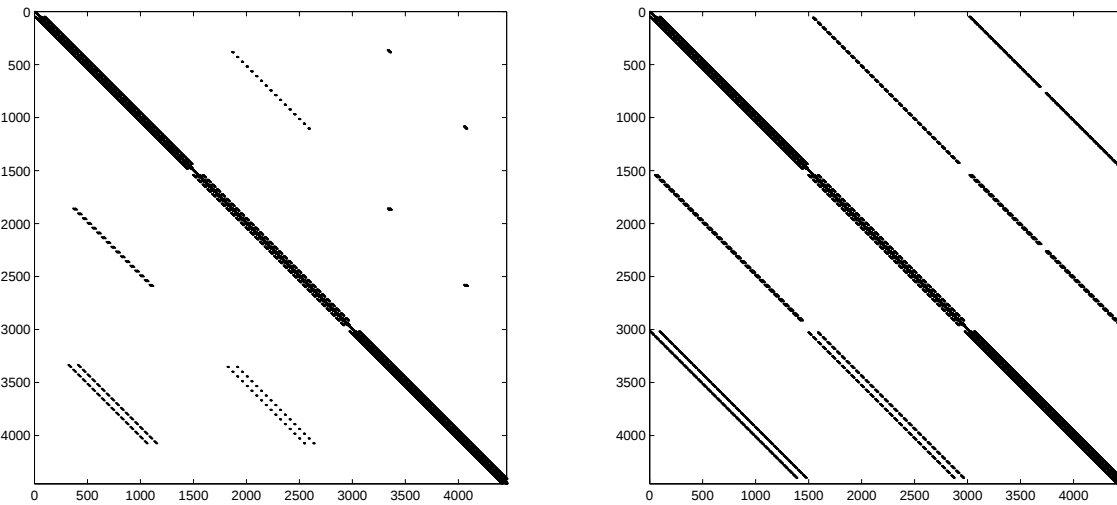
Dielektryk o skokowym profilu przenikalności

Jest to odcinek falowodu typu „image” z dołączonymi po obu stronach odcinkami falowodu pustego. Na środku dolnej ścianki znajduje się prostopadłościenna wkładka z dielektryka o przenikalności $\epsilon_r = 2.5$ i wymiarach $0.5a \times 0.5b \times 0.5c$. Idealny uskok przenikalności przybliżono liniową zmianą $\epsilon_r = 1 \dots \epsilon_{r\max}$, która zachodzi w obrębie dwóch kroków dyskretyzacji. Niezerowe pochodne występują tylko na ściankach dielektryka. W efekcie układ równań pozostaje w pełni sprzężony, lecz poprzez macierze, które zawierają minimalną liczbę elementów niezerowych (rys.10.11). Sprzężenie zachodzi w nielicznych tylko punktach, jednak wartości współczynników mogą być bardzo duże (pochodne w nieciągłościach rozkładu przenikalności). Dla siatki $n_x/n_y/n_z = 9/5/33$ liczba elementów niezerowych w całej macierzy $\mathbf{A}_{xyz}$ (o rozmiarze 4455×4455) wynosi 24136, z czego na macierze sprzęgające $\mathbf{C}_{ij}$ (daleko od przekątnej) przypada tylko 3% (780 elementów), to jest prawie o rząd mniej niż w analogicznej macierzy dla dielektryka o gradientowym rozkładzie przenikalności. Różnica ta maleje wraz z rozmiarem macierzy, i tak dla siatki 6/6/6 (macierz



Rysunek 10.10: Zbieżność iteracyjnego rozwiązania sprzężonego układu równań dla dielektryka o gradientowym profilu przenikalności – $\delta_{xyz}^{(i)}$ i $\delta^{(i)}$ dla wypadkowego wektora pola (z lewej) i $\delta^{(i)}$ dla poszczególnych składowych (z prawej)

648×648) stosunek ten wynosi już tylko 16% do 11%.



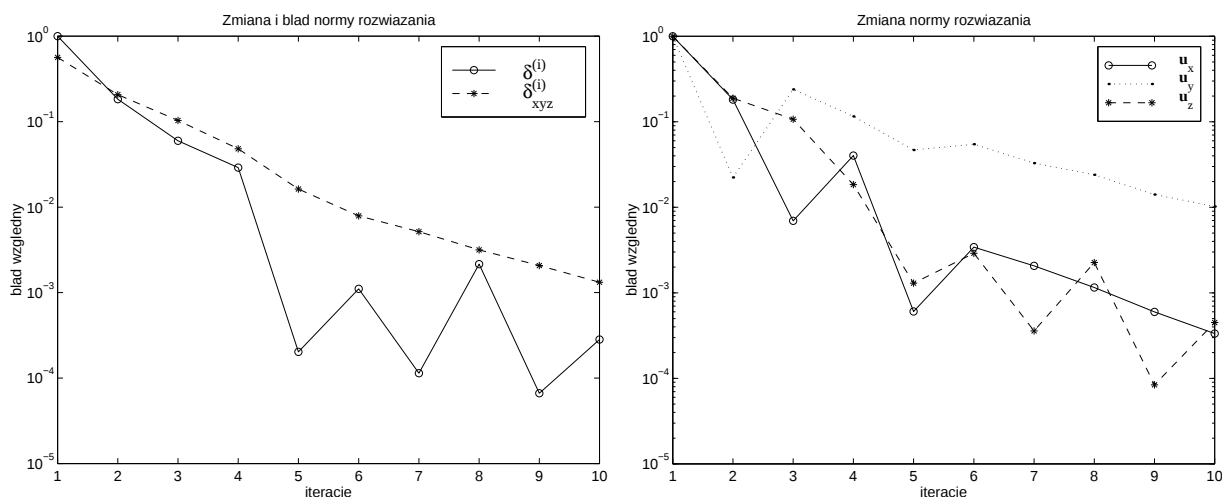
Rysunek 10.11: Porównanie rozkładu elementów niezerowych w macierzy $\mathbf{A}_{xyz}$ dla siatki $n_x/n_y/n_z = 9/5/33$ w falowodzie prostokątnym z dielektrykiem o skokowym (z lewej) i gradientowym (z prawej) profilu przenikalności.

Przebieg iteracji (10.21) rozwiązywania układu równań sprzężonych dla siatki $9/5/33$ (1485 węzłów) przedstawiono w tabeli 10.5 i na rys. 10.12. Algorytm iteracyjny wykazuje zbieżność, jednak wyraźnie gorszą niż w przypadku gradientowego dielektryka. Zrównanie kosztu numerycznego nastąpiło przy błędzie około 2%, co może już być porównywalne z błędem dyskretyzacji. Przeciwnie niż dla łagodnych zmian przenikalności sprzężenie pomiędzy równaniami układu jest duże, zaś liczba elementów odległych od głównej przekątnej w macierzy $\mathbf{A}_{xyz}$ jest stosunkowo mała. Jedyną więc korzyść w stosunku do jednoczesnego rozwiązywania układu równań

polega na znacznej oszczędności pamięci operacyjnej przy sekwencyjnym rozwiązywaniu równań o trzykrotnie mniejszych macierzach. Bilans ten może się wyraźnie poprawić jeżeli metoda bezpośredniego rozwiązywania równań macierzowych zostanie zastąpiona metodami iteracyjnymi (w tym wielosiatkowymi). Wtedy duże wartości elementów w podmacierzach sprzęgających $\mathbf{C}_{ij}$ zahamują zbieżność iteracji na macierzy $\mathbf{A}_{xyz}$.

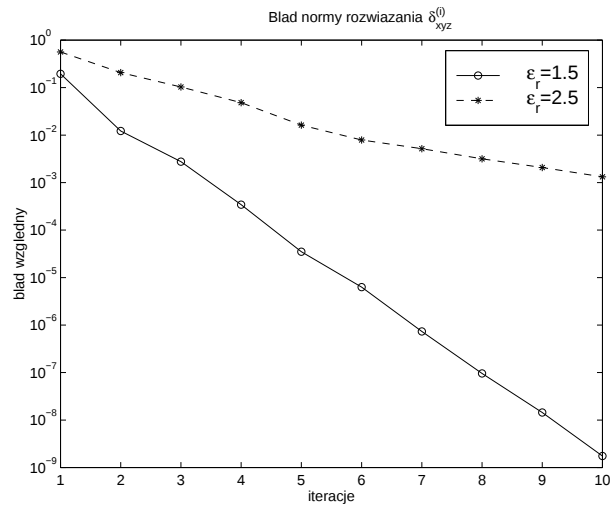
i	$\mathbf{u}_{xyz}$		$\mathbf{u}^{(i)}$		
	$\ \mathbf{u}_{xyz}\ $	Mflops	$\ \mathbf{u}^{(i)}\ $	Mflops	$\delta_{xyz}^{(i)}$
1	6.6146	303	5.2484	66	5.6e-1
2			6.4253	132	2.1e-1
3			6.8328	199	1.0e-1
4			6.6400	265	4.8e-2
5			6.6387	331	1.6e-2
6			6.6313	398	7.9e-3
7			6.6306	465	5.2e-3
8			6.6163	531	3.2e-3
9			6.6159	597	2.1e-3
10			6.6159	664	1.3e-3

Tabela 10.5: Wydatek numeryczny na rozwiązanie sprzężonego układu równań dla dielektryka o skokowym profilu przenikalności (siatka 9/5/33).



Rysunek 10.12: Zbieżność iteracyjnego rozwiązania sprzężonego układu równań dla dielektryka o skokowym profilu przenikalności – $\delta_{xyz}^{(i)}$ i $\delta^{(i)}$ dla wypadkowego wektora pola (z lewej) i $\delta^{(i)}$ dla poszczególnych składowych (z prawej)

Tak istotny wpływ wielkości czynników sprzęgających na zbieżność algorytmu iteracyjnego potwierdził się zmniejszając wartość ϵ_r z 2.5 na 1.5. Mniejsze wartości pochodnych przenikalności dielektryka wyraźnie poprawiły parametry iteracji (rys.10.13)



Rysunek 10.13: Wpływ ϵ_r na zbieżność iteracyjnego rozwiązania sprzężonego układu równań dla dielektryka o skokowym profilu przenikalności – $\delta_{xyz}^{(i)}$

* * *

Przedstawiono wielowariantową procedurę przyspieszania pełnofalowej analizy pola e-m w strukturach z dowolnym niejednorodnym wypełnieniem dielektrycznym opartą na zastąpieniu wektorowego równania falowego przez sekwencję iteracyjnie rozwiązywanych **skalnych** równań Helmholtza. Algorytm ten umożliwia na kilka sposobów zastosowanie bardzo efektywnych i uniwersalnych metod wielosiatkowych. Jego skuteczność potwierdzono dla skrajnych przypadków niejednorodności dielektryka – przenikalność o rozkładzie gradientowym lub skokowym. Wskazano mechanizm wrażliwości zbieżności algorytmu na gwałtowne zmiany ϵ_r umożliwiając tym samym przyszłe próby wyeliminowania tego efektu.

Rozdział 11

Podsumowanie

W pracy wykazano postawione na wstępie tezy opierając się na istniejących wynikach badań oraz następujących oryginalnych osiągnięciach własnych.

- Wyznaczenie statycznego rozkładu skalarnego potencjału magnetycznego w strukturach niesymetrycznych (powierzchnia rozdziału) za pomocą metod wielosiatkowych z elementami skończonymi – rozwinięcie koncepcji powierzchni rozdziału potencjału z FD do metody FE.
- Ekstrapolacja rozwiązania metodą korekcji błędem estymowanym użyta do poprawy dokładności aproksymacji oraz jej rozwinięcie metody w połączeniu z ekstrapolacją Richardsona.
- Efektywna procedura generacji siatki 3D dla układów planarnych na podstawie siatki 2D.
- Metody rozwiązania wektorowych równań falowych przy użyciu prostych procedur wielosiatkowego rozwiązywania problemów skalarnych – zagadnienia własne 2D i deterministyczne 3D.
- Hybrydowa metoda analizy struktur z wielkimi obszarami jednorodnymi – połączenie metody wielosiatkowej z rozwinięciem funkcyjnym.

Posługiwano się w tym celu analizą teoretyczną oraz eksperymentem numerycznym, który w miarę potrzeb był weryfikowany wynikami analitycznymi, symulacją wykonaną innymi metodami analizy, w szczególności metodami pełnofalowymi lub na podstawie danych eksperymentalnych dostępnych w literaturze.

Do testów numerycznych wykorzystano istniejące oprogramowanie publiczne oraz stworzono szereg własnych procedur i programów w językach kompilowanych FORTRAN 77, FORTRAN 90, C++ oraz skryptowych MATLAB, awk i Perl. Prace numeryczne prowadzono w systemach operacyjnych UNIX, Linux i Windows95/98. Wykorzystywano przy tym zasoby sprzętowe i programowe Katedry Techniki Mikrofalowej i Telekomunikacji Optycznej, Wydziału Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, Centrum Obliczeniowego PG i TASK oraz własne.

Uzyskane wyniki zachęcają do kontynuowania prac nad nowymi technikami stosowania metod wielosiatkowych w analizie układów mikrofalowych, dotyczącymi szerzej klasy zagadnień lub o jeszcze lepszej sprawności. Możliwe kierunki rozwoju to

- metody wielopoziomowe bez siatek przestrzennej dyskretyzacji
- metody wielosiatkowe w analizie struktur nieliniowych
- inne rozwiązania pełnofalowe z zastosowaniem metod wielosiatkowych
- metody wielosiatkowe dla problemów zmiennych w czasie
- algorytmy zrównoleglone
- dekompozycja dziedziny w układach mikrofalowych
- nowe sposoby poszerzania pasma częstotliwości dla modeli quasi-statycznych.

Spis literatury

- [1] A. Arnone, A. Sestini. Multigrid heat transfer calculations using different iterative schemes. *Numer. Heat Transf. B, Fundam.*, 19:1–11, 1991.
- [2] P.E. Atlamazoglou, G.C. Pagiatakis, N.K. Uzunoglu NK. A multilevel formulation of the finite-element method for electromagnetic scattering. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 47:1071–9, 1999.
- [3] O. Axelsson, P. S. Vassilevski. Algebraic multilevel preconditioning methods. Part II. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27:1569–1590, 1990.
- [4] I. Babuška, A. Aziz. On the angle condition in the finite element method. *SIAM J. Numer. Analysis*, 13:214–227, 1976.
- [5] I. Babuška, W. C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computatuions. *SIAM J. Numer. Analysis*, 15:736–754, 1978.
- [6] I. Babuška, M.B. Rosenzweig. A finite element scheme for domains with corners. *Numer. Math.*, 20:1–21, 1973.
- [7] R. E. Bank. Analysis of a multilevel inverse iteration procedure for eigenvalue problems. *SIAM J. Numer. Analysis*, 19:886–898, 1982.
- [8] R. E. Bank. *PLTMG: A Software Package for Solving Elliptic Partial Differential Equations – Users’ Guide 7.0*, wolumen 15 serii *Frontiers in Applied Mathematics*. SIAM Books, Philadelphia, 1994.
- [9] R. E. Bank, T. Dupont, H. Yserentant. The hierarchical basis multigrid method. *Numer. Math.*, 52:427–458, 1988.
- [10] R. E. Bank, A. H. Sherman. An adaptive multi-level method for elliptic boundary value problems. *Computing*, 26:91–105, 1981.
- [11] R. E. Bank, R. K. Smith. A posteriori error estimates based on hierarchical bases. *SIAM J. Numer. Analysis*, 30:921–935, 1993.
- [12] R. E. Bank, A. Weiser. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Math. Comput.*, 44:283–301, 1985.

- [13] R. E. Bank, J. Xu. The hierarchical basis multigrid method and incomplete LU decomposition. *Domain Decomposition Methods in Scientific and Engineering Computing: Proceedings of the Seventh International Conference on Domain Decomposition*, wolumen 180 serii *Contemporary Mathematics*, strony 163–173, Providence, Rhode Island, 1994. American Mathematical Society.
- [14] R.E. Bank, C. Wagner. Multilevel ILU decomposition. *Numer. Math.*, 82:543–576, 1999.
- [15] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. van der Vorst. *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [16] R. Beck. Graph based algebraic multigrid for Lagrange type finite elements on simplicial meshes. Preprint SC 99-22, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin, 1999.
- [17] R. Beck, P. Deuffhard, R. Hiptmair, R. H. W. Hoppe, B. Wohlmuth. Adaptive multilevel methods for edge element discretizations of Maxwell's equations. *Surveys Math. Industry*, 8(3–4):271–312, 1999.
- [18] R. Beck, R. Hiptmair. Multilevel solution of the time-harmonic Maxwell equations based on edge elements. *Int. J. Num. Meth. Engr.*, 45(7):901–920, 1999.
- [19] A. Björck, G. Dahlquist. *Metody numeryczne*. PWN, Warszawa, 1983.
- [20] H. Blum, Q. Lin, R. Rannacher. Asymptotic error expansion and Richardson extrapolation for linear finite elements. *Numer. Math.*, 49:11–37, 1986.
- [21] Y. M. Bo, W. X. Zhang. The method of multilevel moments with multiplicative correction for EM problems. *IEEE Antennas Propagat. Soc. Int. Symp. Dig.*, strony 888–91, New York, 1993.
- [22] J. Bordner, F. Saied. MGLab: An iterative multigrid environment. *Proceedings of the 7th Cooper Mountain Multigrid Conference*, Colorado, 1995.
- [23] F. Bornemann, B. Erdmann, R. Kornhuber. Adaptive multilevel-methods in three space dimensions. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 36:3187–3203, 1993.
- [24] F. A. Bornemann, P. Deuffhard. The cascadic multigrid method for elliptic problems. *Numer. Math.*, 75:135–152, 1996.
- [25] D. Braess. Towards algebraic multigrid for elliptic problems of second order. *Computing*, 55:379–393, 1995.
- [26] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, J. Xu. Parallel multilevel preconditioners. *Math. Comp.*, 55:1–22, 1990.

- [27] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, J. Xu. Parallel multilevel preconditioners. *Math. Comp.*, 55:1–22, 1990.
- [28] A. Brandt. Multi-level adaptive technique (MLAT) for fast numerical solution to boundary value problems. H. Cabannes, R. Teman, redaktorzy, *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, wolumen 18 serii *Lecture Notes in Physics*, strony 82–89, Berlin, 1973. Springer-Verlag.
- [29] A. Brandt. Guide to multigrid development. W. Hackbusch, U. Trottenberg, redaktorzy, *Multigrid Methods*, wolumen 960 serii *Lecture Notes in Mathematics*, strony 220–312. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [30] A. Brandt. Stages in developing multigrid solutions. E. Absi, R. Glowinski, P. Lascaux, H. Veyseyre, redaktorzy, *Numerical Methods for Engineers (Proc. 2nd Int. Congr.)*, strony 23–43. Dunod, Paris, 1982.
- [31] A. Brandt. Algebraic multigrid theory: The symmetric case. *Appl. Math. Comput.*, 19:23–56, 1986.
- [32] A. Brandt. Multilevel computations of integral transforms and particle interaction with oscillatory kernels. *Comput. Phys. Commun.*, 65:24–38, 1991.
- [33] A. Brandt, M. Galun, D. Ron. Optimal multigrid algorithms for calculating thermodynamic limits. *J. Stat. Phys.*, 74:313–348, 1994.
- [34] A. Brandt, S. F. McCormick, J. W. Ruge. Algebraic multigrid (AMG) for sparse matrix equations. D. J. Evans, redaktor, *Sparsity and Its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [35] R. Briechle. Analyse von kammleitungsfiltren und ähnlichen baugruppen aus gekoppelten mehrleitersystemen. *Frequenz*, 29(4):94–100, 1975.
- [36] W. Briggs. *Multigrid tutorial*. SIAM, Philadelphia, 1987.
- [37] C. Carstensen, R. Verfürth. Edge residuals dominate a posteriori error estimates for low order finite element method. *SIAM J. Numer. Analysis*, 36(5), 1999.
- [38] T. F. Chan, B. F. Smith. Domain decomposition and multigrid algorithms for elliptic problems on unstructured meshes. *Domain Decomposition Methods in Scientific and Engineering Computing: Proceedings of the Seventh International Conference on Domain Decomposition*, wolumen 180 serii *Contemporary Mathematics*, strony 175–189, Providence, Rhode Island, 1994. American Mathematical Society.
- [39] C.W. Chiu, R.B. Wu. Capacitance computation for CPW discontinuities with finite metallization thickness by hybrid finite-element method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-45(4):498–504, 1997.

- [40] C.W. Chiu, R.B. Wu. A moment method analysis for coplanar waveguide discontinuity inductances. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-45:2468–2473, Dec. 1997.
- [41] V. Cingoski, K. Tsubota, H. Yamashita. Investigation of the efficiency of the multigrid method for finite element electromagnetic field computations using nested meshes. *IEEE Trans. on Magn.*, 35(no.5, pt.2):3751–3, 1999.
- [42] V. Cingoski, R. Tokuda, S. Noguchi, H. Yamashita. Fast multigrid solution method for nested edge-based finite element meshes. *IEEE Trans. on Magn.*, 36(no.4, pt.1):1539–42, 2000.
- [43] A. Costiner, S. Ta’asan. Adaptive multigrid techniques for large scale eigenvalue problems: solutions of the Schrodinger problem in two and three dimensions. *Phys. Rev. E, Stat. Phys. Plasmas Fluids Relat. Interdiscip. Top.*, 51(4, pt. B):3704–3717, 1995.
- [44] S. Costiner, F. Manolache, S. Ta’asan. Multilevel methods applied to the design of resonant cavities. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-43(1):48–55, 1995.
- [45] S. Costiner, S. Ta’asan. A robust multilevel simultaneous eigenvalue solver. ICASE Rep. 93-35, NASA Report 191491, 1993.
- [46] A. W. Craig, O. C. Zienkiewicz. A multigrid algorithm using a hierarchical finite element basis. D. J. Paddon, H. Holstein, redaktorzy, *Multigrid Methods for Integral and Differential Equations*, The Institute of Mathematics and its Applications Conference Series 3, strony 301–312. Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [47] J. B. Davies, F. A. Fernandez, Y. Fang. Finite-difference solution of inhomogeneous waveguide modes using a fast direct solver routine. *IEEE Trans. on Magn.*, 27(5):4028–4031, Sept. 1991.
- [48] J. P. de S. R. Gago, D. W. Kelly, O. C. Zienkiewicz, I. Babuška. A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part II – adaptive mesh refinement. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 19:1621–1656, 1983.
- [49] P. M. de Zeeuw. Matrix-dependent prolongations and restrictions in a black-box multigrid solver. *J. Comput. Appl. Math.*, 33:1–27, 1990.
- [50] C. C. Douglas. Madpack: A family of abstract multigrid or multilevel solvers. *Comput. Appl. Math.*, 14:3–20, 1995.
- [51] C. C. Douglas, M. B. Douglas. MGNet Bibliography. Department of Computer Science and the Center for Computational Sciences, University of Kentucky, Lexington, KY, USA and Department of Computer Science, Yale University, New Haven, CT, USA, 1991–2001 (last modified on May 21, 2001); see <http://www.mgnet.org/mgnet-bib.html>.

- [52] M. Dryja, J. M. Jankowsky. *Przegląd metod i algorytmów numerycznych – część. 2*. WNT, Warszawa, 1982.
- [53] R. E. Ewing. Domain decomposition techniques for efficient adaptive local grid refinement. T. F. Chan, R. Glowinski, J. Périaux, O. B. Widlund, redaktorzy, *Domain Decomposition Methods*, strony 192–206. SIAM, Philadelphia, 1989.
- [54] J. L. Fattebert. An inverse iteration method using multigrid for quantum chemistry. *BIT*, 36:509–522, 1996.
- [55] G. J. Fix, M. D. Gunzburger. On numerical methods for acoustic problems. *Comput. Math. Appl.*, 6:265–278, 1980.
- [56] T. Friese. On the computation of eigenmodes of integrated optical components. *Surveys Math. Industry*, 8(3–4):313–24, 1999.
- [57] F.E. Gardiol. *Lossy Transmission Lines*. Artech House, 1987.
- [58] G. H. Golub, C. F. van Loan. *Matrix Computations*. John Hopkins University, Baltimore, 1983.
- [59] K. Goverdhanam, L.P.B. Katehi, A. Cangellaris. Applications of multiresolution based FDTD multigrid. *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, wolumen 1, strony 333–6, 1997. Part. vol.1.
- [60] W. K. Gwarek. New capabilities of FD-TD software in microwave engineering applications. *1998 Asia-Pacific Microwave Conference – Workshop 2 Proc.*, strony 3–22, Yokohama, 1998.
- [61] G. Haase, M. Kuhn, U. Langer. Parallel multigrid 3d maxwell solvers. *Parallel Computing*, 27(6):761–75, 2001.
- [62] W. Hackbusch. On the computation of approximate eigenvalues and eigefunctions by means of a multigrid method. *SIAM J. Numer. Analysis*, 16:201–215, 1979.
- [63] W. Hackbusch. *Multigrid Methods and Applications*, wolumen 4 serii *Computational Mathematics*. Springer–Verlag, Berlin, 1985.
- [64] V. E. Henson, A. W. Shaker. Multigrid methods for a semilinear PDE in the theory of pseudoplastic fluids. N. D. Melson, T. A. Manteuffel, S. F. McCormick, redaktorzy, *Sixth Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, wolumen CP 3224, strony 231–242, Hampton, VA, 1993. NASA.
- [65] R. Hiptmair. Multigrid method for maxwell’s equations. *SIAM J. Numer. Analysis*, 36(1):204–25, 1998.
- [66] R. K. Hoffmann. *Integrierte Mikrowellenschaltungen*. Springer–Verlag, Heidelberg, 1983.

- [67] D. Jainsson. Multilayer microstrip directional coupler with discrete coupling. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-48:1591–1595, Sep. 2000.
- [68] L.F. Jelsma, E.D. Tweed, R.L. Phillips, R.W. Taylor. Boundary conditions for the four vector potential. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-18(9):648–649, 1970.
- [69] J.L.Herring, C.Christopoulos. The use of graded and multigrid techniques in transmission-line modelling. *Second Int. Conf. On Comp. In Electromagnetics*, strony 142–5, London, 1994. IEE.
- [70] K. Kalbasi, K. R. Demarest. A multilevel formulation of the method of moments (EM scattering). *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 41:589–99, 1993.
- [71] M. Kaltenbacher, S. Reitzinger, J. Schoberl. Algebraic multigrid method for solving 3d nonlinear electrostatic and magnetostatic field problems. *IEEE Trans. on Magn.*, 36(no.4 pt.1):1561–4, 2000.
- [72] A. Kiełbasiński, H.Schwetlick. *Numeryczna Algebra Liniowa*. WNT, Warszawa, 1992.
- [73] F. Krawczyk, T. Weiland, B. Steffen. Use of a multigrid solver in the MAFIA module s3 for electro- and magnetostatic problems. *IEEE Trans. on Magn.*, 26(2):747–50, 1990.
- [74] R. Kulke, Th. Sporkmann, I. Wolff. Multigrid technique with local grid refinement for solving static field problems RF circuits. *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, strony 29–32, New York, 1998. Part vol.1.
- [75] I.V. Lindell. On the quasi-TEM modes in inhomogeneous multiconductor transmission lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-29:812–817, 1981.
- [76] S. Lindenmeier, P. Russer. Design of planar. *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, 1997.
- [77] C. C. Lu, W. C. Chew. A multilevel algorithm for solving a boundary integral equation of wave scattering. *Microwave Optical Tech. Lett.*, 7(10):466–70, 1994.
- [78] C. C. Lu, J. M. Song, W. C. Chew. A multilevel fast multipole algorithm for solving 3d volume integral equations of electromagnetic scattering. *IEEE Antennas Propagat. Soc. Int. Symp. Dig.*, strony 1864–7, Piscataway, 2000. Part vol.4.
- [79] J. Mandel, S. McCormick. A multilevel variational method for $Au = \lambda Bu$ on composite grids. *J. Comp. Phys.*, 85:442–452, 1989.

- [80] B. F. Manolache, S. Costiner, S. Ta'asan, D.D. Sandu. Simultaneous multigrid techniques for the computation of close frequency eigenmodes in resonant cavities. *25th European Microwave Conference*, strony 964–7, Swanley, 1995. Part vol.2.
- [81] S. F. McCormick. *Multigrid Methods*, wolumen 3 serii *Frontiers in Applied Mathematics*. SIAM Books, Philadelphia, 1987.
- [82] S. F. McCormick. *Multilevel Adaptive Methods for Partial Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, 1989.
- [83] S. F. McCormick. Multilevel adaptive methods for elliptic eigenproblems: A two-level convergence theory. *SIAM J. Numer. Analysis*, 31:1731–1745, 1994.
- [84] K. Meerbergen. Shift-invert Arnoldi in practice. *ILAY Workshop on Eigenvalues*, Toulouse, 1995. CERFACS.
- [85] Y. Le Ménach, S. Clénet, F.Piriou. Determination and utilization of the source field in 3d magnetostatic problems. *IEEE Trans. on Magn.*, 34(5):2509–2512, Wrzesie/n 1998.
- [86] W. F. Mitchell. MGGHAT: elliptic PDE software with adaptive refinement, multigrid and high order finite elements. *Sixth Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, wolumen CP 3224, strony 439–448, Hampton, VA, 1993. NASA.
- [87] M.J.White, Z.Yun, M.F.Iskander. A new 3d FDTD multigrid technique with dielectric traverse capabilities. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-49(3):422–30, 2001.
- [88] P. Monk, Z. Shangyou. Multigrid computation of vector potentials. *J. Comp. App. Math.*, 62(3):301–20, 1995.
- [89] M. Mrozowski. *Eigenfunction expansion techniques in the numerical analysis of inhomogeneously loaded waveguides and resonators*. Zeszyt Naukowy PG Nr 512. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 1994.
- [90] M. Naghed. *Analyse Koplanarer Mikrowellenstrukturen mit der Methode der Quasistatischen Finiten-Differenzen*. Praca doktorska, Universität-Gesamthochschule-Duisburg, 1992.
- [91] M. Naghed, M. Rittwegner, I. Wolf. A new method for calculation of the equivalent inductances of coplanar waveguide discontinuities. *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, strony 747–750, 1991.
- [92] M. Naghed, I. Wolf. Equivalent capacitances of coplanar waveguide discontinuities and interdigitated capacitor using a three-dimensional finite differences method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-38:1808–1815, Dec. 1990.

- [93] K. Nyka. Zastosowanie metod wielosiatkowych do rozwiązywania problemów elektrodynamiki w przybliżeniu quasi-statycznym. *Mat. Konf. URSI*, Wrocław, 1996.
- [94] K. Nyka, M. Mrozowski. Combining function expansion and multigrid method for efficient analysis of MMICs. *Int. Microwave Symp. MIKON-96*, Warszawa, 1996.
- [95] K. Nyka, M. Mrozowski. Adaptive multigrid schemes for fast numerical characterization of passive microwave circuit. *1998 URSI Int. Symp. on Signals, Systems and Electronics*, strony 210–15, Pisa, Italy, 1998.
- [96] K. Nyka, M. Mrozowski. Analiza rozkładu magnetycznego potencjału skalarnego przy pomocy metod wielosiatkowych z elementami skończonymi. Raport Badawczy 50/2000, WETI PG, 2000.
- [97] K. Nyka, M. Mrozowski. Quasi-static finite-element analysis of a skewed microstrip crossover. *IEEE Microwave Wireless Components Lett.*, 2001. przyjęty do druku.
- [98] M. E. Oman. Fast multigrid techniques in total variation-based image reconstruction. N. D. Melson, T. A. Manteuffel, S. F. McCormick, C. C. Douglas, redaktorzy, *Seventh Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, wolumen CP 3339, strony 649–659, Hampton, VA, 1996. NASA.
- [99] S. Ooms, D. de Zutter. Diakoptics and the multilevel moments method for planar circuits. *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, strony 1803–6, 1997. Part vol.3.
- [100] G. Peng, R. Dyczij-Edlinger, J.F. Lee. Hierarchical methods for solving matrix equations from TVFEMs for microwave components. *IEEE Trans. on Magn.*, 35(no.3, pt.1):1474–7, 1999.
- [101] S. V. Polysytanko, J.F. Lee. Two-level hierarchical FEM method for modeling passive microwave devices. *J. Comput. Phys.*, 140(2):400–20, 1998.
- [102] B. M. A. Rahman, J. B. Davis. Vector-H finite element solution of GaAs/GaAlAs rib waveguide. *IEE Proc. Pt.J, Optoelectron.*, 132:349–353, 1985.
- [103] U. Van Rienen. *Numerical Methods in Computational Electrodynamics: Linear Systems in Practical Applications*. Springer, Berlin Heidelberg, 2001.
- [104] M. C. Rivara. Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques. *J. Numer. Meth. Engrg.*, 20:745–756, 1984.
- [105] U. Råde, W. Schmid. Inverse multigrid correction for generalized eigenvalue computations. Raport instytutowy Report 338, Universität Augsburg, 1995.

- [106] U. Ruede. Mathematical and computational techniques for multilevel adaptive methods. *SIAM*, Philadelphia, 1993.
- [107] J. W. Ruge, K. Stüben. Algebraic multigrid (AMG). S. F. McCormick, redaktor, *Multigrid Methods*, wolumen 3 serii *Frontiers in Applied Mathematics*, strony 73–130. *SIAM*, Philadelphia, PA, 1987.
- [108] Y. Saad. *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. Algorithms and Architectures for Advanced Scientific Computing. Manchester University Press, 1992.
- [109] M. Salazar-Palma, L. Garcia-Castillo. Self-adaptive procedures for waveguiding structure analysis. T. Itoh, G. Pelosi, P. P. Silvester, redaktorzy, *Finite Element Software for Microwave Engineering*, strony 401–432. John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [110] M. Salazar-Palma, T. K. Sarka, L. E. Garcia-Castillo, T. Roy, A. Djordjevic. *Iterative and Self-Adaptive Finite Elements in Electromagnetic Modeling*. Artech House, Boston, London, 1998.
- [111] M. Saraniti, A. Rein, G. Zandler, P. Vogl, P. Lugli. An efficient multigrid poisson solver for device simulations. *IEEE Trans. on CAD of Integrated Circuits Systems*, 15:141–50, 1996.
- [112] M. Schinnerl, J. Schoberl, M. Kaltenbacher. Nested multigrid methods for the fast numerical computation of 3d magnetic fields. *IEEE Trans. on Magn.*, 36(no.4, pt.1):1557–60, 2000.
- [113] F. Schmidt. KASKADE user's guide. Technical Report TR 95-11, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin, 1995.
- [114] F. Schmidt. Simultaneous computation of the lowest eigenvalues and eigenvectors of the Helmholtz equation. Technical Report TR 95-13, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, 1995.
- [115] J. Schöberl. *NETGEN-4.0*. Johannes Kepler Universität Linz, Austria, 2000.
- [116] K. J. Scott. *Practical Simulation of Printed Circuit Boards and Related Structures*. Research Studies Press, 1994.
- [117] D. M. Smith, A. D. Gosman. An application of multigrid with local grid refinement to fluid flow calculations. T. A. Manteuffel, S. F. McCormick, redaktorzy, *Preliminary Proceedings of the Fifth Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, wolumen 2, strony 151–172, Denver, 1991. University of Colorado.
- [118] D. C. Stinson. *Intermediate Mathematics of Electromagnetics*. Prentice-Hall.

- [119] K. Stüben, U. Trottenberg. Multigrid methods: Fundamental algorithms, model problem analysis and applications. W. Hackbusch, U. Trottenberg, redaktorzy, *Multigrid Methods*, wolumen 960 serii *Lecture Notes in Mathematics*, strony 1–176, Berlin, 1982. Springer–Verlag.
- [120] A. F. Thompson, A. Gopinath. Calculation of microstrip discontinuity inductances. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-23:648–655, Aug. 1975.
- [121] C. L. Tsai, W. S. Wang. An improved multigrid technique for quasi-TEM analysis of a microstrip embedded in an inhomogeneous anisotropic medium. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 45(5):678–86, 1997.
- [122] P. Vaněk, J. Mandel, M. Brezina. Algebraic multigrid by smoothed aggregation for second and fourth order elliptic problems. N. D. Melson, T. A. Manteuffel, S. F. McCormick, C. C. Douglas, redaktorzy, *Seventh Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, wolumen CP 3339, strony 721–735, Hampton, VA, 1996. NASA.
- [123] S. Velamparambil, W. C. Chew. A fast polynomial representation for the translation operators of an MLFMA EM scattering. *Microwave Optical Tech. Lett.*, 28(5):298–303, 2001.
- [124] R. Verfürth. *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*. Wiley-Teubner, Stuttgart, 1996.
- [125] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equation classical potential theory. *J. Comput. Phys.*, 60(2):187–207, 1985.
- [126] L. C. Waring, N. Rooney, A. Stewart, V. F. Fusco. The parallel computation of solutions to electrostatic problems using multigrid techniques. *Int. J. Num. Model.-Electronic Networks Devices and Fields*, 7(1):69–74, 1994.
- [127] P. Wesseling. Linear multigrid methods. S. F. McCormick, redaktor, *Multigrid Methods*, wolumen 3 serii *Frontiers in Applied Mathematics*, strony 31–55. SIAM, Philadelphia, 1987.
- [128] P. Wesseling. *An Introduction to Multigrid Methods*. John Wiley & Sons, 1992.
- [129] M. J. White, M. F. Iskander, Z. Huang. Development of a multigrid FDTD code for three-dimensional applications. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 45(10):1512–17, 1997.
- [130] S. R. White, J. W. Wilkins, M. P. Teter. Finite-element method for electronic structure. *Phys. Rev. B*, 39:5819–5833, 1989.
- [131] J. Włodarczyk. New multigrid interface for the TLM method. *Electron. Lett.*, 32(12):1111–12, 1996.
- [132] J. Wolska-Bochenek, i in. *Zarys teorii równań całkowych i różniczkowych równań cząstkowych*. PWN, Warszawa, 1981.

- [133] H. Yserentant. On the multi-level splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 49:379–412, 1986.
- [134] J. C. Zhao, W. C. Chew, C. C. Lu, E. Michielssen, J. Song. Thin-stratified medium fast-multipole algorithm for solving microstrip structures. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-46(4):395–403, 1998.
- [135] J. C. Zhao, W.C. Chew. MLFMA for solving integral equations of 2-d electromagnetic problems from static to electrodynamic. *Microwave Optical Tech. Lett*, 20(5):306–11, 1999.
- [136] O. C. Zienkiewicz. *Metoda elementów skończonych*. Arkady, Warszawa, 1972.