Wydział: WILiŚ, Budownictwo, sem.2
dr Jolanta Dymkowska

Różniczka n-tego rzędu funkcji dwóch zmiennych

Definicja Niech funkcja f ma w otoczeniu punktu (x_0, y_0) pochodne cząstkowe do rzędu n włącznie. *Różniczką n-tego rzędu funkcji* f *w punkcie* (x_0, y_0) nazywamy funkcję $d^n f(x_0, y_0)$ zmiennych Δx i Δy określoną wzorem:

$$d^n f\,(x_0, y_0)\,(\Delta x, \Delta y) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\,\Delta y\right)^n f\,\Bigg|_{(x_0,y_0)}$$

We wzorze tym symbole $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$ oznaczają odpowiednio operacje różniczkowania po zmiennych x i y, natomiast potęgę traktujemy formalnie do otrzymania pochodnych cząstkowych wyższych rzędów.
Różniczką n-tego rzędu funkcji f oznaczamy krótko $d^n f$.

W szczególności różniczka rzędu n ma postać:

- $n = 1$, to
$$df\,(x_0, y_0)\,(\Delta x, \Delta y) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0)\,\Delta y$$
- $n = 2$, to
$$d^2 f\,(x_0, y_0)\,(\Delta x, \Delta y) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x_0, y_0)\,(\Delta x)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x_0, y_0)\,\Delta x\,\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x_0, y_0)\,(\Delta y)^2$$
- $n = 3$, to
$$d^3 f\,(x_0, y_0)\,(\Delta x, \Delta y) \;=\; \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\,(x_0, y_0)\,(\Delta x)^3 + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\,(x_0, y_0)\,(\Delta x)^2\,\Delta y +$$
$$+\,3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\,(x_0, y_0)\,\Delta x\,(\Delta y)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\,(x_0, y_0)\,(\Delta y)^3$$

Wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych

Twierdzenie Niech funkcja f ma w otoczeniu punktu (x_0, y_0) pochodne cząstkowe do rzędu n włącznie oraz niech (x, y) będzie dowolnym punktem z tego otoczenia. Wówczas na odcinku łączącym punkty (x_0, y_0) i (x, y) istnieje punkt (x_c, y_c) taki, że

$$f(x, y) \;=\; f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\,df\,(x_0, y_0)\,(x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2!}\,d^2 f\,(x_0, y_0)\,(x - x_0, y - y_0) +$$
$$+ \;\ldots\; + \frac{1}{(n-1)!}\,d^{n-1} f\,(x_0, y_0)\,(x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{n!}\,d^n f\,(x_c, y_c)\,(x - x_0, y - y_0)$$

Równość powyższą nazywamy wzorem Taylora dla funkcji dwóch zmiennych. Ostatnik składnik w tym wzorze nazywamy n-tą resztą i oznaczamy R_n .
Jeżeli punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ to wzór Taylora nazywamy wzorem Maclaurina.

Przykład Napisać wzór Taylora z resztą R_2 dla funkcji $f(x,y) = x^2 y$ w otoczeniu punktu $(-1,1)$.
Rozwiązanie Wzór Taylora w otoczeniu punktu $(-1,1)$ z resztą R_2 ma postać:

$$f(x,y) \;=\; f(-1,1) \;+\; \frac{1}{1!}\, df\,(-1,1)\,(x+1, y-1) \;+\; \frac{1}{2!}\, d^2 f\,(x_c, y_c)\,(x+1, y-1)$$

gdzie punkt (x_c, y_c) jest punktem odcinka łączącego punkty $(-1,1)$ i (x,y) .
Obliczamy więc kolejno:

- $f(-1,1) = 1$
- $f_x(x,y) = 2xy \qquad f_x(-1,1) = -2$
  $f_y(x,y) = x^2 \qquad f_y(-1,1) = 1$
- $df\,(-1,1)\,(x+1, y-1) \;=\; -2\,(x+1) \;+\; (y-1)$
- $f_{xx}(x,y) = 2y \qquad f_{xy}(x,y) = 2x$
  $f_{yx}(x,y) = 2x \qquad f_{yy}(x,y) = 0$
- $d^2 f\,(x_c, y_c)\,(x+1, y-1) \;=\; 2y_c\,(x+1)^2 \;+\; 4x_c\,(x+1)(y-1)$

Zatem wzór Taylora z resztą R_2 dla funkcji $f(x,y) = x^2 y$ w otoczeniu punktu $(-1,1)$ przyjmie postać:

$$x^2 y \;=\; 1 \;-\; 2\,(x+1) \;+\; (y-1) \;+\; y_c\,(x+1)^2 \;+\; 2x_c\,(x+1)(y-1).$$

Przykład Napisać wzór Maclaurina z resztą R_3 dla funkcji $f(x,y) = e^{x+2y}$.
Rozwiązanie Wzór Maclaurina z resztą R_3 ma postać:

$$f(x,y) \;=\; f(0,0) \;+\; \frac{1}{1!}\, df\,(0,0)\,(x,y) \;+\; \frac{1}{2!}\, d^2 f\,(0,0)\,(x,y) \;+\; \frac{1}{3!}\, d^3 f\,(x_c, y_c)\,(x,y)$$

gdzie punkt (x_c, y_c) jest punktem odcinka łączącego punkty $(0,0)$ i (x,y) .
Obliczamy więc kolejno:

- $f(0,0) = e^0 = 1$
- $f_x(x,y) = e^{x+2y} \qquad f_x(0,0) = e^0 = 1$
  $f_y(x,y) = 2e^{x+2y} \qquad f_y(0,0) = 2e^0 = 2$
- $df\,(0,0)\,(x,y) \;=\; x \;+\; 2y$
- $f_{xx}(x,y) = e^{x+2y} \qquad f_{xx}(0,0) = e^0 = 1$
  $f_{xy}(x,y) = 2e^{x+2y} \qquad f_{xy}(0,0) = 2e^0 = 2$
  $f_{yx}(x,y) = 2e^{x+2y} \qquad f_{yx}(0,0) = 2e^0 = 2$
  $f_{yy}(x,y) = 4e^{x+2y} \qquad f_{yy}(0,0) = 4e^0 = 4$
- $d^2 f\,(0,0)\,(x,y) \;=\; x^2 \;+\; 4\,xy \;+\; 4\,y^2$

- $\begin{array}{ll} f_{xxx}(x,y) = e^{x+2y} & f_{xxy}(x,y) = 2e^{x+2y} \\ f_{xyx}(x,y) = 2e^{x+2y} & f_{xyy}(x,y) = 4e^{x+2y} \\ f_{yxx}(x,y) = 2e^{x+2y} & f_{yxy}(x,y) = 4e^{x+2y} \\ f_{yyx}(x,y) = 4e^{x+2y} & f_{yyy}(x,y) = 8e^{x+2y} \end{array}$
- $d^3 f\,(x_c, y_c)\,(x,y) \;=\; e^{x_c+2y_c}\,x^3 \;+\; 6e^{x_c+2y_c}\,x^2\,y \;+\; 12e^{x_c+2y_c}\,x\,y^2 \;+\; 8e^{x_c+2y_c}\,y^3$

Zatem wzór Maclaurina z resztą R_3 dla funkcji $f(x,y) = e^{x+2y}$ przyjmie postać:

$$e^{x+2y} \;=\; 1 \,+\, x + 2y \,+\, \frac{1}{2}\,x^2 + 2\,xy + 2\,y^2 \,+\, \frac{1}{6}\,e^{x_c+2y_c}\,x^3 + e^{x_c+2y_c}\,x^2\,y + 2e^{x_c+2y_c}\,x\,y^2 + \frac{4}{3}\,e^{x_c+2y_c}\,y^3.$$