

## EGZAMIN WSTĘPNY Z MATEMATYKI

Zestaw składa się z 30 zadań. Zadania 1–10 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 11–30 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 180 minut.

*Powodzenia!*

1. Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}$ .
2. Rozwiązać nierówność  $x^2 - 4x + 9 \leq \frac{18}{x+2}$ .
3. Rozwiązać nierówność  $\log_{0,3}(x+1) > -1$ .
4. Rozwiązać nierówność  $2 - |1 - 2x| > 1$ .
5. Dla jakich wartości parametru  $\alpha \in (0; 2\pi)$  równanie  $\sin 2x = 2 \cos \alpha$  posiada rozwiązanie?
6. Obliczyć długość wektora  $\vec{a}$ , jeżeli  $\vec{a} \circ \vec{b} = 7$ ,  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  i  $\vec{b} = [3, -2, 1]$ .
7. Rozwiązać nierówność  $2^{x^2} < 5^x$ .
8. Wykazać, że funkcja  $f(x) = 3x^3 + 4x + \cos 2x$  jest rosnąca w całej swojej dziedzinie.
9. Wyznaczyć te wartości parametru  $k$ , dla których prosta  $y = kx + 4$  będzie równoległa do prostej  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$ .
10. Dla jakich  $a$  i  $b$  wielomian  $W(x) = 12x^4 - 17x^2 + ax + b$  dzieli się bez reszty przez  $2x^2 + x - 1$ ?
11. Dany jest trójkąt o wierzchołkach  $A(1, 1)$ ,  $B(-1, 3)$ ,  $C(3, 7)$  i polu  $S$ . Przez wierzchołek  $A$  poprowadzić jedną z prostych, która dzieli dany trójkąt na dwa trójkąty o polach  $\frac{1}{4}S$  i  $\frac{3}{4}S$ . Podać równanie tej prostej.
12. Znaleźć ekstrema funkcji  $f(x) = (x+3)^2(x+8)^3$ . Ile pierwiastków ma równanie  $f(x) = 108$ ?
13. Dla jakiej wartości parametru  $a$  funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} & \text{dla } x \neq 0 \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

będzie funkcją ciągłą w punkcie  $x = 0$ ?

14. Który z punktów paraboli  $y = x^2$  jest położony najbliżej prostej  $y = 2x - 2$ ?

15. Wykazać, że pole dowolnego wypukłego czworokąta jest równe połowie iloczynu jego przekątnych pomnożonego przez sinus kąta między nimi,  $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \alpha$ .
16. Dany jest ciąg arytmetyczny (o różnicy różnej od zera), w którym suma  $n$  początkowych wyrazów jest równa połowie sumy następujących  $n$  wyrazów. Wyznaczyć iloraz  $\frac{S_{3n}}{S_n}$ , gdzie  $S_k$  oznacza sumę  $k$  początkowych wyrazów tego ciągu.
17. Wykazać, że dwie styczne do paraboli  $y = x^2$  poprowadzone z dowolnego punktu prostej  $y = -\frac{1}{4}$  są do siebie prostopadłe.
18. Dany jest trójkąt równoramienny o ramionach  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC}$  długości 3 cm i podstawie  $\overline{AB}$  długości 4 cm. Obliczyć iloczyn skalarny  $\overline{AB} \circ \overline{BC}$ .
19. Miary kątów wewnętrznych trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny. Najmniejszy bok jest trzy razy mniejszy od największego boku w tym trójkącie. Obliczyć cosinus najmniejszego kąta.
20. Ze zbioru liczb  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  losujemy dwukrotnie po jednej liczbie bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że druga z wylosowanych liczb będzie większa od pierwszej.
21. Podać definicję asymptoty pionowej i wyznaczyć asymptoty pionowe funkcji  $f(x) = \frac{1}{x(2^x - 4)}$ .
22. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - 3x$  w przedziale  $\langle 0; 1 \rangle$ .
23. Dla jakiej wartości parametru  $m$  okrąg  $(x - m)^2 + (y - 1)^2 = 1$  będzie styczny do prostej  $3x + 4y + 1 = 0$ ?
24. Wykazać, że równanie  $x = \frac{1}{2} \sin x + a$ , gdzie  $a > 0$ , ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale  $\langle 0; a + 1 \rangle$ .
25. Z definicji pochodnej obliczyć  $f'(3)$ , gdy  $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ .
26. Rozwiązać równanie  $\binom{x+3}{2} + \binom{x+1}{x-1} = 31$ .
27. Długość dłuższej podstawy trapezu równoramiennego jest równa 13 cm, a jego obwód jest równy 28 cm. Wyrazić pole trapezu jako funkcję długości ramienia trapezu. Znaleźć dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.
28. Dla jakich wartości parametru  $k$  ciąg  $(a_n)$ , gdzie  $a_n = \frac{n^k}{2 + 4 + \dots + 2n}$ , będzie rozbieżny do  $+\infty$ ?
29. Dana jest funkcja  $f(x) = \cos^2 3x + \frac{3}{2}x - \log 5$ . Rozwiązać równanie  $f'\left(\frac{1}{3}x\right) = 0$ .
30. Dane są liczby  $A = \frac{5678901234}{6789012345}$  i  $B = \frac{5678901235}{6789012346}$ . Która z nich jest większa? Swoją odpowiedź uzasadnić.