POLITECHNIKA GDAŃSKA Gdańsk, czerwiec 1994 r.

EGZAMIN WSTĘPNY Z MATEMATYKI

Zestaw składa się z 30 zadań. Zadania 1–10 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 11–30 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 240 minut.

Powodzenia!

1. Rozwiązać nierówność $x - \dfrac{2}{x} \geqslant 1$.

2. Dla jakich a równanie $x^2 + ax + a - 1 = 0$ posiada co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty?

3. Rozwiązać równanie $\sqrt{x} + 2 = x$.

4. Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny o sumie równej 18. Największa z nich jest równa 9. Wyznaczyć pozostałe liczby.

5. Rozwiązać nierówność $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x-3|} \geqslant \dfrac{1}{4}$.

6. Dany jest sześcian o krawędzi a Obliczyć objętość kuli stycznej do wszystkich krawędzi tego sześcianu.

7. Obliczyć $\left(\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2\log_3 2}}$.

8. Dla jakich $x \in (0;\pi)$ spełniona jest nierówność $\operatorname{ctg}^2 x \geqslant 3$?

9. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!}{n^2 \cdot n!}$.

10. Graficznie rozwiązać nierówność $\log_{\frac{1}{2}} |x| \geqslant x^2 - 1$.

11. Wielomian $w(x) = x^3 - 3x + a$ rozłożyć na czynniki wiedząc, że liczba -1 jest jego pierwiastkiem.

12. Dla jakich parametrów m układ równań $\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ 8x - my = 2 \end{cases}$ jest sprzeczny?

13. Trójkąt ma boki długości 6, 8 i 10. Obliczyć promień okręgu opisanego na tym trójkącie i promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

14. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 4\sqrt[3]{8 + \sin 3x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

15. Dla jakich wartości parametru m okręgi $x^2 + y^2 - 2x = 0$ oraz $x^2 + (y-m)^2 = 9$ są styczne wewnętrznie?

16. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{\log(3^x - 2^x + 1)}$.

17. Trzy razy rzucamy dwiema kostkami do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz suma oczek będzie większa od 9?

18. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \log_2 \left(\dfrac{x^2}{1-\cos 4x} \right)$.

19. Niech $f(m)$ oznacza liczbę pierwiastków równania $|4x^2 - 4x - 3| = m$. Narysować wykres funkcji $f(m)$.

20. Na prostej $y - x - 1 = 0$ znaleźć punkt A taki, że pole trójkąta o wierzchołkach w punktach A, $B(4,-1)$ i $C(4,3)$ jest równe 2.

21. Obliczyć kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeśli wiadomo, że wektory $\vec{u} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ i $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ są prostopadłe i $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.

22. Uzasadnić, że prosta $4x + 2y - 3 = 0$ jest równoległa do prostej $\begin{cases} x &= -t+1 \\ y &= 2t-3 \end{cases}$. Obliczyć odległość między tymi prostymi.

23. Zbadać monotoniczność funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + \cos x$.

24. W trapez równoramienny o polu S wpisano czworokąt tak, że jego wierzchołki są środkami boków trapezu. Jaki to czworokąt? Obliczyć jego pole.

25. Niech A i B będą zdarzeniami losowymi takimi, że $P(A) = 0,7$ i $P(B) = 0,9$. Wykazać, że $P(A|B) \geqslant \frac{2}{3}$.

26. Obliczyć granice $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1})$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1})$.

27. Rozwiązać równanie $1 + \dfrac{1}{2\sin x} + \dfrac{1}{4\sin^2 x} + \cdots = \dfrac{2}{\sin x}$.

28. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$ w przedziale $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$.

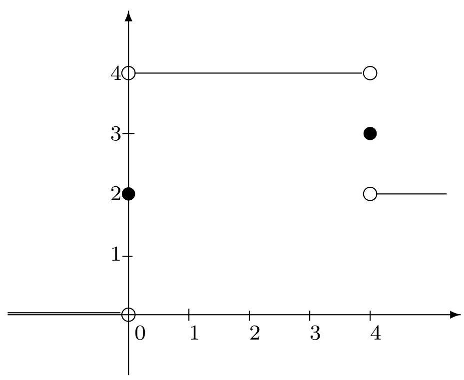
29. Podać definicję ciągu ograniczonego. Następnie wykazać, że ciąg

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

jest ograniczony.

30. Podać i udowodnić warunek konieczny istnienia maksimum lokalnego funkcji różniczkowalnej.

Odpowiedzi do kolejnych zadań:

1. $x \in \langle -1; 0) \cup \langle 2; +\infty)$;
2. dla każdej liczby $a \in R$;
3. $x = 4$;
4. liczbami tymi są $a_1 = 3$, $a_2 = 6$ i $a_3 = 9$;
5. $x \in \langle 1; 5 \rangle$;
6. $V = \frac{1}{3}\pi a^3\sqrt{2}$;
7. $\left(\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2\log_3 2}} = 3$;
8. $x \in (0; \frac{\pi}{6}\rangle \cup \langle \frac{5}{6}\pi; \pi)$;
9. 1;
10. $x \in \langle -1; 0) \cup (0; 1\rangle$;
11. $w(x) = (x+1)^2(x-2)$;
12. $m = -4$;
13. $R = 5$ i $r = 2$;
14. $y = x + 8$;
15. $m = \pm\sqrt{3}$;
16. $x \geqslant 0$;
17. $P = \frac{91}{216}$;
18. -3;
19. 

20. $A(3,4)$ lub $A(5,6)$;
21. $\frac{2}{3}\pi$;

22. $d = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

23. Zauważmy, że spełniona jest nierówność $3x^2 - 6x + 4 \geqslant 1$ (i nawet $3x^2 - 6x + 4 > 1$, gdy $x \neq 1$). Stąd już wynika, że pochodna funkcji $f(x)$ jest dodatnia,

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4 - \sin x > 0 \quad \text{(także dla } x = 1\text{)},$$

i dlatego fnkcja $f(x)$ jest rosnąca;

24. czworokąt jest rombem o polu $P = S/2$;

25. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} \geqslant \frac{0{,}7 + 0{,}9 - 1}{0{,}9} = \frac{2}{3}$;

26. $1/2$ i $-\infty$;

27. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ i k jest liczbą całkowitą;

28. $M = 1$ i $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

29. (a_n) jest ograniczony, gdy istnieje liczba rzeczywista M taka, że $|a_n| \leqslant M$ dla każdej liczby naturalnej n. Dla rozważanego ciągu i dla każdej liczby naturalnej n jest

$$|a_n| = a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \leqslant 1,$$

więc ciąg ten jest ograniczony.

30. Jeśli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i jeśli ma ona maksimum lokalne w tym punkcie, to $f'(x_0) = 0$.