POLITECHNIKA GDAŃSKA Gdańsk, 28.06.1995 r.

EGZAMIN WSTĘPNY Z MATEMATYKI

Zestaw składa się z 30 zadań. Zadania 1–10 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 11–30 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 240 minut.

Powodzenia!

1. Rozwiązać nierówność $|4 + x - |3x - 2|| \leqslant 0$.
2. Rozwiązać równanie $2^{2x+1} + 3 \cdot 4^x = 10$.
3. Rozwiązać nierówność $\dfrac{1}{x-1} \geqslant \dfrac{2}{x-2}$.
4. Obliczyć $1000^{\frac{1}{3} - \log \sqrt[3]{3}}$.
5. Na osi $0y$ znaleźć punkt M równo oddalony od punktów $A(2, -1, 5)$ i $B(-3, 2, 4)$.
6. Wielomian $w(x) = x^4 + x^2 + 1$ rozłożyć na czynniki.
7. Wyznaczyć n z równania $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = 120$.
8. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} (\log(10n^2 + 1) - 2\log n)$.
9. Obliczyć $y'(\frac{\pi}{4})$, jeśli $y(x) = \sqrt{1 + \cos 2x}$.
10. Obliczyć stosunek objętości kuli opisanej na walcu do objętości kuli wpisanej w ten walec.
11. Znaleźć składnik wymierny rozwinięcia dwumianu $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{3})^{10}$.
12. Dla jakich parametrów α równanie $x^2 + 4x\sin\alpha + 1 = 0$ posiada co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty?
13. Dla jakich wartości a i b liczba -1 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$?
14. Rozwiązać nierówność $\log_2 x + \log_x 2 \geqslant 2$.
15. Wiadomo, że zdarzenia losowe A i B są niezależne oraz $P(A) = p_1$ i $P(B) = p_2$. Obliczyć prawdopodobieństwa $P(A|B)$ oraz $P(A - B)$.

16. Dane są funkcje $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = 1 - x$. Rozwiązać równanie $f(g(x)) = g(f(x))$.

17. Dany jest ciąg geometryczny (a_n). Pokazać, że ciąg (b_n), gdzie $b_n = a_{n+1} - a_n$, też jest ciągiem geometrycznym.

18. Dwa punkty wyruszają jednocześnie z wierzchołka kąta o mierze 120° po jego ramionach z prędkościami odpowiednio 5 m/s i 3 m/s. Po jakim czasie odległość między nimi będzie wynosiła 49 m?

19. Napisać równanie okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych i przechodzącego przez punkt $P(2, 1)$.

20. Na podstawie definicji obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \cos 3x$.

21. Narysować wykres funkcji $f(x) = 2^{\log_{\frac{1}{2}} x}$.

22. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x + \operatorname{ctg} x$ w przedziale $\langle \frac{1}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi \rangle$.

23. Z prawdopodobieństwem $1/2$ w urnie znajduje się albo kula biała, albo czarna. Do urny dokładamy kulę białą i następnie losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy kulę białą?

24. Udowodnić, że wszystkie trójkąty prostokątne, których boki tworzą ciąg arytmetyczny, są podobne.

25. Wyznaczyć asymptoty funkcji $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$.

26. Obliczyć $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$.

27. Narysować na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne spełniają nierówność $y^2 + xy - 2x^2 < 0$.

28. Obliczyć długości przekątnych równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{n} - \vec{m}$, gdzie wektory $\vec{m}$ i $\vec{n}$ są ortogonalne i $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$.

29. Wykazać, że funkcja $y = \sqrt{x^3 - 1}$ jest różnowartościowa w swojej dziedzinie. Następnie wyznaczyć funkcją do niej odwrotną.

30. Wykazać, że jeśli ciąg (a_n) jest ograniczony i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.