POLITECHNIKA GDAŃSKA Gdańsk, 1.07.1996 r.

EGZAMIN WSTĘPNY Z MATEMATYKI

Zestaw składa się z 30 zadań. Zadania 1–10 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 11–30 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 240 minut.

Powodzenia!

1. Funkcję kwadratową $y = (x+3)(1-x)$ przedstawić w postaci kanonicznej. Naszkicować jej wykres.
2. Rozwiązać równanie $5^x \cdot 5^{x^2} \cdot 5^{x^3} = \frac{1}{5}$.
3. Rozwiązać równanie $\log_{\frac{1}{3}}(|x|-1) > 2$.
4. Dla jakich parametrów $a \in R$ równanie $\cos^2 x = \dfrac{2a}{a-2}$ ma rozwiązanie?
5. Naszkicować wykres funkcji $y = x \log_{x^2} |x|$.
6. Wyznaczyć te wartości x, dla których punkty $A(5,5)$, $B(1,3)$ i $C(x,0)$ są współliniowe.
7. Wskazać większą z liczb $0,4(9)$ i $\sin\left(\frac{101}{6}\pi\right)$.
8. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{2x-3}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 6$.
9. Dana jest funkcja $f(x) = \cos^2 x$. Narysować wykres funkcji $y = f'(x)$ w przedziale $\langle 0; \pi \rangle$.
10. Zbadać monotoniczność funkcji $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
11. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
12. Rozwiązać nierówność $g(f(x)) \geqslant 1$, jeśli $f(x) = 3^x$ i $g(x) = \sin x$.
13. Wyznaczyć wszystkie wielokąty wypukłe, w których liczba przekątnych jest 3 razy większa od liczby wierzchołków.
14. Rozwiązać równanie $|\cos x| = \cos x + 2\sin x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.
15. Rozwiązać nierówność $\dfrac{x^3 - x + 6}{x^2} \geqslant 0$.

16. Rozwiązać równanie $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \ldots = x - 1$.

17. Dla jakich $x \in R$ ciąg $2\log_3 x$, $\log_3(x-1)$, $-\log_3 4$ jest ciągiem arytmetycznym?

18. Niech g będzie granicą ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$. Od jakiego n począwszy wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $|a_n - g| < 0,01$?

19. Dla jakich $a \in R$ funkcja $f(x) = \begin{cases} \cos x + a & \texttt{dla} \quad x \geqslant 0 \\ \frac{\sin|2x|}{x} & \texttt{dla} \quad x < 0 \end{cases}$ jest ciągła?

20. Wielomian $x^2 + px + q$ ma pierwiastki x_1 i x_2. Wskazać trójmian $x^2 + bx + c$, którego pierwiastkami są liczby $x_1 + 1$ i $x_2 + 1$.

21. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ losujemy jedną liczbę. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że nie będzie to liczba podzielna ani przez 6, ani przez 8.

22. Obliczyć pole trapezu o podstawach długości a i b, jeżeli wiadomo, że na tym trapezie można opisać okrąg i można w niego wpisać okrąg.

23. Znaleźć rzut prostokątny punktu $A(1, -1)$ na prostą $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t + 2. \end{cases}$

24. Dane są zbiory $A = \{(x, y)\colon x,\, y \in R \ \ \texttt{i} \ \ x^2 + y^2 - 2y \leqslant 1\}$ i $B = \{(x, y)\colon x,\, y \in R \ \ \texttt{i} \ \ |x| + y \leqslant 1\}$. Narysować na płaszczyźnie układu współrzędnych zbiór $A \cap B$ i obliczyć jego pole.

25. Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{x}$.

26. Obliczyć $|\vec{a} - \vec{b}|$, jeśli $|\vec{a} + \vec{b}| = 5$, $|\vec{a}| = 3$ i $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$.

27. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji $y = x\sqrt{4 - x^2}$.

28. Rzucamy symetryczną monetą. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że w szóstym rzucie otrzymamy trzeciego orła.

29. Uzasadnić, że równanie $x^3 + x + 7 = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Wraz z uzasadnieniem wskazać przedział o długości co najwyżej $1/2$, do którego należy to rozwiązanie.

30. Ostrosłup przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy i dzielącą wysokość w stosunku $2 : 3$. Obliczyć stosunek objętości powstałych brył.