POLITECHNIKA GDAŃSKA Gdańsk, 30.06.1997 r.

EGZAMIN WSTĘPNY Z MATEMATYKI

Egzamin składa się z 30 zadań. Zadania 1–10 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 11–30 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 240 minut.

Powodzenia!

1. Syn jest o 30 lat młodszy od ojca. 5 lat temu ojciec był 7 razy starszy od syna. W którym roku urodził się syn?
2. Znaleźć pola kwadratów, których dwoma wierzchołkami są punkty $(-1,1)$ i $(2,1)$.
3. Podać przykład ciągu niemonotonicznego, którego granicą jest liczba 2.
4. Dla jakich parametrów a dziedziną funkcji $y=\sqrt{ax^2+x+a}$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?
5. Rozwiązać równanie $\log_2 x\cdot\log_x 4=2$.
6. Obliczyć sumę współczynników wielomianu $w(x)=(x^2+2x-1)^{10}-20x-3$.
7. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+n!}{(n+2)!-(n+1)!}$.
8. Napisać równanie prostej zawierającej tę cięciwę okręgu $x^2-4x+y^2+2y+1=0$, którą punkt $A(1,-\frac{1}{2})$ dzieli na dwie równe części.
9. Obliczyć $f'(0)$, jeśli $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$.
10. Obliczyć $\sin\frac{13}{12}\pi$.
11. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} y=|x| \\ |x+y|=2. \end{cases}$ Podać ilustrację graficzną tego układu.
12. Znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $x^{1997}-x^{1996}+2$ przez x^3-x.
13. Dla jakiego m równanie $|x^2-2|=\log_{\frac{1}{2}}m$ ma dokładnie 4 pierwiastki?
14. Rozwiązać równanie $|x-3|^{x^2-4x+3}=1$.
15. Rozwiązać nierówność $x+1\leqslant\sqrt{3+x}$.
16. Rozwiązać równanie $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$.
17. Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu $a_n=\dfrac{2^n+3^n}{6^n}$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

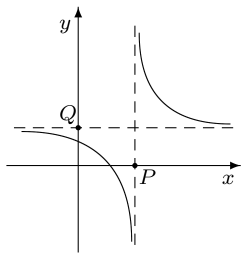
18. Ile razy należy rzucić symetryczną monetą, aby z prawdopodobieństwem większym od $\frac{1}{2}$ otrzymać przynajmniej dwa orły?

19. Zdarzenia losowe A i B są jednakowo prawdopodobne, zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich i $P(A|B) = \frac{1}{2}$. Obliczyć prawdopodobieństwa zdarzeń A i B. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

20. Uzasadnić, że nie istnieje trójkąt o wysokościach długości 1, 2 i 3.

21. Znaleźć rzut równoległy punktu $A(5, 2, 9)$ na płaszczyznę Oxy w kierunku wektora $\vec{v} = [1, 2, 3]$.

22. Rys. 1 przedstawia szkic wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{ax - b}{x - c}$ dla pewnych liczb a, b i c. Wyznaczyć współrzędne punktów P i Q. Wskazać liczby a, b i c, dla których wykres funkcji $y = f(x)$ można otrzymać z wykresu funkcji $y = \frac{1}{x}$ w wyniku translacji o wektor $\vec{u} = [1, 3]$.



Rys. 1

23. Wyznaczyć liczbę a tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{|x-1|} & \text{dla} \quad x < 1 \end{cases}$ była ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

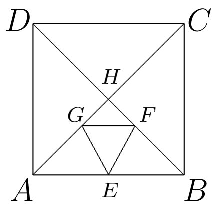
24. Napisać równanie tej stycznej do wykresu funkcji $y = \dfrac{4}{x^2}$, która jest nachylona do osi Ox pod kątem 45°.

25. Wyznaczyć przedziały, w których funkcja $f(x) = 2\cos^2 x - x$ jest rosnąca.

26. Wyznaczyć asymptoty krzywej $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - 2x$.

27. Przedsiębiorstwo handlowe sprzedaje opony samochodowe. Całkowity zysk przedsiębiorstwa liczony w tysiącach złotych ze sprzedaży x setek tysięcy opon dany jest wzorem $z(x) = -x^3 + 9x^2 + 120x - 400$ dla $x \geqslant 5$. Przy jakiej ilości sprzedanych opon zysk przedsiębiorstwa będzie największy?

28. Punkt E jest środkiem boku kwadratu $ABCD$ przedstawionego na rys. 2, a trójkąt EFG jest równoboczny. Oblicz pole trójkąta EFG, jeżeli długość każdego boku kwadratu $ABCD$ jest równa 2.



Rys. 2

29. Dany jest romb $ABCD$ o bokach długości 1 i kącie o mierze 60° przy wierzchołku A. Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{AN}$, jeśli M i N są odpowiednio środkami boków BC i CD.

30. Obliczyć pole powierzchni i objętość wielościanu, którego wierzchołkami są wszystkie środki krawędzi czworościanu foremnego o boku długości a.