POLITECHNIKA GDAŃSKA Gdańsk, 30.06.1998 r.

EGZAMIN WSTĘPNY Z MATEMATYKI

Egzamin składa się z 30 zadań. Zadania 1–10 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 11–30 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 240 minut.

Powodzenia!

1. Rozwiązać nierówność $2^{|x+1|} \leqslant 0{,}(9)$.

2. Obliczyć resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = x^{101!} - x + 1$ przez dwumian $x + 1$.

3. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x^2$.

4. Rozwiązać nierówność $\cos(\pi - x) \leqslant \sin(\frac{\pi}{2} + x)$.

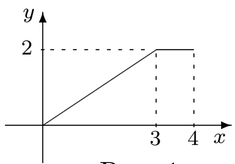
5. Obliczyć największą wartość funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 6x + 16}$.

6. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \dfrac{3-n}{n} \cos n\pi$ dla $n \in N$. Zbadać monotoniczność ciągu (b_n), w którym $b_n = a_{2n-1}$ dla każdego $n \in N$.

7. Trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego jest liczba 1. Obliczyć sumę pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu.

8. Wśród rozpoczynających studia wyższe jest tyle samo mężczyzn co kobiet. Co czwarta kobieta i co drugi mężczyzna z tych, którzy rozpoczęli studia, nie kończy ich. Obliczyć jaki procent liczby wszystkich absolwentów wyższych uczelni stanowi liczba absolwentek tychże uczelni.

9. Rys. 1 przedstawia szkic wykresu funkcji $y = f(x)$ dla $x \in \langle 0; 4 \rangle$. Określić dziedzinę i naszkicować wykres funkcji $y = f(-x + 3)$.



Rys. 1

10. Rozwiązać równanie $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{8} + \ldots = \dfrac{x+1}{3}$.

11. Dla jakich wartości parametru a układ równań $\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax - y = 1 \end{cases}$ ma co najmniej jedno rozwiązanie?

12. Przedsiębiorstwo proponuje dziesięcioletni kontrakt swojemu pracownikowi. W pierwszym roku pracy pracownik zarobi 15000 PLN, a w każdym następnym roku jego zarobki będą wzrastały o 8%. Ile zarobi pracownik w dziesiątym roku pracy? Ile wyniosą łączne zarobki pracownika za dziesięć lat pracy w przedsiębiorstwie? (W obliczeniach można przyjąć, że $(1,08)^9 = 2$.)

13. Dla jakich wartości parametru m pierwiastki równania $mx^2 - 2mx + 1 = 0$ spełniają nierówność $x_1^2 + x_2^2 < 3$?

14. Obliczyć pole obszaru opisanego układem nierówności $\begin{cases} |x-1| - y \leqslant 0, \\ |x-2| + y \leqslant 3. \end{cases}$

15. Punkty $A(2,1)$ i $B(8,3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka C, jeśli środkowe trójkąta ABC przecinaja się w punkcie $M(4,5)$.

16. Obliczyć pole trójkąta wyznaczonego przez punkt $A(3,2)$ i tę średnicę okręgu $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 20$, która jest równoległa do prostej $4y - 3x = 0$.

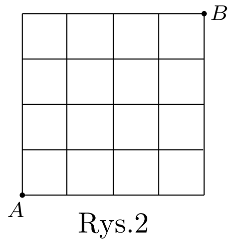
17. Dobrać parametr a tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 2^a & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$ była ciągła.

18. Obliczyć $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$, jeśli $f(x) = \sin(\pi \cos \sqrt{x})$.

19. Rozwiązać równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

20. Rozwiązać nierówność $x\sqrt{3-2x} + 1 \leqslant 0$.

21. Wyznaczyć liczby a i b takie, że $\dfrac{1}{(x-1)x} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x}$ dla $x \in R - \{0,1\}$. Następnie obliczyć $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)n} \right)$.



Rys.2

22. Rys. 2 przedstawia kratę wymiaru 4×4. Chcemy przejść po odcinkach tej kraty od punktu A do punktu B możliwie najkrótszą drogą. Ile jest takich dróg?

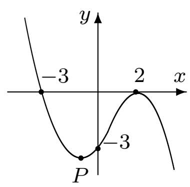
23. Zdarzenia losowe A i B są niezależne i $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ oraz $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$. Obliczyć $P(A)$, $P(B)$ i $P(A - B)$, gdy $P(A) > P(B)$.

24. Rzucono raz pięcioma kostkami do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na wszystkich kostkach wypadła taka sama liczba oczek lub na każdej z nich wypadła inna liczba oczek?

25. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x + \sqrt{2-x}$ w jego punkcie przecięcia z osią Ox.

26. Rozwiazać równanie $\log_3(3x) + \log_x(3x) = \log_9\left(\frac{1}{3}\right)$.

27. Rys. 3 przedstawia szkic wykresu wielomianu stopnia trzeciego. Wyznaczyć ten wielomian i wyznaczyć współrzędne punktu P, w którym ma on minimum lokalne.



Rys. 3

28. Dane są punkty $A(-1,3,3)$, $B(0,1,5)$ i $C(3,5,-1)$. Wyznaczyć taki punkt D, że wektor $\overrightarrow{AD}$ dzieli kąt między wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ na połowy i $|\overrightarrow{AD}| = 1$.

29. W równoramiennym trójkącie prostokątnym poprowadzono z wierzchołka kąta prostego dwie proste dzielące przeciwprostokątną na trzy odcinki jednakowej długości. Obliczyć cosinus kąta między tymi prostymi.

30. Oblilczyć objętość kuli stycznej do wszystkich krawędzi czworościanu foremnego o boku długości a.