POLITECHNIKA GDAŃSKA Gdańsk, 29.06.1999 r.

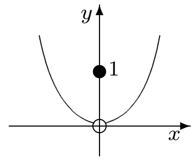
EGZAMIN WSTĘPNY Z MATEMATYKI

Egzamin składa się z 30 zadań. Zadania 1–10 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 11–30 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 240 minut.

Powodzenia!

1. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $81x^4 - 72x^2 = -16$.
2. Zbiory A, B i $A \cup B$ mają odpowiednio 1999, 2049 i 3998 elementów. Ile elementów mają odpowiednio zbiory $A - B$ i $A \cap B$?
3. Jeden metr ma 1000000 mikronów, a 100000000 angstremów to jeden centymetr. Ile angstremów ma jeden mikron?
4. Rozwiązać równanie $\log_2(-2)^{5n} = n^2 + 4$, w którym n jest liczbą naturalną.
5. Obliczyć $\binom{n}{5}$, jeśli wiadomo, że $\binom{n}{3} = \binom{n}{4}$.
6. Rozwiązać nierówność $|x-1| \leqslant \dfrac{x}{3} + 1$.
7. Dana jest funkcja $f(x) = (x-1)^2$. Na osobnych rysunkach naszkicować wykresy funkcji: (a) $y = f(x)$; (b) $y = f(-x)$; (c) $y = f(x+1) - 2$.
8. Rozwiązać nierówność $x + 3 \leqslant \dfrac{10}{x}$.
9. Dla jakich wartości x istnieje trójkąt o bokach długości 1, 2, $\log x$?
10. W trójkącie naprzeciw boku długości $3\sqrt{2}$ leży kąt miary 45°. Wyznaczyć promień okręgu opisanego na tym trójkącie.
11. Mamy dwa naczynia, z których jedno zawiera 10 litrów wody, a drugie 10 litrów soku. Połowę wody przelewamy do soku, mieszamy, a następnie połowę roztworu przelewamy z powrotem do wody. Obliczyć procentowe stężenia otrzymanych roztworów.
12. Punkty $A(-1,0)$, $B(3,2)$ i $C(5,-2)$ są wierzchołkami trójkąta. Pokazać, że jest to trójkąt równoramienny. Napisać równanie osi symetrii tego trójkąta.
13. Doprowadzić do najprostszej postaci wyrażenie $\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}} + \dfrac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$.
14. W obszar między trzema wzajemnie stycznymi okręgami o promieniu R wpisano okrąg. Znaleźć promień r tego okręgu.
15. Funkcję $f(x) = x^5 - 9x^3 - 27x^2 + 243$ zapisać w postaci iloczynowej i następnie rozwiązać nierówność $f(x) > 0$.

16. Pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ ma minimum lokalne w punkcie $x_0 = 0$. Uzasadnić, że funkcja $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ ma maksimum lokalne w punkcie $x_0 = 0$, zob. rys. 1.



Rys. 1

17. Napisać równania tych stycznych do wykresu funkcji $y = \dfrac{x^2}{x-2}$, które są równoległe do prostej $3x + y = 0$.

18. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$.

19. Znaleźć asymptoty wykresu funkcji $y = \dfrac{4x^2+9x}{x-4}$.

20. Rozwiązać równanie $3^{2x} - 2 \cdot 3^x + a = 0$, w którym $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3} - 4n}{n-1}$.

21. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczyć zbiór punktów (x, y), których współrzędne spełniają równanie $\log_2(x+y) = \log_2 x + \log_2 y$.

22. Obliczyć średnią arytmetyczną tych spośród liczb naturalnych $1, 2, 3, \ldots, 2000$, które nie są podzielne przez 5.

23. Wyznaczyć ciąg geometryczny $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, jeżeli wiadomo, że $a_1+a_2+a_3+a_4 = 30$ i $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 60$. Znaleźć taką liczbę n, że $a_n < 500000 < a_{n+1}$.

24. Rozwiązać równanie $2\sin^2 x + \sin 2x = 2$.

25. Rozwiązać nierówność $\sin^2 x > \frac{3}{4}$ dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

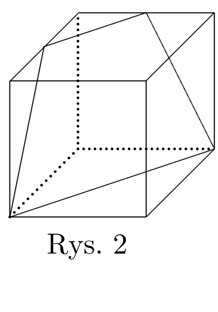
26. Znaleźć równania prostych przechodzących przez punkt $A(7, 3)$ i przecinających prostą $x - 3y - 1 = 0$ pod kątem $45°$.

27. Obliczyć długość najkrótszej drogi poprowadzonej po powierzchni sześcianu o krawędziach długości 1 i łączącej dwa przeciwległe wierzchołki tego sześcianu. Ile najkrótszych dróg łączy dwa wybrane przeciwległe wierzchołki tego sześcianu?

28. Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\vec{a} = [-1, 1+x]$ i $\vec{b} = [\sqrt{x+3}, 1]$. Dla jakich x wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są prostopadłe? Jaki kąt (ostry, prosty, czy rozwarty) tworzą te wektory dla $x = -2$?

29. Rzucono pięć razy dwiema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwa razy suma oczek na obu kostkach jest nie mniejsza od 10.

30. Sześcian o krawędzi długości a podzielono płaszczyzną przechodzacą przez przekątną jednej z jego ścian i przez środki dwóch krawędzi leżących na przeciwległej ścianie na dwie bryły, zob. rys. 2. Obliczyć objętości obu otrzymanych brył.



Rys. 2