Egzamin wstępny z matematyki

Politechnika Gdańska

Gdańsk, 29.06.2000 r.

Egzamin składa się z 15 zadań. Zadania 1–5 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 6–15 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 120 minut.

1. Wykazać, że funkcja
$$f(x) = x\frac{3^x - 1}{3^x + 1}$$
jest parzysta.

2. Obliczyć pole figury ograniczonej trzema wzajemnie stycznymi okręgami o promieniu r.

3. Rozwiązać nierówność $\frac{3}{x} \leqslant 2 + x$.

4. Na płaszczyźnie XOY narysować zbiór $A = \{(x, y) : x^2 - 2x \leqslant y \leqslant 1 - |x - 1|\}$.

5. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ ciąg $x, x - 3, 4x^2$ jest ciągiem geometrycznym?

6. Wykazać, że ciąg o wyrazie ogólnym
$$a_n = \frac{2 + 4 + 6 + \ldots + 2n}{n + 2} - n$$
jest malejący.

7. Znaleźć punkt B symetryczny do punktu $A(-2, 9)$ względem prostej $2x - 3y + 18 = 0$.

8. Dana jest funkcja
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}.$$
Wyznaczyć asymptoty poziome wykresu tej funkcji oraz obliczyć $\lim_{x\to 2} f(x)$.

9. Rozwiązać nierówność $(2 + \log_x 5) \log_5^2 x \leqslant 1$.

10. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^2\sqrt{x + 5}$.

11. Dana jest funkcja $f(x) = \sin^2 x$. Rozwiązać równanie $f'(x) = \sqrt{f(x)}$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

12. Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ rozwiązaniem nierówności

$$2^{(m-1)x^2+(m-1)x-m} < 1$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

13. Znaleźć równanie okręgu mającego środek na prostej $y = x - 2$ i przechodzącego przez punkty $A(3,0)$ i $B(-1,2)$.

14. Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6\}$ wybieramy jednocześnie trzy liczby. Na ile sposobów możemy to zrobić tak, aby:

    a) ich iloczyn był liczbą parzystą;

    b) ich suma była liczbą nieparzystą.

15. W stożek o promieniu podstawy r i wysokości h wpisano sześcian. Obliczyć długość krawędzi sześcianu.

Odpowiedzi do zadań

1. Należy wykazać, że $f(-x) = f(x)$;
2. $P = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) r^2$;
3. $x \in \langle -3; 0) \cup \langle 1; +\infty)$;
4.
5. $x = 1$;
6. Należy wykazać, że $a_{n+1} - a_n = \frac{-2}{(n+3)(n+2)} < 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
7. $B(2,3)$;
8. Proste $y = 1$ i $y = -1$ są odpowiednio prawostronną i lewostronną asymptotą poziomą, $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{2}{3}$;
9. $x = \frac{1}{5}$ lub $x = \sqrt{5}$;
10. f jest malejąca w przedziale $(-5; 0)$, natomiast rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$;
11. $x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$;
12. $x \in \left(\frac{1}{5}; 1\right\rangle$;
13. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$;
14. P(iloczyn parzysty)$= \frac{19}{20}$, P(suma nieparzysta)$= \frac{1}{2}$;
15. $a = \frac{2rh}{\sqrt{2}h+2r}$;