

# Egzamin wstępny z matematyki

Politechnika Gdańska

Gdańsk, 28.06.2001 r.

Egzamin składa się z 15 zadań. Zadania 1–5 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 6–15 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 120 minut.

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$f(x) = \sqrt{x - 4 + \frac{5}{x + 2}}.$$

2. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}.$$

3. Rozwiązać nierówność

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4. Obliczyć  $f' \left(\frac{2}{3}\pi\right)$ , jeżeli  $f(x) = \operatorname{tg}^4 x$ .

5. Rozwiązać równanie  $8^x - 3 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ .

6. Rozwiązać nierówność  $\sqrt{x-1} \geq 3-x$ .

7. Napisać równanie stycznej do okręgu  $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0$  w punkcie  $A(4, 2)$ .

8. Dla jakiej wartości parametru  $a$  równanie  $|x^2 + 2x - 3| - 4 = a$  ma dwa pierwiastki?

9. Dla jakich wartości parametru  $m$  prosta  $y = x - m$  będzie styczna do paraboli  $y = mx^2$ ?

10. Rozwiązać nierówność  $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 > 0$  dla  $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ .

11. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji  $f(x) = (x - 3) \cdot \sqrt{x}$ .

12. Rzucamy pięć razy symetryczną kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że żaden wynik nie powtórzy się.
13. Rozwiązać równanie  $\log_{\frac{1}{2}}^2 2x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x - 3 = 0$ .
14. W kulę wpisano stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym. Obliczyć stosunek objętości kuli do objętości tego stożka.
15. W trapez prostokątny można wpisać okrąg. Jedna z jego podstaw ma długość  $a$ , druga zaś jest trzy razy dłuższa. Obliczyć pole trapezu.

## Odpowiedzi do zadań

1.  $D_f = (-2; -1) \cup \langle 3; +\infty \rangle$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ;
3.  $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ;
4.  $f' \left(\frac{2}{3}\pi\right) = -48\sqrt{3}$ ;
5.  $x = 0$  lub  $x = 2$ ;
6.  $x \in \langle 2; +\infty \rangle$ ;
7.  $y = -\frac{3}{4}x + 1$  ( $3x + 4y - 4 = 0$ );
8.  $a = -4$  lub  $a > 0$ ;
9.  $m = -\frac{1}{2}$  lub  $m = \frac{1}{2}$ ;
10.  $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ ;
11. Funkcja  $f$  jest rosnąca w przedziale  $(1; +\infty)$  i jest malejąca w przedziale  $(0; 1)$ ;
12.  $p = \frac{10}{108}$ ;
13.  $x = \frac{1}{2}$  lub  $x = 4$ ;
14.  $\frac{v_k}{v_s} = \frac{32}{9}$ ;
15.  $P = 3a^2$ .