

Egzamin wstępny z matematyki

Politechnika Gdańska

Gdańsk, 02.07.2002 r.

Egzamin składa się z 15 zadań. Zadania 1–5 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 6–15 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 120 minut.

1. Rozwiązać nierówność $f\left(\frac{2}{x}\right) \geq 1 + f(x)$, jeżeli $f(x) = x + 1$.
2. Parabolę $y = x^2 - 2x - 1$ przesunięto o wektor $\vec{u} = [-2, 3]$. Podać równanie jej obrazu.
3. Obliczyć długość promienia okręgu wpisanego w wycinek koła o promieniu R i kącie środkowym $\alpha \in (0, \pi)$.
4. Ile dzielników w zbiorze liczb naturalnych posiada liczba $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$?
5. Napisać równanie symetralnej odcinka AB , jeżeli $A = (1, 1)$ i $B = (5, 3)$.
6. Znaleźć odległość między okręgami $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 39 = 0$ oraz $x^2 + y^2 = 1$.
7. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+1}{2}}{1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)}.$$

8. Rozwiązać nierówność $\log_x(12 - x) < 2$.
9. W kulę o promieniu R wpisano stożek o wysokości h . Wyznaczyć długość tworzącej tego stożka.
10. Czy funkcja $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{2} \cos x$ ma ekstremum lokalne w punkcie o odciętej $x = \frac{3}{4}\pi$? Odpowiedź uzasadnić.
11. Wyznaczyć asymptoty poziome wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{2x + \sqrt{(x+1)^2}}{x-1}.$$

12. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^4 + 2mx^2 + 4 = 0$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste?
13. Rozwiązać równanie $\cos x (1 + \sin x + \sin^2 x + \dots) = 1$.
14. Rozłożyć wielomian $w(x) = x^3 - 3x + \alpha$ na czynniki liniowe wiedząc, że 4 jest resztą z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x - 2$.
15. Rozwiązać nierówność $3^x - 2^x < 3^{x-1}$.

Odpowiedzi do zadań

1. $x \in (\infty; -2) \cup (0; 1)$;
2. $y = x^2 + 2x + 2$;
3. $r = \frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$;
4. 32;
5. $y = -2x + 8$;
6. $d = 2$;
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$;
8. $x \in (0; 1) \cup (3; 12)$;
9. $l = \sqrt{2hR}$, gdzie $0 < h < 2R$;
10. funkcja f ma maksimum lokalne dla $x = \frac{3}{4}\pi$;
11. Proste $y = 3$ i $y = 1$ są odpowiednio prawostronną i lewostronną asymptotą poziomą;
12. $m \in (-\infty; -2)$;
13. $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
14. $W(x) = (x + 2)(x - 1)^2$;
15. $x \in (-\infty; 1)$.