POLITECHNIKA GDAŃSKA Gdańsk, 7.07.2003 r.

EGZAMIN WSTĘPNY Z MATEMATYKI

Zestaw składa się z 15 zadań. Zadania 1–5 oceniane będą w skali 0–2 punkty, zadania 6–15 w skali 0–4 punkty. Czas trwania egzaminu — 120 minut.

Powodzenia!

1. Naszkicować wykresy funkcji $y = |x|$ oraz $y = \frac{1}{x}$ i następnie rozwiązać nierówność $|x| < \frac{1}{x}$.
2. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b wpisano największy z możliwych kwadratów, którego dwa boki zawierają się w przyprostokątnych trójkąta. Obliczyć pole tego kwadratu.
3. Pewna książka była w sprzedaży przez 8 lat. W pierwszym roku sprzedano 5500 egzemplarzy. W każdym kolejnym roku sprzedano o 500 egzemplarzy mniej niż w roku poprzednim. Ile egzemplarzy książki sprzedano łącznie?
4. Napisać równania prostych przechodzących przez punkt $A(1, \sqrt{3})$ i nachylonych do osi Ox pod kątem $\frac{\pi}{3}$.
5. Niech A będzie zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że x jest całkowitą potęgą liczby 3 i jednocześnie $x < 1000$. Wyznaczyć sumę wszystkich liczb należących do zbioru A.
6. Obliczyć pole powierzchni bocznej i objętość wielościanu, którego wierzchołkami są wszystkie środki ścian sześcianu o krawędziach długości a.
7. Rozwiązać równanie $\cos x + \sin x = \frac{1}{\cos x}$.
8. Wyznaczyć te wartości parametru p, dla których rozwiązania równania $x^2 + px + p(p-1) = 0$ mają zgodne znaki.
9. W stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym, wpisano kulę. Obliczyć stosunek objętości kuli do objętości tego stożka.
10. Rozwiązać równanie $x^{\log x} = 1000000x$.
11. Rozwiązać równanie $1 - \log_4^2 2x + \log_4^4 2x - \log_4^6 2x + \ldots = \frac{4}{5}$.
12. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Naszkicować wykresy funkcji $y = f(x)$, $y = |f(x)|$ i $y = -|f(x)| + 2$. Wskazać wszystkie wartości parametru m, dla którego równanie $2 - |f(x)| = m$ ma dokładnie dwa rozwiązania.
13. Wyznaczyć liczby A i B takie, że $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$. Następnie rozwiązać nierówność $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} > 0,999$.
14. Dane są punkty $A(2,3)$, $B(1,-7)$ i $C(4,5)$. (a) Napisać równanie prostej ℓ przechodzącej przez punkty A i B. (b) Obliczyć odległość d punktu C od prostej ℓ. (c) Wyznaczyć pole trójkąta ABC.
15. Raz rzucono pięcioma kostkami do gry. Jakie jest prawdopodobieństwa zdarzenia A, że na wszystkich kostkach wypadła taka sama liczba oczek lub na każdej z nich wypadła inna liczba oczek?

Odpowiedzi do zadań

1. $x \in (0; 1)$;
2. $P = \dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2}$;
3. 30000;
4. $y = \sqrt{3}x$ i $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$;
5. $1092 + \dfrac{3}{2}$;
6. $P = a^2\sqrt{3}$ i $V = \dfrac{a^3}{6}$;
7. $x = k\pi$ i $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ dla $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
8. $p \in (1; \frac{4}{3}\rangle \cup \{0\}$;
9. $\dfrac{V_k}{V_s} = \dfrac{4}{9}$;
10. $x = 0,01$ lub $x = 1000$;
11. $x = \dfrac{1}{4}$ oraz $x = 1$;
12. $m \in (-\infty; -2) \cup \{2\}$;
13. $A = 1$, $B = -1$ i $n > 999$;
14. $10x - y - 17 = 0$, $d = \dfrac{18}{\sqrt{101}}$ i $P = 9$;
15. $P(A) = \dfrac{121}{1296}$.