ĆWICZENIE 1

TEORIA POLA. OPERATORY RÓŻNICZKOWE.

Operator różniczkowy Hamiltona (nabla)

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

Operator różniczkowania przestrzennego, formalnie traktowany jako wektor.

Gradient

$$\nabla\varphi=\mathrm{grad}\varphi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]$$

W wyniku mnożenia operatora nabla i wielkości skalarnej $\varphi=\varphi(x,y,z)$ otrzymuje się wektor gradientu pola skalarnego φ (gradient). Gradient wskazuje kierunek zmian wielkości skalarnej φ.

Każdemu polu skalarnemu φ można przypisać wektorowe pole gradientu $\vec{W}=\left[W_x,W_y,W_z\right]$. Operacja odwrotna nie zawsze jest możliwa. Jeżeli istnieje pole skalarne φ takie, że $\vec{W}=\mathrm{grad}\varphi$ to pole wektorowe $\vec{W}$ nazywamy <u>polem potencjalnym</u>.

Dywergencja

$$\nabla\circ\vec{W}=\mathrm{div}\vec{W}=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\circ\left[W_x,W_y,W_z\right]=\frac{\partial W_x}{\partial x}+\frac{\partial W_y}{\partial y}+\frac{\partial W_z}{\partial z}$$

W wyniku mnożenia operatora nabla i wielkości wektorowej $\vec{W}=\left[W_x,W_y,W_z\right]$ otrzymuje się wielkość skalarną, zwaną dywergencją lub rozbieżnością pola wektorowego.

Jeżeli pole wektorowe jest polem prędkości przepływu $\vec{U}=\left[U_x,U_y,U_z\right]$ to dywergencja prędkości mówi o tym, czy w rozpatrywanym obszarze płynnym istnieją jakieś źródła płynu.

$\mathrm{div}\vec{U}>0$	w rozpatrywanym punkcie obszaru płynnego istnieją dodatnie źródła płynu o jednostkowej wydajności równej $\mathrm{div}\vec{U}$
$\mathrm{div}\vec{U}<0$	w rozpatrywanym punkcie obszaru płynnego istnieją ujemne źródła płynu, tzw. upust
$\mathrm{div}\vec{U}=0$	w rozpatrywanym punkcie obszaru płynnego nie istnieją źródła płynu, pole jest bezźródłowe

Rotacja

$$\nabla\times\vec{W}=\mathrm{rot}\vec{W}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ W_x & W_y & W_z\end{vmatrix}=\left[\frac{\partial W_z}{\partial y}-\frac{\partial W_y}{\partial z},\frac{\partial W_x}{\partial z}-\frac{\partial W_z}{\partial x},\frac{\partial W_y}{\partial x}-\frac{\partial W_x}{\partial y}\right]$$

W wyniku mnożenia operatora nabla i wielkości wektorowej $\vec{W} = \left[W_x, W_y, W_z\right]$ otrzymuje się wielkość wektorową zwaną rotacją pola wektorowego.
Jeżeli pole wektorowe $\vec{W}$ opisuje pole prędkości przepływu $\vec{U} = \left[U_x, U_y, U_z\right]$ to wartość rotacji tego pola wskazuje na ruch wirowy elementów płynu.

$$\mathrm{rot}\vec{U} = \vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}, \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}, \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right] = \left[\Omega_X, \Omega_Y, \Omega_Z\right]$$

$\mathrm{rot}\vec{U} \neq \vec{0}$ przepływ wirowy
$\mathrm{rot}\vec{U} = \vec{0}$ przepływ bezwirowy

Tożsamości:

a) $\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\varphi\right) = \Delta\varphi$

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\varphi\right) = \nabla \circ \nabla\varphi = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \circ \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$$

<u>Wniosek</u>: dywergencja gradientu skalara φ to Δφ laplasjan skalara φ.
Laplasjan jest główną częścią wielu równań mechaniki płynów, m.in. równania Laplace'a, które rządzi tzw. przepływami potencjalnymi.

b) $\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{U}\right) = 0$

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{U}\right) = \nabla \circ \left(\nabla \times \vec{U}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \circ \left[\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}, \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}, \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U_x}{\partial z \partial y} = 0$$

<u>Wniosek</u>: Pola dla których dywergencja znika nazywamy polami bezźródłowymi.

c) $\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}\varphi\right) = \vec{0}$

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}\varphi\right) = \nabla \times \left(\mathrm{grad}\varphi\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial x}\right] = \left[0,0,0\right] = \vec{0}$$

<u>Wniosek</u>: Pola dla których rotacja znika nazywamy polami bezwirowymi lub potencjalnymi.

Operator różniczkowania substancjalnego (pochodna materialna, pochodna substancjalna, operator Stokesa)

Operator różniczkowania materialnego określa tempo zmiany dowolnej własności związanej z elementarną objętością ciała, która może znajdować się w ruchu, w odróżnieniu od różniczkowania lokalnego – związanego z układem odniesienia, który zwykle uznaje się za nieruchomy.

Pochodna materialna jest szczególną interpretacją pochodnej funkcji wielu zmiennych, związaną z eulerowskim sposobem opisu ruchu płynu. Pokazuje ona, w jaki sposób zmienia się w czasie dowolny parametr charakteryzujący element płynu poruszający się w polu tego parametru.

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U}\mathrm{grad}$$

gdzie:

$\frac{D}{Dt}$	**pochodna substancjalna (materialna)** obrazuje całość zmian jakim podlega znajdujący się w chwili czasu t w punkcie (x,y,z) element płynu
$\frac{\partial}{\partial t}$	**pochodna lokalna** obrazuje zmiany jakie zachodzą z upływem czasu dt w danym punkcie pola przepływu (tj. pokazuje zmiany wynikające z niestacjonarności pola przepływu)
$\vec{U}\mathrm{grad}$	**pochodna konwekcyjna (unoszenia)** obrazuje zmiany jakie zachodzą przy przemieszczeniu w czasie dt elementu płynu z punktu (x,y,z) do punktu (x+dx,y+dy,z+dz)

Jeżeli H jest funkcją skalarną zmiennych Eulera $H = H\left(t, x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)$

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = U_x \qquad \frac{dy}{dt} = U_y \qquad \frac{dz}{dt} = U_z$$

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}U_x + \frac{\partial H}{\partial y}U_y + \frac{\partial H}{\partial z}U_z = \frac{\partial H}{\partial t} + \vec{U}\mathrm{grad}H$$

Zastosowanie operatora pochodnej materialnej do składowych pola prędkości pozwala obliczyć przyspieszenie materialne, tj. przyspieszenie elementu płynu poruszającego się w niestacjonarnym i niejednorodnym polu prędkości.