ĆWICZENIE 10
PRZEPŁYW CIECZY NIEŚCIŚLIWEJ, LEPKIEJ PRZEZ RUROCIĄG

Zagadnienie: przepływ przez rurociąg
Przepływ: stacjonarny (ustalony)
Czynnik: ciecz nieściśliwa ρ=const, lepka μ=const
Układ przepływowy: rurociąg kołowy o promieniu r_0

Układ równań dla takiego przepływu można opisać równaniem zachowania masy oraz równaniem Naviera – Stokesa.

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{U} = 0 \\ \rho \dfrac{d\vec{U}}{dt} = \rho f - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{U} \end{cases}$$

Równanie zachowania masy jest równaniem skalarnym, równanie Naviera – Stokesa równaniem wektorowym, które zapisać można w formie skalarnej.

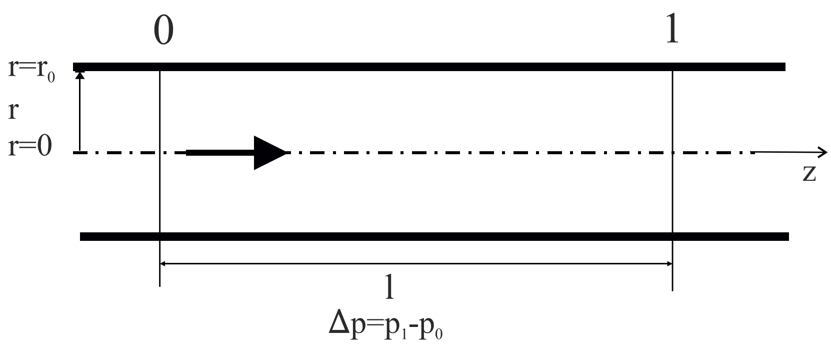
$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_x}{\partial x} + \dfrac{\partial U_y}{\partial y} + \dfrac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \dfrac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \dfrac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \dfrac{\partial U_x}{\partial z} = f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial U_x^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial U_x^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial U_x^2}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \dfrac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \dfrac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \dfrac{\partial U_y}{\partial z} = f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial U_y^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial U_y^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial U_y^2}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \dfrac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \dfrac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \dfrac{\partial U_z}{\partial z} = f_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\dfrac{\partial U_z^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial U_z^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial U_z^2}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

gdzie:

U_x, U_y, U_z	składowe wektora prędkości
p	ciśnienie
f_x, f_y, f_z	składowe wektora gęstości rozkładu sił masowych (np. grawitacja)
μ	dynamiczny współczynnik lepkości

Niewiadomymi w tym układzie 4 równań są składowe wektora prędkości oraz ciśnienie: U_x, U_y, U_z, p

Rozwiązanie zagadnienia dla następującego przypadku:



Dane:

r_0	promień rurociągu
$\Delta p = p_1 - p_0$	spadek ciśnienia na odcinku 0-1 rurociągu
l	długość odcinka 0-1 rurociągu
μ	dynamiczny współczynnik lepkości
ρ	gęstość cieczy

Szukane:

rozkład prędkości $U_z(r)$

Rozwiązanie:

Składowe wektora prędkości $\vec{U} = \left[U_r, U_\varphi, U_z\right]$ dla przepływu jednowymiarowego wyrażone w cylindrycznym układzie współrzędnych:

U_r	składowa promieniowa wektora prędkości $\vec{U}$
U_φ	składowa obwodowa wektora prędkości $\vec{U}$
U_z	składowa osiowa wektora prędkości $\vec{U}$

Składowe wektora gęstości rozkładu sił masowych przy zaniedbaniu grawitacji: dla $\vec{f} = \vec{g} = \vec{0}$

$$f_r = 0, \quad f_\varphi = 0, \quad f_z = 0$$

Rozkład ciśnień: $p = p(z)$, dla $\vec{f} = \vec{g} = \vec{0}$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{l}$$

Układ równań zachowania przedstawiony w cylindrycznym układzie współrzędnych:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U_r}{\partial r}+\dfrac{U_r}{r}+\dfrac{\partial U_\varphi}{r\partial\varphi}+\dfrac{\partial U_z}{\partial z}=0\\
\rho\left(\dfrac{\partial U_r}{\partial t}+U_r\dfrac{\partial U_r}{\partial r}+U_\varphi\dfrac{\partial U_r}{r\partial\varphi}+U_z\dfrac{\partial U_r}{\partial z}-\dfrac{U_\varphi^2}{r}\right)=\rho f_r-\dfrac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(\Delta U_r-\dfrac{U_r}{r^2}-\dfrac{2\partial U_\varphi}{r^2\partial\varphi}\right)\\
\rho\left(\dfrac{\partial U_\varphi}{\partial t}+U_r\dfrac{\partial U_\varphi}{\partial r}+U_\varphi\dfrac{\partial U_\varphi}{r\partial\varphi}+U_z\dfrac{\partial U_\varphi}{\partial z}+\dfrac{U_r U_\varphi}{r}\right)=\rho f_\varphi-\dfrac{\partial p}{\partial r\partial\varphi}+\mu\left(\Delta U_\varphi-\dfrac{U_\varphi}{r^2}-\dfrac{2\partial U_r}{r^2\partial\varphi}\right)\\
\rho\left(\dfrac{\partial U_z}{\partial t}+U_r\dfrac{\partial U_z}{\partial r}+U_\varphi\dfrac{\partial U_z}{r\partial\varphi}+U_z\dfrac{\partial U_r}{\partial z}\right)=\rho f_z-\dfrac{\partial p}{\partial z}+\mu\Delta U_z
\end{cases}$$

Laplasjan Δ w układzie cylindrycznym ma postać:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Po wprowadzeniu danych otrzymujemy:

$$\begin{cases}
0=0\\
0=-\dfrac{\partial p}{\partial r}\\
0=0\\
0=-\dfrac{\partial p}{\partial z}+\mu\Delta U_z
\end{cases}$$

Rozwiązanie równania $-\dfrac{\partial p}{\partial r}=0$ prowadzi do zależności: $p=p(r)$

Rozwiązanie równania: $-\dfrac{\partial p}{\partial z}+\mu\Delta U_z=0$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\mu\Delta U_z$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\mu\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial r}\right)$$

Dla $\dfrac{\partial p}{\partial z}=-\dfrac{\Delta p}{l}$ otrzymujemy:

$$-\frac{\Delta p}{l}=\mu\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial r}\right)$$

$$-\frac{\Delta p}{\mu l}=\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial r}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego rzędu drugiego:

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial r} = -\frac{\Delta p}{\mu l}$$

Równanie jednorodne:

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial r} = 0$$

Podstawienie: $\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} = \frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial U_z}{\partial r} = f$

$$\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} f = 0$$

$$\frac{\partial f}{f} = -\frac{\partial r}{r}$$

$$\int \frac{df}{f} = -\int \frac{dr}{r}$$

$$ln|f| = -ln|r| + ln|C|$$

$$f_0 = \frac{C}{r}$$

Uzmiennienie stałej C:

$$f = \frac{C(r)}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} f = \frac{\frac{\partial C(r)}{\partial r} r - C(r)}{r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial C(r)}{\partial r} - \frac{C(r)}{r^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial C(r)}{\partial r} - \frac{C(r)}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{C(r)}{r} = -\frac{\Delta p}{\mu l}$$

$$\frac{\partial C(r)}{\partial r} = -\frac{\Delta p}{\mu l} r$$

$$\int \frac{\partial C(r)}{\partial r} dr = -\int \frac{\Delta p}{\mu l} r dr$$

$$C(r) = -\frac{\Delta p}{\mu l}\frac{r^2}{2}$$

$$f_s = -\frac{\Delta p}{\mu l}\frac{r^2}{2}\frac{1}{r} = -\frac{\Delta p}{2\mu l} r$$

$$f = f_0 + f_s = \frac{C}{r} - \frac{\Delta p}{2\mu l} r$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial r} = \frac{C}{r} - \frac{\Delta p}{2\mu l} r$$

$$\int \frac{\partial U_z}{\partial r} dr = \int \left(\frac{C}{r} - \frac{\Delta p}{2\mu l} r \right) dr$$

$$U_z = C\,ln|r| - \frac{\Delta p}{2\mu l}\frac{r^2}{2} + C_1$$

$$U_z(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu l}r^2 + C\,ln|r| + C_1$$

Stałe całkowania równania $U_z(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu l}r^2 + C\,ln|r| + C_1$ wyznaczyć można z warunków brzegowych:

$U_z(r=0) = U_z$ z warunku wynika, że C=0 (prędkość jest ograniczona do pewnej wielkości)

$U_z(r=r_0) = 0$ z warunku wynika, że $C_1 = \frac{\Delta p}{4\mu l}r_0^2$

Rozkład prędkości U_z w funkcji promienia r wyraża się zależnością

$$\boxed{U_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(r_0^2 - r^2\right)}$$

Określenie prędkości średniej:

$$\bar{U} = \frac{\iint\limits_S U dS}{S_0}$$

$$\bar{U} = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(r_0^2 - r^2\right) r dr = \frac{1}{\pi r_0^2} 2\pi \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(r_0^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{r_0} = \frac{1}{\pi r_0^2} 2\pi \frac{\Delta p}{4\mu l}\frac{r_0^4}{4} = \frac{\Delta p r_0^2}{8\mu l}$$

$$\bar{U} = \frac{\Delta p}{8\mu l}r_0^2$$

Zależność tę można przekształcić do postaci Darcy'ego – Weisbacha dla $D = 2r_0$

$$\boxed{\Delta p = \lambda \frac{l}{D}\frac{\rho \bar{U}^2}{2}}$$

gdzie λ jest współczynnikiem oporu zależnym od liczy Reynoldsa.