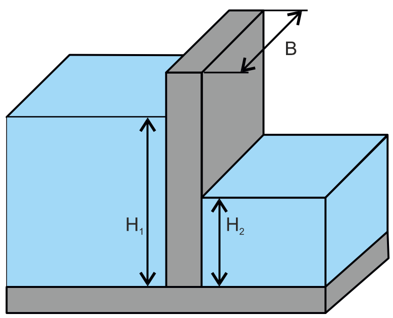
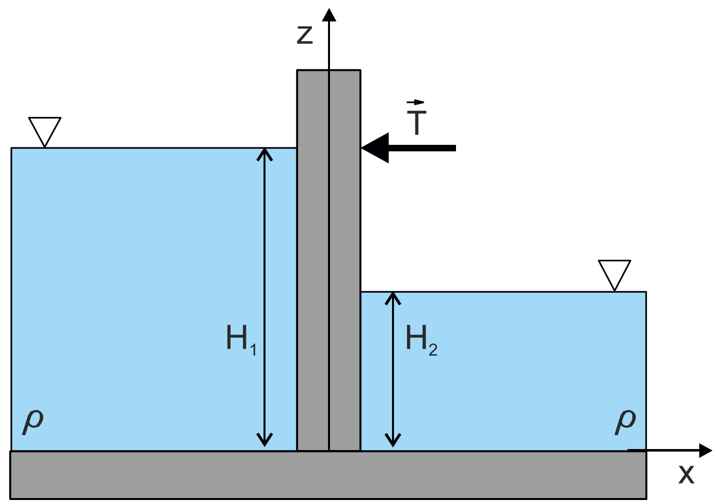
ĆWICZENIE 11
HYDROSTATYKA. NAPÓR NA ŚCIANY PŁASKIE.

Przykład 1
Wyznaczyć siły naporu hydrostatycznego działające na ściany przegrody o szerokości B.
Wyznaczyć moment przewracający przegrodę oraz siłę T, jaką należy przyłożyć, aby utrzymać przegrodę w równowadze.

Dane: H_1, H_2, B, ρ
Szukane: N, M_p, T





Wyznaczenie sił naporu hydrostatycznego działających na ściany przegrody

Napór hydrostatyczny na powierzchnię S

$$\boxed{\vec{N} = -\iint_S p\vec{n}dS}$$

gdzie:
- $\vec{N}$ jest siłą naporu hydrostatycznego,
- $p = p_0 + p''$ jest ciśnieniem względnym,
- $\vec{n}$ jest wersorem normalnym do powierzchni S,
- dS jest elementem powierzchni.

Przy przyjęciu, że ciśnienie atmosferyczne p_0 działa na ściany przegrody z obu stron można rozważać napór hydrostatyczny w postaci

$$\vec{N}'' = -\iint_S p''\vec{n}dS$$

Napór hydrostatyczny działający na powierzchnię S z lewej strony przegrody:

$$p_1'' = \rho g (H_1 - z)$$

$$dS = dydz$$

$$y_1 \in (0,B) \quad \wedge \quad z_1 \in (0,H_1)$$

$$\vec{n}_1 = -\vec{i}$$

$$\vec{N}_1'' = -\iint_{S_1} p_1'' \vec{n}_1 dS = -\int_0^B dy \int_0^{H_1} \rho g (H_1 - z)(-\vec{i}) dz = \vec{i}\rho g B \int_0^{H_1} (H_1 - z)\, dz = \vec{i}\rho g B \left(H_1 z - \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{H_1} = \frac{1}{2}\rho g B H_1^2 \vec{i}$$

Napór hydrostatyczny działający na powierzchnię S z prawej strony przegrody:

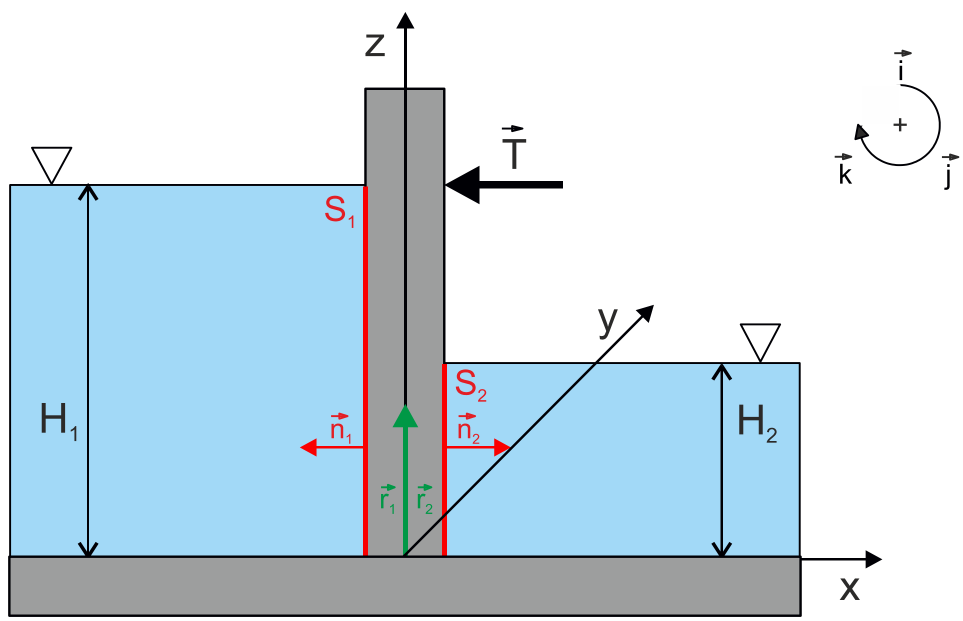
$$p_2'' = \rho g (H_2 - z)$$

$$dS = dydz$$

$$y_2 \in (0,B) \quad \wedge \quad z_2 \in (0,H_2)$$

$$\vec{n}_2 = \vec{i}$$

$$\vec{N}_2'' = -\iint_{S_1} p_2'' \vec{n}_2 dS = -\int_0^B dy \int_0^{H_2} \rho g (H_2 - z) \vec{i}\, dz = -\vec{i}\rho g B \int_0^{H_2} (H_2 - z)\, dz = -\vec{i}\rho g B \left(H_2 z - \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{H_2} = -\frac{1}{2}\rho g B H_1^2 \vec{i}$$



Moment naporu hydrostatycznego na powierzchnię S

$$\boxed{\vec{M} = -\iint_S \vec{r} \times p\vec{n} dS}$$

gdzie:

$\vec{r}$ jest ramieniem działania siły naporu hydrostatycznego.

Przy przyjęciu, że ciśnienie atmosferyczne p_0 działa na ściany przegrody z obu stron można rozważać moment naporu hydrostatycznego w postaci

$$\vec{M}'' = -\iint\limits_{S} \vec{r} \times p''\vec{n}\,dS$$

Moment naporu hydrostatycznego działający na lewą stronę przegrody:

$$\vec{M}_1'' = -\iint\limits_{S_1} \vec{r}_1 \times p_1''\,\vec{n}_1 dS = -\int_0^B dy \int_0^{H_1} z\vec{k} \times \rho g\left(H_1 - z\right)\left(-\vec{i}\right)dz = \vec{j}\rho g B\int_0^{H_1}\left(H_1 - z\right)z\,dz =$$

$$= \vec{j}\rho g B\left(H_1\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^{H_1} = \frac{1}{6}\rho g B H_1^3\vec{j}$$

gdzie: $\vec{r}_1 = z\vec{k}$

Moment naporu hydrostatycznego działający na prawą stronę przegrody:

$$\vec{M}_2'' = -\iint\limits_{S_2} \vec{r}_2 \times p_2''\,\vec{n}_2 dS = -\int_0^B dy \int_0^{H_2} z\vec{k} \times \rho g\left(H_2 - z\right)\vec{i}\,dz = -\vec{j}\rho g B\int_0^{H_2}\left(H_2 - z\right)z\,dz =$$

$$= -\vec{j}\rho g B\left(H_2\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^{H_2} = -\frac{1}{6}\rho g B H_2^3\vec{j}$$

gdzie: $\vec{r}_2 = z\vec{k}$

Moment przewracający przegrodę:

$$\vec{M}_p'' = \vec{M}_1'' + \vec{M}_2''$$

$$\vec{M}_p'' = \frac{1}{6}\rho g B\vec{j} - \frac{1}{6}\rho g B H_1^3\vec{j} = \frac{1}{6}\rho g B\left(H_1^3 - H_2^3\right)\vec{j}$$

Moment pochodzący od siły $\vec{T}$ działającej na ramieniu $\vec{r}_3$

$$\vec{M}_3'' = \vec{r}_3 \times \vec{T} = H_1\vec{k} \times T\left(-\vec{i}\right) = -H_1 T\vec{j}$$

gdzie: $\vec{r}_3 = H_1\vec{k}$, $\vec{T} = T\left(-\vec{i}\right)$.

Warunek równowagi momentów:

$$\sum_{i=1}^{3}\vec{M}_i'' = \vec{0} \qquad \vec{M}_1'' + \vec{M}_2'' + \vec{M}_3'' = \vec{0}$$

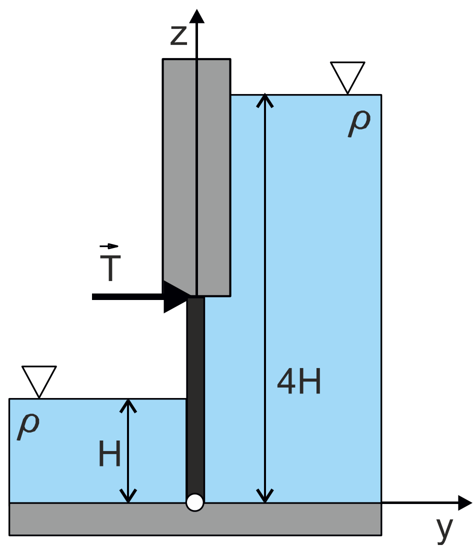
$$\frac{1}{6}\rho g B H_1^3\vec{j} - \frac{1}{6}\rho g B H_2^3\vec{j} - H_1 T\vec{j} = 0\,\vec{j}$$

$$H_1 T = \frac{1}{6}\rho g B\left(H_1^3 - H_2^3\right)$$

Siła, jaką należy przyłożyć, aby utrzymać przegrodę w równowadze: $T = \frac{1}{6}\rho g B\frac{\left(H_1^3 - H_2^3\right)}{H_1}$

Przykład 2
Prostokątna przegroda o szerokości B rozdziela dwa zbiorniki wody o głębokościach H i 4H. Wyznaczyć wartość siły T, potrzebnej do utrzymania jej w równowadze.

Dane: H, B, ρ
Szukane: T



Moment naporu hydrostatycznego na powierzchnię S, przy przyjęciu, że ciśnienie atmosferyczne p_0 działa na ściany przegrody z obu stron

$$\vec{M}'' = -\iint_S \vec{r} \times p'' \vec{n} dS$$

Moment naporu hydrostatyczny działający na lewą stronę przegrody:

$$\vec{M}_1'' = -\iint_{S_1} \vec{r}_1 \times p_1'' \vec{n}_1 dS = -\int_0^B dx \int_0^H z\vec{k} \times \rho g (H - z)(-\vec{j}) dz = \; = -\vec{i}\rho g B \int_0^H (H - z) z \, dz =$$

$$= -\vec{i}\rho g B \left(H\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right)\Bigg|_0^H = -\frac{1}{6}\rho g B H^3 \vec{i}$$

$$p_1'' = \rho g (H - z)$$

$$dS = dxdz$$

$$x_1 \in (0, B) \quad \wedge \quad z_1 \in (0, H)$$

$$\vec{n}_1 = -\vec{j}$$

$$\vec{r}_1 = z\vec{k}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

Moment naporu hydrostatyczny działający na lewą stronę przegrody:

$$\vec{M}_2'' = -\iint\limits_{S_2} \vec{r}_2 \times p_2''\, \vec{n}_2 dS = -\int_0^B dx \int_0^{2H} z\vec{k} \times \rho g\left(4H - z\right) \vec{j} dz = \quad = \vec{i}\rho g B \int_0^{2H} \left(4H - z\right) z\, dz =$$

$$= \vec{i}\rho g B\left(4H\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2H} = \frac{16}{3}\rho g B H^3 \vec{i}$$

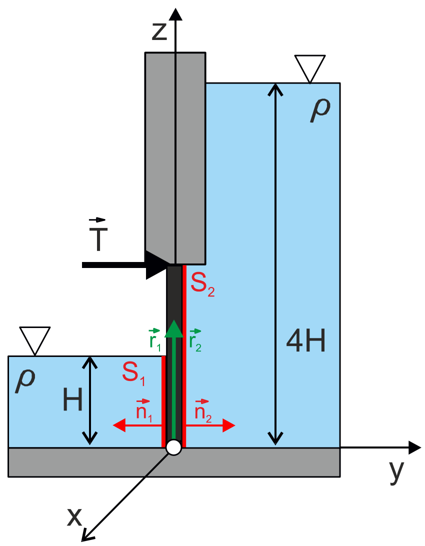
$$p_2'' = \rho g\left(4H - z\right)$$

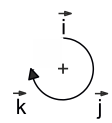
$$dS = dxdz$$

$$x_2 \in \left(0,B\right) \quad \wedge \quad z_2 \in \left(0,2H\right)$$

$$\vec{n}_2 = \vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = z\vec{k}$$





Moment pochodzący od siły $\vec{T}$ działającej na ramieniu $\vec{r}_3$

$$\vec{M}_3'' = \vec{r}_3 \times \vec{T} = 2H\vec{k} \times T\vec{j} = 2HT\left(-\vec{i}\right)$$

gdzie: $\vec{r}_3 = 2H\vec{k}$, $\vec{T} = T\vec{j}$.

Warunek równowagi momentów:

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{M}_i'' = \vec{0}$$

$$\vec{M}_1'' + \vec{M}_2'' + \vec{M}_3'' = \vec{0}$$

$$-\frac{1}{6}\rho g B H^3 \vec{i} + \frac{16}{3}\rho g B H^3 \vec{i} - 2HT\vec{i} = 0\vec{i}$$

Siła, jaką należy przyłożyć, aby utrzymać przegrodę w równowadze: $T = \frac{31}{12}\rho g B H^2$