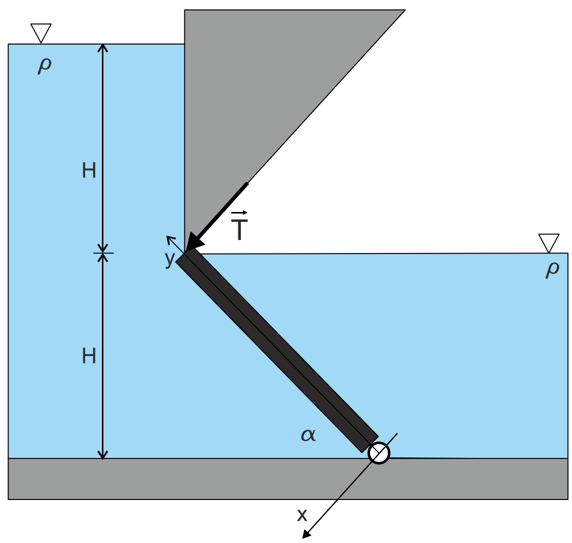
ĆWICZENIE 12
HYSDROSTATYKA. NAPÓR NA ŚCIANY PŁASKIE.

Przykład 1
Wyznaczyć siłę naporu hydrostatycznego działającą na przegrodę o szerokości B.
Wyznaczyć siłę T, jaką należy przyłożyć, aby utrzymać przegrodę w równowadze.

Dane: H, B, L, α, ρ
Szukane: N, T



Wyznaczenie sił naporu hydrostatycznego działających na ściany przegrody

Napór hydrostatyczny na powierzchnię S, przy przyjęciu, że ciśnienie atmosferyczne p_0 działa na ściany przegrody z obu stron

$$\vec{N}'' = -\iint_S p''\vec{n}dS$$

Napór hydrostatyczny działający na powierzchnię S z lewej strony przegrody:

$$p_1'' = \rho g\left(2H - y\,sin\,\alpha\right)$$

$$dS = dydz$$

$$y_1 \in \left(0, \frac{H}{sin\,\alpha}\right) \quad \wedge \quad z_1 \in \left(0, B\right)$$

$$\vec{n}_1 = \vec{i}$$

$$\vec{N}_1'' = -\iint_{S_1} p_1''\,\vec{n}_1 dS = -\int_0^B dz \int_0^{H/\sin\alpha} \rho g\left(2H - y\sin\alpha\right)\vec{i}\,dy = -\vec{i}\rho g B\left(2Hy - \frac{y^2}{2}\sin\alpha\right)\Bigg|_0^{H/\sin\alpha} =$$

$$= -\vec{i}\rho g B\left(2H\frac{H}{\sin\alpha} - \frac{1}{2}\frac{H^2}{\sin^2\alpha}\sin\alpha\right) = -\frac{3}{2}\rho g B\frac{H^2}{\sin\alpha}\vec{i}$$

Napór hydrostatyczny działający na powierzchnię S z prawej strony przegrody:

$$p_2'' = \rho g\left(H - y\sin\alpha\right)$$

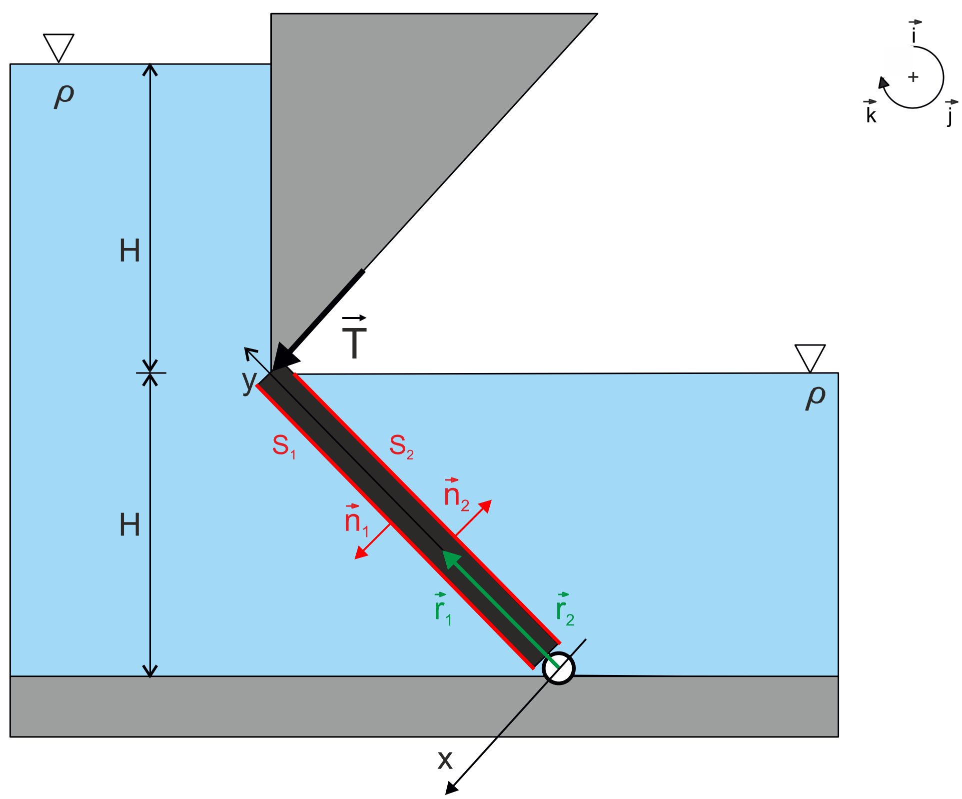
$$dS = dydz$$

$$y_2 \in \left(0, \frac{H}{\sin\alpha}\right) \quad \wedge \quad z_2 \in \left(0, B\right)$$

$$\vec{n}_1 = -\vec{i}$$

$$\vec{N}_2'' = -\iint_{S_1} p_2''\,\vec{n}_2 dS = -\int_0^B dz \int_0^{H/\sin\alpha} \rho g\left(H - y\sin\alpha\right)\left(-\vec{i}\right)dy = -\vec{i}\rho g B\left(2Hy - \frac{y^2}{2}\sin\alpha\right)\Bigg|_0^{H/\sin\alpha} =$$

$$= \vec{i}\rho g B\left(H\frac{H}{\sin\alpha} - \frac{1}{2}\frac{H^2}{\sin^2\alpha}\sin\alpha\right) = \frac{1}{2}\rho g B\frac{H^2}{\sin\alpha}\vec{i}$$



Moment naporu hydrostatycznego na powierzchnię S, przy przyjęciu, że ciśnienie atmosferyczne p_0 działa na ściany przegrody z obu stron

$$\vec{M}'' = -\iint_S \vec{r} \times p''\vec{n}dS$$

Moment naporu hydrostatycznego działający na lewą stronę przegrody:

$$\vec{M}_1'' = -\iint_{S_1} \vec{r}_1 \times p_1''\,\vec{n}_1 dS = -\int_0^B dz \int_0^{H/\sin\alpha} y\vec{j} \times \rho g\left(2H - y\sin\alpha\right)\vec{i}dy = \vec{k}\rho g B \int_0^{H/\sin\alpha}\left(2H - y\sin\alpha\right)y dy =$$

$$= \vec{k}\rho g B\left(2H\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\sin\alpha\right)\Bigg|_0^{H/\sin\alpha} = \vec{k}\rho g B\left(2H\frac{H^2}{2\sin^2\alpha} - \frac{H^3}{3\sin^3\alpha}\sin\alpha\right) = \frac{2}{3}\rho g B\frac{H^3}{\sin^2\alpha}\vec{k}$$

gdzie: $\vec{r}_1 = y\vec{j}$

Moment naporu hydrostatycznego działający na prawą stronę przegrody:

$$\vec{M}_2'' = -\iint_{S_2} \vec{r}_2 \times p_2''\,\vec{n}_2 dS = -\int_0^B dz \int_0^{H/\sin\alpha} y\vec{j} \times \rho g\left(H - y\sin\alpha\right)\left(-\vec{i}\right)dy = -\vec{k}\rho g B \int_0^{H/\sin\alpha}\left(H - y\sin\alpha\right)y dy =$$

$$= -\vec{k}\rho g B\left(H\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\sin\alpha\right)\Bigg|_0^{H/\sin\alpha} = -\frac{1}{6}\rho g B\frac{H^3}{\sin^2\alpha}\vec{k}$$

gdzie: $\vec{r}_2 = z\vec{k}$

Moment przewracający przegrodę:

$$\vec{M}_p'' = \vec{M}_1'' + \vec{M}_2''$$

$$\vec{M}_p'' = \frac{2}{3}\rho g B\frac{H^3}{\sin^2\alpha}\vec{k} - \frac{1}{6}\rho g B\frac{H^3}{\sin^2\alpha}\vec{k} = \frac{1}{2}\rho g B\frac{H^3}{\sin^2\alpha}\vec{k}$$

Moment pochodzący od siły $\vec{T}$ działającej na ramieniu $\vec{r}_3$

$$\vec{M}_3'' = \vec{r}_3 \times \vec{T} = \frac{H}{\sin\alpha}\vec{j} \times T\vec{i} = -\frac{H}{\sin\alpha}T\vec{k}$$

gdzie: $\vec{r}_3 = \frac{H}{\sin\alpha}\vec{j}$, $\vec{T} = T\vec{i}$.

Warunek równowagi momentów:

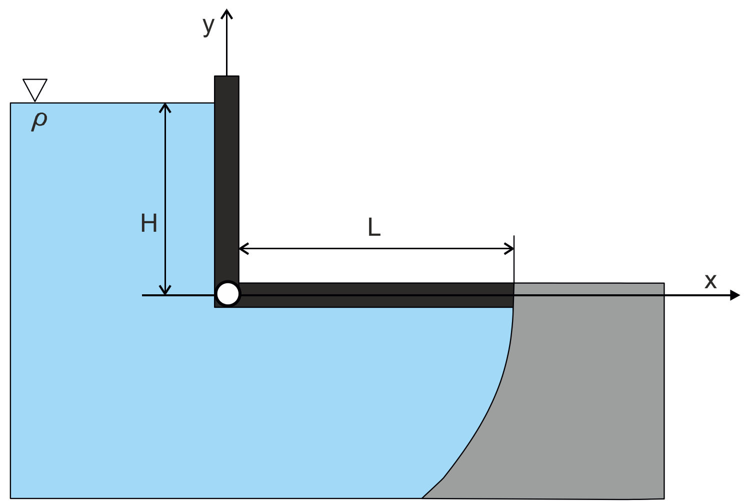
$$\sum_{i=1}^{3}\vec{M}_i'' = \vec{0} \qquad \vec{M}_1'' + \vec{M}_2'' + \vec{M}_3'' = \vec{0}$$

$$\frac{2}{3}\rho g B\frac{H^3}{\sin^2\alpha}\vec{k} - \frac{1}{6}\rho g B\frac{H^3}{\sin^2\alpha}\vec{k} - \frac{H}{\sin\alpha}T\vec{k} = 0\vec{k}$$

Siła, jaką należy przyłożyć, aby utrzymać przegrodę w równowadze: $T = \frac{1}{2}\rho g B\frac{H^2}{\sin\alpha}$

Przykład 2
Wyznaczyć wartość graniczną wysokości napełnienia zbiornika H, przy której nastąpi otwarcie klapy.

Dane: L, ρ
Szukane: H



Moment naporu hydrostatycznego działający na pionową powierzchnię klapy:

$$\vec{M}_1'' = -\iint_{S_1} \vec{r}_1 \times p_1'' \,\vec{n}_1 dS = -\int_0^B dz \int_0^H y\vec{j} \times \rho g (H-y)\left(-\vec{i}\right) dy = -\vec{k}\rho g B \int_0^H (H-y) y dy = -\vec{k}\rho g B H\left(H\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^H =$$

$$= -\frac{1}{6}\rho g B H^3 \vec{k}$$

gdzie:

$$p_1'' = \rho g (H-y)$$

$$dS = dydz$$

$$y_1 \in (0,H) \quad \wedge \quad z_1 \in (0,B)$$

$$\vec{n}_1 = -\vec{i}$$

$$\vec{r}_1 = y\vec{j}$$

Moment naporu hydrostatycznego działający na poziomą powierzchnię klapy:

$$\vec{M}_2'' = -\iint_{S_2} \vec{r}_2 \times p_2'' \,\vec{n}_2 dS = -\int_0^B dz \int_0^L x\vec{i} \times \rho g H\left(-\vec{j}\right) dx = \vec{k}\rho g B H \int_0^L x dx = \vec{k}\rho g B H\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^L = \frac{1}{2}\rho g B H L^2 \vec{k}$$

gdzie:

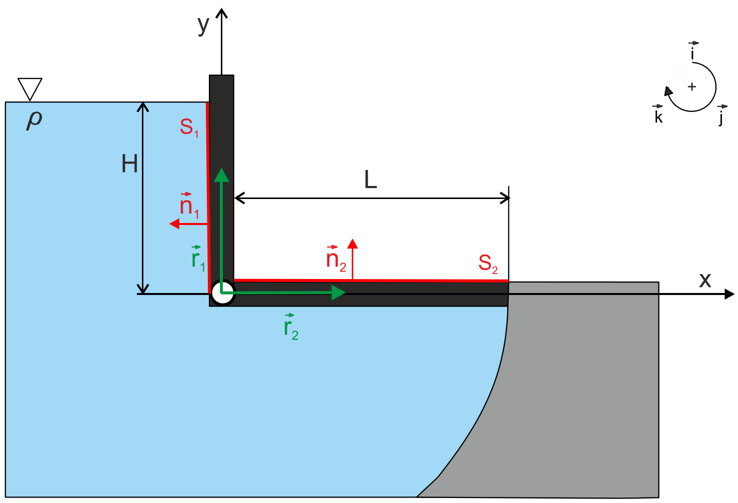
$$p_2'' = \rho g H$$

$$dS = dxdz$$

$$x_2 \in (0, L) \quad \wedge \quad z_2 \in (0, B)$$

$$\vec{n}_2 = -\vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = x\vec{i}$$



Warunek równowagi momentów:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_i'' = \vec{0}$$

$$\vec{M}_1'' + \vec{M}_2'' = \vec{0}$$

$$-\frac{1}{6}\rho g B H^3 \vec{k} + \frac{1}{2}\rho g B H L^2 \vec{k} = 0\vec{k}$$

Graniczna wysokość H powyżej której nastąpi otwarcie klapy wynosi: $H = \sqrt{3}L$