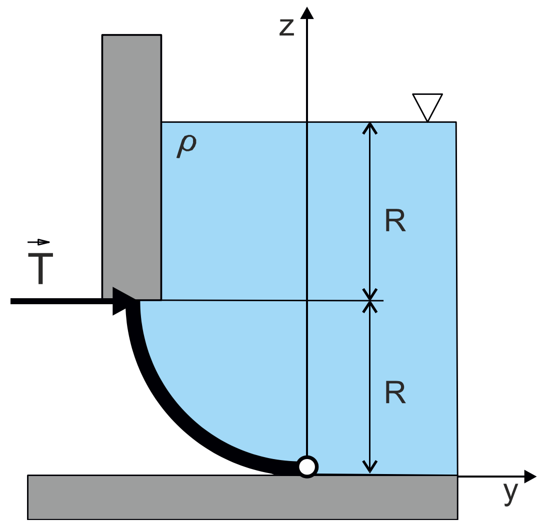
**ĆWICZENIE 13**
**HYDROSTATYKA. NAPÓR NA ŚCIANY ZAKRZYWIONE.**

**Przykład 1**
Wyznaczyć siłę T, jaką należy przyłożyć, aby utrzymać przegrodę o szerokości B w równowadze.

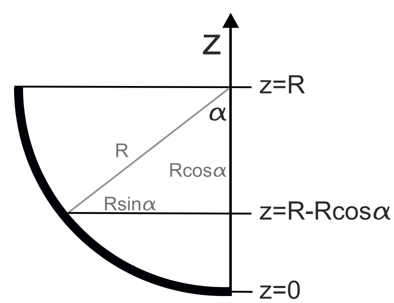
Dane: $R, B, \rho$
Szukane: T



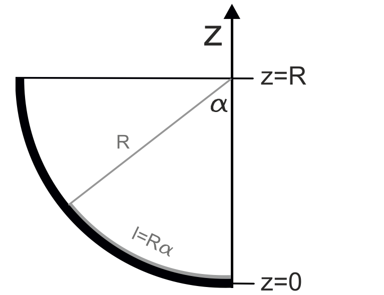

Moment naporu hydrostatycznego na powierzchnię S, przy przyjęciu, że ciśnienie atmosferyczne $p_0$ działa na ściany przegrody z obu stron

$$\vec{M}'' = -\iint_S \vec{r} \times p''\vec{n}\,dS$$

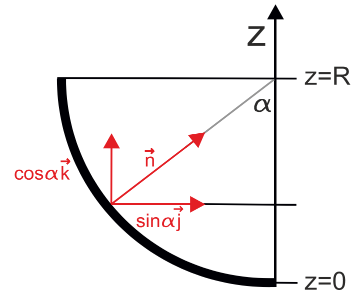
$$p_1'' = \rho g(2R - z)$$
$$z = R - R\cos\alpha$$
$$p_1'' = \rho g(R + R\cos\alpha)$$



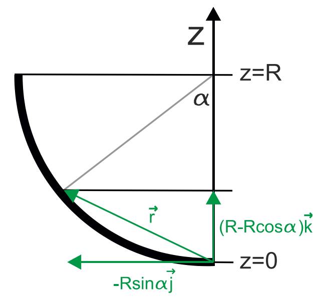

$$dS = dxdl$$
$$l = R\alpha, \quad dl = Rd\alpha$$
$$x \in (0,B) \quad \wedge \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\vec{n}_1 = \sin\alpha\,\vec{j} + \cos\alpha\,\vec{k}$$




$$\vec{r}_1 = R\left(1-\cos\alpha\right)\vec{k} - R\sin\alpha\,\vec{j}$$




Moment naporu hydrostatyczny działającego na ścianę przegrody:

$$\vec{M}_1'' = -\iint_S \vec{r}_1 \times p_1''\vec{n}\,dS = -\int_0^B dx \int_0^{\pi/2} \left(\left(R - R\cos\alpha\right)\vec{k} - R\sin\alpha\,\vec{j}\right) \times \rho g\left(R + R\cos\alpha\right)\left(\sin\alpha\,\vec{j} + \cos\alpha\,\vec{k}\right) R\,d\alpha =$$

$$= -\rho g B R^3 \int_0^{\pi/2} \left(-\vec{i}\left(1-\cos\alpha\right)\sin\alpha - \vec{i}\sin\alpha\cos\alpha\right)\left(1+\cos\alpha\right)d\alpha = \rho g B R^3\,\vec{i}\int_0^{\pi/2} \sin\alpha\left(1+\cos\alpha\right)d\alpha =$$

$$= \rho g B R^3\,\vec{i}\left(-\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}\rho g B R^3\,\vec{i}$$

Moment pochodzący od siły $\vec{T}$ działającej na ramieniu $\vec{r}_2$

$$\vec{M}_2'' = \vec{r}_2 \times \vec{T} = R\vec{k} \times T\vec{j} = -RT\,\vec{i}$$

gdzie: $\vec{r}_2 = R\vec{k}$ , $\vec{T} = T\vec{j}$ .

Warunek równowagi momentów:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_i'' = \vec{0}$$

$$\vec{M}_1'' + \vec{M}_2'' = \vec{0}$$

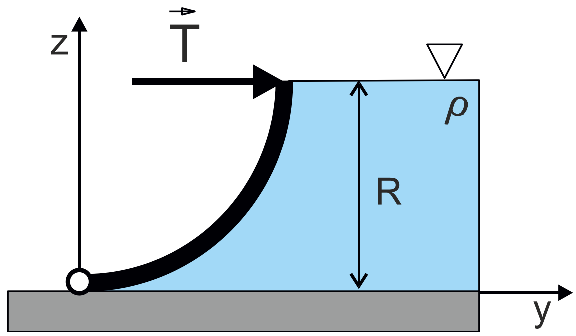
$$\frac{3}{2}\rho g B R^3\,\vec{i} - RT\,\vec{i} = 0\,\vec{i}$$

Siła, jaką należy przyłożyć, aby utrzymać przegrodę w równowadze:

$$T = \frac{3}{2}\rho g B R^2$$

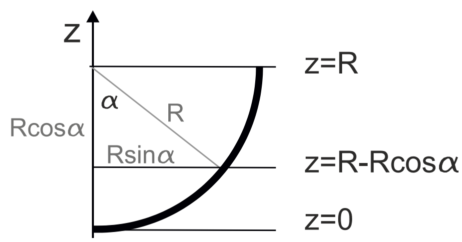
**Przykład 2**
Wyznaczyć siłę T, jaką należy przyłożyć, aby utrzymać przegrodę o szerokości B w równowadze.

Dane: $R, B, \rho$
Szukane: T

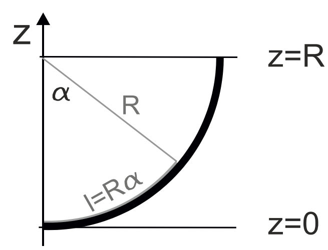



Moment naporu hydrostatycznego na powierzchnię S, przy przyjęciu, że ciśnienie atmosferyczne $p_0$ działa na ściany przegrody z obu stron

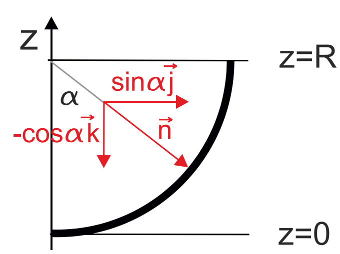
$$\vec{M}'' = -\iint_S \vec{r} \times p'' \vec{n} dS$$




$$p_1'' = \rho g (R - z)$$
$$z = R - R\cos\alpha$$
$$p_1'' = \rho g R \cos\alpha$$

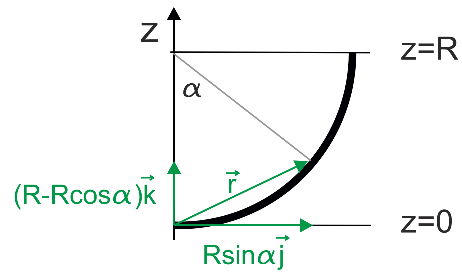



$$dS = dx dl$$
$$l = R\alpha, \quad dl = R d\alpha$$
$$x \in (0, B) \quad \wedge \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$




$$\vec{n}_1 = -\cos\alpha \vec{k} + \sin\alpha \vec{j}$$

$$\vec{r}_1 = R\left(1 - \cos\alpha\right)\vec{k} + R\sin\alpha\,\vec{j}$$




Moment naporu hydrostatyczny działającego na ścianę przegrody:

$$\vec{M}_1'' = -\iint_S \vec{r}_1 \times p_1''\vec{n}\,dS = -\int_0^B dx \int_0^{\pi/2} \left(\left(R - R\cos\alpha\right)\vec{k} + R\sin\alpha\,\vec{j}\right) \times \rho g R\cos\alpha\left(-\cos\alpha\,\vec{k} + \sin\alpha\,\vec{j}\right) R\,d\alpha =$$

$$= -\rho g B R^3 \int_0^{\pi/2} \left(-\vec{i}\left(1 - \cos\alpha\right)\sin\alpha - \vec{i}\sin\alpha\cos\alpha\right)\cos\alpha\,d\alpha = \rho g B R^3\vec{i}\int_0^{\pi/2} \sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha =$$

$$= \rho g B R^3\vec{i}\left(\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\rho g B R^3\vec{i}$$

Moment pochodzący od siły $\vec{T}$ działającej na ramieniu $\vec{r}_2$

$$\vec{M}_2'' = \vec{r}_2 \times \vec{T} = R\vec{k} \times T\vec{j} = -RT\vec{i}$$

gdzie: $\vec{r}_2 = R\vec{k}$ , $\vec{T} = T\vec{j}$ .

Warunek równowagi momentów:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_i'' = \vec{0}$$

$$\vec{M}_1'' + \vec{M}_2'' = \vec{0}$$

$$\frac{1}{2}\rho g B R^3\vec{i} - RT\vec{i} = 0\vec{i}$$

Siła, jaką należy przyłożyć, aby utrzymać przegrodę w równowadze:

$$T = \frac{1}{2}\rho g B R^2$$