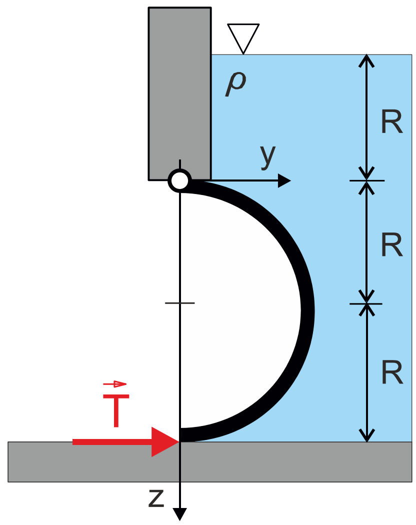
ĆWICZENIE 14
HYDROSTATYKA. NAPÓR NA ŚCIANY ZAKRZYWIONE.

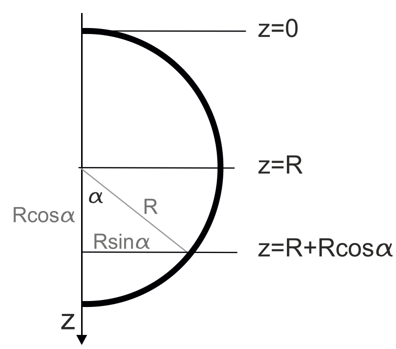
Przykład 1
Wyznaczyć siłę T, jaką należy przyłożyć, aby utrzymać przegrodę o szerokości B w równowadze.

Dane: R, B, ρ
Szukane: T

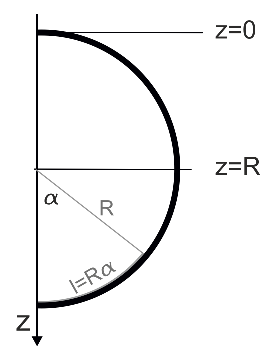


Moment naporu hydrostatycznego na powierzchnię S, przy przyjęciu, że ciśnienie atmosferyczne p_0 działa na ściany przegrody z obu stron

$$\vec{M}'' = -\iint_S \vec{r} \times p''\vec{n}dS$$

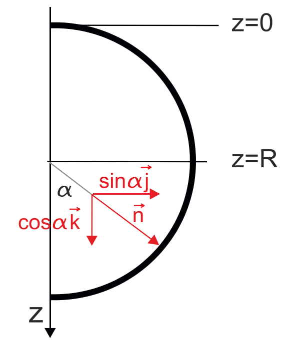


$$p_1'' = \rho g(R + z)$$
$$z = R + R\cos\alpha$$
$$p_1'' = \rho g(2R + R\cos\alpha)$$

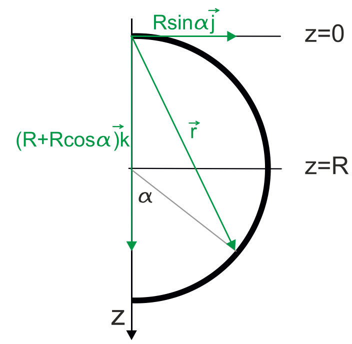


$$dS = dxdl$$
$$l = R\alpha, \quad dl = Rd\alpha$$
$$x \in (0,B) \quad \wedge \quad \alpha \in (0,\pi)$$

$$\vec{n}_1 = \cos\alpha\,\vec{k} + \sin\alpha\,\vec{j}$$



$$\vec{r}_1 = R(1+\cos\alpha)\vec{k} + R\sin\alpha\,\vec{j}$$



Moment naporu hydrostatyczny działającego na ścianę przegrody:

$$\vec{M}_1'' = -\iint_S \vec{r}_1 \times p_1''\vec{n}\,dS = -\int_0^B dx \int_0^\pi \left((R + R\cos\alpha)\vec{k} + R\sin\alpha\,\vec{j}\right) \times \rho g(2R + R\cos\alpha)\left(\cos\alpha\,\vec{k} + \sin\alpha\,\vec{j}\right) R\,d\alpha =$$

$$= -\rho g B R^3 \int_0^\pi \left(-\vec{i}(1+\cos\alpha)\sin\alpha + \vec{i}\sin\alpha\cos\alpha\right)(\cos\alpha + 2)\,d\alpha = \rho g B R^3 \vec{i} \int_0^\pi \sin\alpha(\cos\alpha + 2)\,d\alpha =$$

$$= \rho g B R^3 \vec{i}\left(\frac{1}{2}\sin^2\alpha - 2\cos\alpha\right)\Bigg|_0^\pi = 4\rho g B R^3 \vec{i}$$

Moment pochodzący od siły $\vec{T}$ działającej na ramieniu $\vec{r}_2$

$$\vec{M}_2'' = \vec{r}_2 \times \vec{T} = 2R\vec{k} \times T\vec{j} = -2RT\vec{i}$$

gdzie: $\vec{r}_2 = 2R\vec{k}$, $\vec{T} = T\vec{j}$.

Warunek równowagi momentów:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_i'' = \vec{0}$$

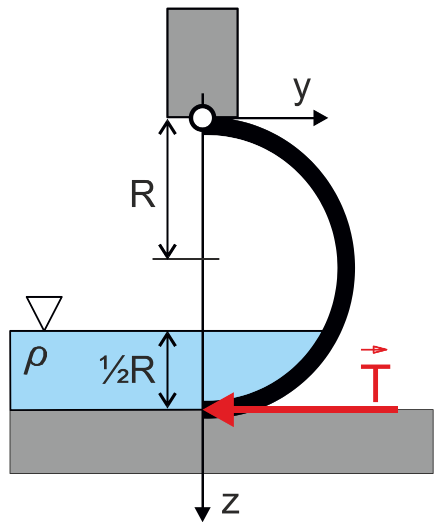
$$\vec{M}_1'' + \vec{M}_2'' = \vec{0}$$

$$4\rho g B R^3 \vec{i} - 2RT\vec{i} = 0\vec{i}$$

Siła, jaką należy przyłożyć, aby utrzymać przegrodę w równowadze: $T = 2\rho g B R^2$

Przykład 2
Wyznaczyć siłę T, jaką należy przyłożyć, aby utrzymać przegrodę o szerokości B w równowadze.

Dane: R, B, ρ
Szukane: T



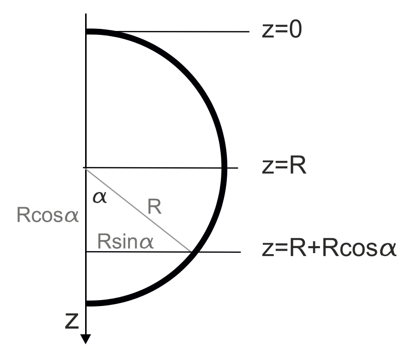
Moment naporu hydrostatycznego na powierzchnię S, przy przyjęciu, że ciśnienie atmosferyczne p_0 działa na ściany przegrody z obu stron

$$\vec{M}'' = -\iint_S \vec{r} \times p''\vec{n}dS$$

$$p_1'' = \rho g\left(z - \frac{3}{2}R\right)$$

$$z = R + R\cos\alpha$$

$$p_1'' = \rho g\left(R\cos\alpha - \frac{1}{2}R\right)$$

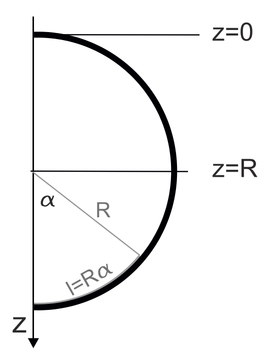


$$dS = dxdl$$

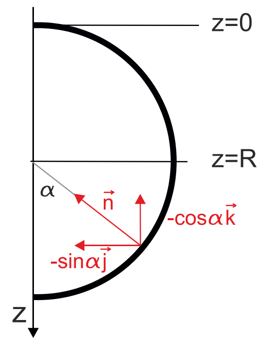
$$l = R\alpha, \quad dl = Rd\alpha$$

$$x \in (0,B) \quad \wedge \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

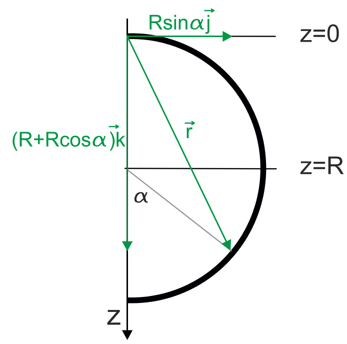
tylko przekrój zwilżony



$$\vec{n}_1 = -\cos\alpha\vec{k} - \sin\alpha\vec{j}$$



$$\vec{r}_1 = R(1+\cos\alpha)\vec{k} + R\sin\alpha\vec{j}$$



Moment naporu hydrostatyczny działającego na ścianę przegrody:

$$\vec{M}_1'' = -\iint_S \vec{r}_1 \times p_1''\vec{n}dS = -\int_0^B dx \int_0^{\pi/3} \left((R + R\cos\alpha)\vec{k} + R\sin\alpha\vec{j} \right) \times \rho g \left(R\cos\alpha - \frac{1}{2}R \right) \left(-\cos\alpha\vec{k} - \sin\alpha\vec{j} \right) R d\alpha =$$

$$= -\rho g B R^3 \int_0^{\pi/3} \left(-\vec{i}(1+\cos\alpha)\sin\alpha - \vec{i}\sin\alpha\cos\alpha \right) \left(\cos\alpha - \frac{1}{2} \right) d\alpha = -\rho g B R^3 \vec{i} \int_0^{\pi/3} \sin\alpha \left(\cos\alpha - \frac{1}{2} \right) d\alpha =$$

$$= -\rho g B R^3 \vec{i} \left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha \right) \Bigg|_0^{\pi/3} = -\frac{1}{8}\rho g B R^3 \vec{i}$$

Moment pochodzący od siły $\vec{T}$ działającej na ramieniu $\vec{r}_2$

$$\vec{M}_2'' = \vec{r}_2 \times \vec{T} = 2R\vec{k} \times T(-\vec{j}) = 2RT\vec{i}$$

gdzie: $\vec{r}_2 = 2R\vec{k}$, $\vec{T} = T(-\vec{j})$.

Warunek równowagi momentów:

$$\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_i'' = \vec{0}$$

$$\vec{M}_1'' + \vec{M}_2'' = \vec{0}$$

$$-\frac{1}{8}\rho g B R^3 \vec{i} + 2RT\vec{i} = 0\vec{i}$$

Siła, jaką należy przyłożyć, aby utrzymać przegrodę w równowadze: $T = \frac{1}{16}\rho g B R^2$