ĆWICZENIE 2
KINEMATYKA PŁYNÓW. PRZYSPIESZENIE PŁYNU. LINIA PRĄDU I TOR ELEMENTU PŁYNU.

PRZYSPIESZENIE ELEMENTU PŁYNU

Przykład 1
Ustalony przepływ płynu doskonałego określają składowe wektora prędkości
$U_x = x^2 y,\ \ U_y = -y,\ \ U_z = z^2$. Wyznaczyć:

a) pole wektorowe przyspieszeń,
b) przyspieszenie w punkcie K(2,1,0).

a) Przyspieszenie elementu płynu $\vec{a}$

Przyspieszenie elementu płynu $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ $\ \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ wyznaczamy stosując operator różniczkowania substancjalnego

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U}\text{grad}\right)\vec{U}$$

Składowe przyspieszenia w kierunku poszczególnych osi układu współrzędnych wyrażają się wzorami:

$$a_x = \frac{dU_x}{dt} = \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{dU_y}{dt} = \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{dU_z}{dt} = \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

Dla prędkości opisanej wzorami $U_x = x^2 y,\ \ U_y = -y,\ \ U_z = z^2$ otrzymujemy:

$$a_x = \frac{\partial\left(x^2 y\right)}{\partial t} + x^2 y \frac{\partial\left(x^2 y\right)}{\partial x} - y \frac{\partial\left(x^2 y\right)}{\partial y} + z^2 \frac{\partial\left(x^2 y\right)}{\partial z} = 2x^3 y^2 - x^2 y$$

$$a_y = \frac{\partial(-y)}{\partial t} + x^2 y \frac{\partial(-y)}{\partial x} - y \frac{\partial(-y)}{\partial y} + z^2 \frac{\partial(-y)}{\partial z} = y$$

$$a_z = \frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial t} + x^2 y \frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial x} - y \frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial y} + z^2 \frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial z} = 2z^3$$

Przyspieszenie $\vec{a} = \left[a_x, a_y, a_z\right] = \left[2x^3 y^2 - x^2 y, y, 2z^3\right]$.

b) Przyspieszenie elementu płynu $\vec{a}$ w punkcie K(2,1,0)

$$\vec{a} = \left[a_x, a_y, a_z\right] = [12,1,0]$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{145}$$

Przykład 2

Płaski ustalony przepływ płynu doskonałego określają składowe wektora prędkości $U_x = x^2$, $U_y = y^2$.

Wyznaczyć:

- pole wektorowe przyspieszeń,
- przyspieszenie w punkcie K(2,1).

c) Przyspieszenie elementu płynu $\vec{a}$

Przyspieszenie elementu płynu w ruchu płaskim $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ wyznaczamy stosując operator różniczkowania substancjalnego

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U} \operatorname{grad}\right)\vec{U}$$

Składowe przyspieszenia w kierunku poszczególnych osi układu współrzędnych wyrażają się wzorami:

$$a_x = \frac{dU_x}{dt} = \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{dU_y}{dt} = \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z}$$

Dla prędkości opisanej wzorami $U_x = x^2$, $U_y = y^2$ otrzymujemy:

$$a_x = \frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial t} + x^2 \frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial x} + y^2 \frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial y} = 2x^3$$

$$a_y = \frac{\partial\left(y^2\right)}{\partial t} + x^2 \frac{\partial\left(y^2\right)}{\partial x} + y^2 \frac{\partial\left(y^2\right)}{\partial y} = 2y^3$$

Przyspieszenie $\vec{a} = \left[a_x, a_y\right] = \left[2x^3, 2y^3\right]$.

d) Przyspieszenie elementu płynu $\vec{a}$ w punkcie K(2,1)

$$\vec{a} = \left[a_x, a_y\right] = [16,2]$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{16^2 + 2^2} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65}$$

Przykład 3

Płaski, ustalony przepływ płynu określa wektor prędkości $\vec{U} = ax\vec{i} - ay\vec{j}$, Wymiar współrzędnych x i y to metr, parametr a =1 s^{-1}.

a) Wyznaczyć równanie linii prądu.
b) Narysować rodzinę linii prądu, wskazać linię prądu, która przechodzi przez punkt (1,4) oraz wyznaczyć wektor prędkości w tym punkcie.
c) Wyznaczyć równanie toru elementu płynu, który w chwili $t=t_0$ znajduje się w punkcie K(1,2) pola przepływu,
d) Udowodnić, że linia prądu pokrywa się z torem poruszania się elementu płynu.

a) **LINIA PRĄDU**

Linia prądu - linia, do której w każdym punkcie w dowolnej chwili czasu t styczne są wektory prędkości. Równanie linii prądu ma postać:

$$\boxed{\vec{U} \times \partial\vec{r} = \vec{0}}$$

gdzie: $\vec{U} = \left[U_x, U_y, U_z\right] = U_x\vec{i} + U_y\vec{j} + U_z\vec{k}$ jest wektorem prędkości, a $\partial\vec{r} = \left[\partial x, \partial, \partial\right]$ jest elementem linii prądu.

Korzystając z tej zależności otrzymujemy:

$$\vec{U} \times \partial\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \end{vmatrix} = \left(U_y\partial z - U_z\partial y\right)\vec{i} + \left(U_z\partial x - U_x\partial z\right)\vec{j} + \left(U_x\partial y - U_y\partial x\right)\vec{k} = \vec{0}$$

Aby iloczyn wektorowy był równy zeru składowe wektora równe są zeru. Zatem:

$$\begin{cases} U_y\partial z - U_z\partial y = 0 \\ U_z\partial x - U_x\partial z = 0 \\ U_x\partial y - U_y\partial x = 0 \end{cases}$$

gdzie równanie $\frac{\partial z}{U_z} = \frac{\partial y}{U_y}$ przedstawia rzut linii prądu na płaszczyznę OYZ, równanie $\frac{\partial z}{U_z} = \frac{\partial x}{U_x}$ przedstawia rzut linii prądu na płaszczyznę OXZ, równanie $\frac{\partial y}{U_y} = \frac{\partial x}{U_x}$ przedstawia rzut linii prądu na płaszczyznę OXY.

Układ ten można przedstawić w postaci: $\boxed{\frac{\partial x}{U_x} = \frac{\partial y}{U_y} = \frac{\partial z}{U_z}}$

Dla przepływu płaskiego wyznacza się rzut linii prądu na płaszczyznę OXY.

$$\frac{\partial y}{U_y} = \frac{\partial x}{U_x}$$

$$\frac{\partial y}{-ay} = \frac{\partial x}{ax}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$ln|y| = -ln|x| + ln|C|$$
$$y = \frac{C}{x}$$

Równanie linii prądu ma postać $y = \frac{C}{x}$.

b) Rodzina linii prądu przedstawiona jest równaniem $y = \frac{C}{x}$ i przedstawia hiperbolę.

Linia prądu, która przechodzi przez punkt (1,4) określona jest równaniem $y = \frac{4}{x}$

Wektor prędkości $\vec{U} = [ax, -ay]$ w punkcie (1,4) określony jest składowymi $\vec{U} = [a, -4a]$. Dla a=1 $\vec{U} = [1, -4]$

c) **TOR ELEMENTU PŁYNU**

Tor elementu płynu jest to linia, wzdłuż której przemieszcza się element płynu traktowany jak punkt materialny.

Równanie toru elementu płynu:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = U_x \qquad \frac{dy}{dt} = U_y \qquad \frac{dz}{dt} = U_z}$$

Równanie toru elementu płynu można ogólnie zapisać w postaci:

$$\boxed{\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} = \frac{dz}{U_z}}$$

Mimo zewnętrznego podobieństwa do równania linii prądu, różni się od niego zasadniczo. W równaniu linii prądu czas jest stały, natomiast w równaniu toru elementu płynu czas jest zmienną.

Równanie toru elementu płynu:

$$\frac{dx}{dt} = U_x$$
$$\frac{dx}{dt} = ax$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int a dt$$
$$ln|x| = at + ln|C_1|$$
$$x = e^{at + C_1}$$
$$x = C_1 e^{at}$$

$$\frac{dy}{dt} = U_y$$
$$\frac{dy}{dt} = -ay$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int a dt$$
$$ln|y| = -at + ln|C_2|$$
$$y = e^{-at + C_2}$$
$$y = C_2 e^{-at}$$

Równanie toru elementu płynu w postaci parametrycznej (t-parametr):

$$\begin{cases} x = C_1 e^{at} \\ y = C_2 e^{-at} \end{cases}$$

Równanie toru elementu płynu w postaci ogólnej: $y = \frac{C_2}{C_1}\frac{1}{x}$, czyli $y = \frac{C}{x}$

Linia prądu i tor elementu płynu dla przepływu stacjonarnego (ustalonego)
Ponieważ ruch jest stacjonarny (niezależny od czasu) tory elementów płynu pokrywają się z liniami prądu.