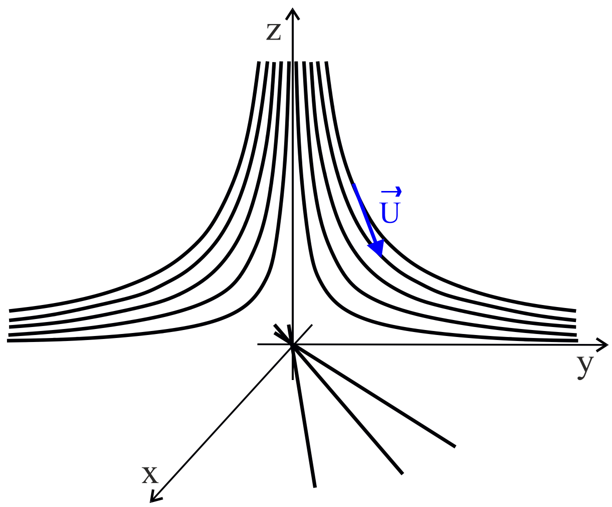
ĆWICZENIE 3

KINEMATYKA PŁYNU. NAPŁYW NA ŚCIANĘ.



Prędkość $\vec{U}$

Niech pole przepływu ma tę charakterystyczną cechę, że $\mathrm{rot}\vec{U} = \vec{0}$. Warunek $\mathrm{rot}\vec{U} = \vec{0}$ pociąga za sobą możliwość przedstawienia wektora prędkości w postaci $\vec{U} = \mathrm{grad}\varphi$, gdzie $\varphi = \varphi(x,y,z)$ jest potencjałem prędkości.

Na podstawie rozważań teoretycznych wyprowadzono wzór na potencjał prędkości:

$$\varphi = \frac{a}{2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right)$$

Wektor prędkości $\vec{U} = \left[U_x, U_y, U_z\right] = U_x\vec{i} + U_y\vec{j} + U_z\vec{k}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{U} = \mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = ax\vec{i} + ay\vec{j} + -2az\vec{k}$$

zatem wektor prędkości można zapisać w postaci $\vec{U} = \left[ax, ay, -2az\right]$, a składowe wektora prędkości w postaci $U_x = ax$, $U_y = ay$, $U_z = -2az$.

Widać stąd, że istnieje jeden punkt $P(0,0,0)$, w którym $U_x = U_y = U_z = 0$. Punkt, w którym $\vec{U} = \vec{0}$ nazywamy punktem spiętrzenia.

Dywergencja prędkości $\mathrm{div}\vec{U}$

Dywergencja prędkości określa źródłowość pola (mówi o tym, czy w rozpatrywanym obszarze płynnym istnieją jakieś źródła płynu).

$$\mathrm{div}\vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

Dla wektora prędkości opisanego zależnością $U_x = ax$, $U_y = ay$, $U_z = -2az$ dywergencja prędkości wynosi $\mathrm{div}\vec{U} = a + a - a = 0$. Pole jest bezźródłowe.

Rotacja prędkości $\mathrm{rot}\vec{U}$

Rotacja prędkości mówi o tym, czy w płynie istnieją jakieś wiry.

$\mathrm{rot}\vec{u} \neq 0$ przepływ wirowy

$\mathrm{rot}\vec{u} = 0$ przepływ bezwirowy

$$\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \left[\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\right]$$

Zatem, dla wektora prędkości opisanego zależnością $U_x = ax$, $U_y = ay$, $U_z = -2az$ rotacja prędkości wynosi

$$\mathrm{rot}\vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

Przepływ jest bezwirowy.

<u>Wniosek</u>: gdy przepływ jest potencjalny $\vec{U} = \mathrm{grad}\varphi$ to jest jednocześnie bezwirowy $\vec{\Omega} = \vec{0}$

Przyspieszenie elementu płynu $\vec{a}$

Przyspieszenie elementu płynu $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ wyznaczamy stosując operator różniczkowania substancjalnego

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U}\mathrm{grad}\right)\vec{U}$$

Składowe przyspieszenia w kierunku poszczególnych osi układu współrzędnych wyrażają się wzorami:

$$a_x = \frac{dU_x}{dt} = \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x\frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y\frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z\frac{\partial U_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{dU_y}{dt} = \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x\frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y\frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z\frac{\partial U_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{dU_z}{dt} = \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x\frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y\frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z\frac{\partial U_z}{\partial z}$$

Dla prędkości opisanej wzorami $U_x = ax$, $U_y = ay$, $U_z = -2az$ otrzymujemy:

$$a_x = \frac{\partial(ax)}{\partial t} + U_x\frac{\partial(ax)}{\partial x} + U_y\frac{\partial(ax)}{\partial y} + U_z\frac{\partial(ax)}{\partial z} = a^2x$$

$$a_y = \frac{\partial(ay)}{\partial t} + U_x\frac{\partial(ay)}{\partial x} + U_y\frac{\partial(ay)}{\partial y} + U_z\frac{\partial(ay)}{\partial z} = a^2y$$

$$a_z = \frac{\partial(-2az)}{\partial t} + U_x\frac{\partial(-2az)}{\partial x} + U_y\frac{\partial(-2az)}{\partial y} + U_z\frac{\partial(-2az)}{\partial z} = 4a^2z$$

Przyspieszenie wynosi $\vec{a} = \left[a_x, a_y, a_z\right] = \left[a^2x, a^2y, 4a^2z\right]$.

Linie prądu

Linia prądu - linia, do której w każdym punkcie w dowolnej chwili czasu t styczne są wektory prędkości.
Równanie linii prądu ma postać:

$$\boxed{\vec{U} \times \partial\vec{r} = \vec{0}}$$

Korzystając z tej zależności otrzymujemy:

$$\vec{U} \times \partial\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \end{vmatrix} = \left(U_y\partial z - U_z\partial y\right)\vec{i} + \left(U_z\partial x - U_x\partial z\right)\vec{j} + \left(U_x\partial y - U_y\partial x\right)\vec{k} = \vec{0}$$

Aby iloczyn wektorowy był równy zeru składowe wektora muszą być równe zeru.
Zatem:

$$\begin{cases} U_y\partial z - U_z\partial y = 0 \\ U_z\partial x - U_x\partial z = 0 \\ U_x\partial y - U_y\partial x = 0 \end{cases}$$

gdzie równanie $\frac{\partial z}{U_z} = \frac{\partial y}{U_y}$ przedstawia rzut linii prądu na płaszczyznę OYZ, równanie $\frac{\partial z}{U_z} = \frac{\partial x}{U_x}$ przedstawia rzut linii prądu na płaszczyznę OXZ, równanie $\frac{\partial y}{U_y} = \frac{\partial x}{U_x}$ przedstawia rzut linii prądu na płaszczyznę OXY.

Układ ten można przedstawić w postaci: $\boxed{\frac{\partial x}{U_x} = \frac{\partial y}{U_y} = \frac{\partial z}{U_z}}$

Zatem:
Wyznaczenie rzutu linii prądu na płaszczyznę OYZ:

$$\frac{\partial z}{U_z} = \frac{\partial y}{U_y}$$

$$\frac{\partial z}{-2az} = \frac{\partial y}{ay}$$

$$\int \frac{dz}{-2z} = \int \frac{dy}{y}$$

$$-\tfrac{1}{2}\, ln|z| = ln|y| - ln|C_1|$$

$$ln\left|yz^{1/2}\right| = ln|C_1|$$

$yz^{1/2} = C_1$ równanie hiperboli

Wyznaczenie rzutu linii prądu na płaszczyznę OXZ:

Rozwiązanie równania $\frac{\partial z}{U_z} = \frac{\partial x}{U_x}$ prowadzi do równania $xz^{1/2} = C_2$ przedstawiającego hiperbolę.

Wyznaczenie rzutu linii prądu na płaszczyznę OXY:

Rozwiązanie równania $\frac{\partial y}{U_y} = \frac{\partial x}{U_x}$ prowadzi do równania $y = C_3x$ przedstawiającego prostą.

Powierzchnia prądu

Powierzchnia prądu - powierzchnia utworzona z linii prądu przecinających dowolną linię niebędącą linią prądu.

Załóżmy, że naszą linią będzie okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$, a punkt $A(x_0, y_0, z_0)$ należy do okręgu.
Zatem równanie $x_0^2 + y_0^2 = r_0^2$ jest równaniem okręgu umieszczonym na wysokości z_0.

Zatem

$$x\sqrt{z} = x_0\sqrt{z_0} \text{, po przekształceniu } x_0 = x\sqrt{\frac{z}{z_0}}$$

$$y\sqrt{z} = y_0\sqrt{z_0} \text{, po przekształceniu } y_0 = y\sqrt{\frac{z}{z_0}}$$

Po podstawieniu do równania okręgu otrzymujemy:

$$\left(x\sqrt{\frac{z}{z_0}}\right)^2 + \left(y\sqrt{\frac{z}{z_0}}\right)^2 = r_0^2$$

$$z\left(x^2 + y^2\right) = r_0^2 z_0 = C = \Psi$$

Zatem równanie powierzchni ma postać:

$$\Psi = z\left(x^2 + y^2\right)$$

Jest to równanie hiperboloidy obrotowej.

Tor elementu płynu

Tor elementu płynu jest to linia, wzdłuż której przemieszcza się element płynu traktowany jak punkt materialny.
Równanie toru elementu płynu:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = U_x \qquad \frac{dy}{dt} = U_y \qquad \frac{dz}{dt} = U_z}$$

Równanie toru elementu płynu można ogólnie zapisać w postaci:

$$\boxed{\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} = \frac{dz}{U_z}}$$

Mimo zewnętrznego podobieństwa do równania linii prądu, różni się od niego zasadniczo. W równaniu linii prądu czas jest stały, natomiast w równaniu toru elementu płynu czas jest zmienną.

Przyjmujemy warunek początkowy: $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$

$$\frac{dx}{dt} = u_x = ax$$

$$\frac{dx}{x} = adt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int a dt$$

$$ln|x| = at + C$$

$$x = Ce^{at}$$

Wstawiając warunek początkowy $x(t_0) = x_0$, otrzymujemy $x = x_0 e^{a(t-t_0)}$

Analogicznie dla warunku $\frac{dy}{dt} = U_y$ otrzymujemy $y = y_0 e^{a(t-t_0)}$, a dla warunku $\frac{dz}{dt} = U_z$ otrzymujemy równanie $z = z_0 e^{-2a(t-t_0)}$.

Równania toru elementu płynu w postaci parametrycznej wyrażone są zatem równaniami:

$$\begin{cases} x = x_0 e^{a(t-t_0)} \\ y = y_0 e^{a(t-t_0)} \\ z = z_0 e^{-2a(t-t_0)} \end{cases}$$

Uniezależniając równania od czasu otrzymujemy

$$\frac{x}{y} = \frac{x_0 e^{a(t-t_0)}}{y_0 e^{a(t-t_0)}} = \frac{x_0}{y_0}, \qquad \text{po przekształceniu} \qquad y = x\frac{y_0}{x_0} \qquad \text{oraz}$$

$$z = z_0\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-2}, \qquad \text{po przekształceniu} \qquad zx^2 = z_0 x_0^2 \qquad \text{oraz}$$

$$z = z_0\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-2}, \qquad \text{po przekształceniu} \qquad zy^2 = z_0 y_0^2 \ .$$

<u>Ponieważ ruch jest stacjonarny (niezależny od czasu) tory elementów płynu pokrywają się z liniami prądu.</u>