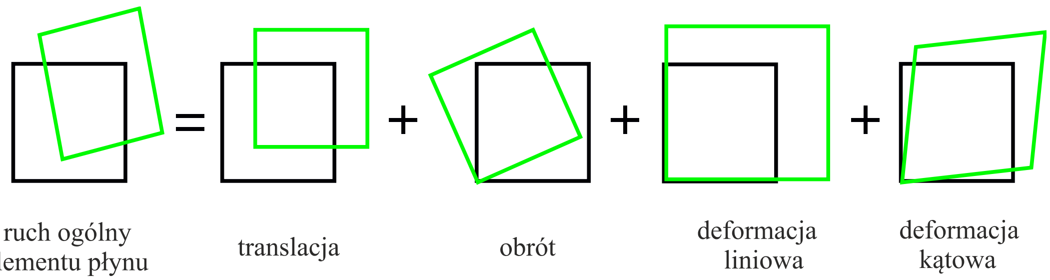
ĆWICZENIE 4
RUCH PŁYNU

RUCH OGÓLNY ELEMENTU PŁYNU

Ruch ogólny elementu płynu można traktować jako superpozycję przemieszczenia liniowego (translacji), obrotu względem chwilowego bieguna oraz odkształcenia (deformacji), które z kolei można podzielić na liniowe (objętościowe) i kątowe (postaciowe).



Prędkość dowolnego punktu elementu płynu składa się z:

- prędkości postępowej punktu obranego za biegun $\vec{U}_O$,
- prędkości obrotowej wokół osi przechodzącej przez biegun $\vec{\omega}_0 \times \partial\vec{r}$ (wektor tej prędkości wyznacza oś obrotu),
- prędkości deformacji elementu płynu $D_O \cdot \partial\vec{r}$.

$$\boxed{\vec{U}_A = \vec{U}_O + \vec{\omega}_0 \times \partial\vec{r} + D_O \cdot \partial\vec{r}}$$

Tensory: nierównomierności pola prędkości, spinu, prędkości deformacji

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial\vec{r}} = \Omega + D$$

gdzie: $\frac{\partial\vec{U}}{\partial\vec{r}}$ jest tensorem nierównomierności pola prędkości, Ω jest tensorem spinu, D jest tensorem prędkości deformacji.

Tensor nierównomierności pola prędkości

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial\vec{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{\partial U_x}{\partial y} & \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} & \frac{\partial U_y}{\partial y} & \frac{\partial U_y}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z}{\partial x} & \frac{\partial U_z}{\partial y} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

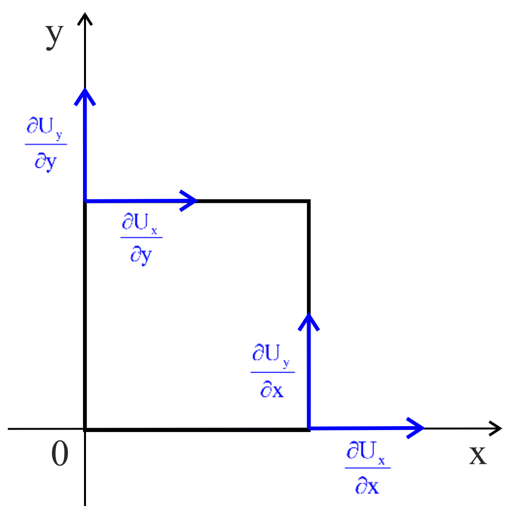
Tensor spinu

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}} - \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}}\right)^{T}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Tensor prędkości deformacji

$$D = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}} + \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}}\right)^{T}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial U_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Składowe wektora prędkości odkształcenia dla elementu płynu w ruchu płaskim

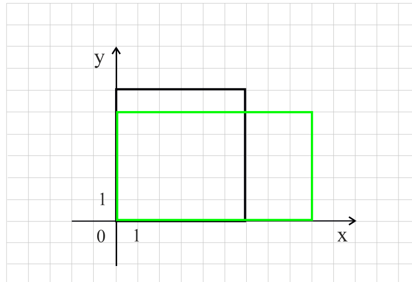


gdzie:

$\frac{\partial U_x}{\partial x}$ $\frac{\partial U_y}{\partial y}$ prędkości odkształcenia liniowego

$\frac{\partial U_x}{\partial y}$ $\frac{\partial U_y}{\partial x}$ prędkości odkształcenia kątowego

Przykład 1
Dla odkształconego elementu płynu przedstawionego na rysunku wyznaczyć tensor nierównomierności pola prędkości, tensor spinu oraz tensor prędkości deformacji.

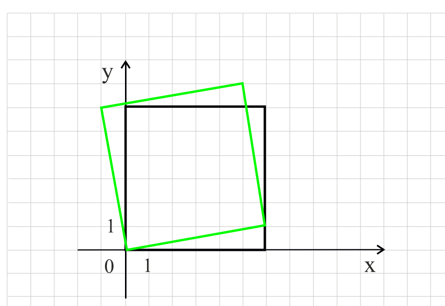


$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{\partial U_x}{\partial y} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} & \frac{\partial U_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(0-0) \\ \frac{1}{2}(0-0) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial U_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2}(0+0) \\ \frac{1}{2}(0+0) & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Przykład 2
Dla odkształconego elementu płynu przedstawionego na rysunku wyznaczyć tensor nierównomierności pola prędkości, tensor spinu oraz tensor prędkości deformacji.



$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{\partial U_x}{\partial y} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} & \frac{\partial U_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(-1-1) \\ \frac{1}{2}(1+1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial U_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(-1+1) \\ \frac{1}{2}(1-1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład 3

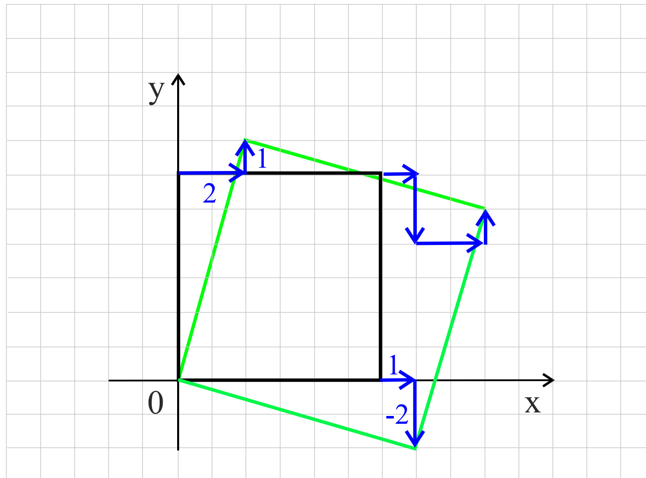
Rozłożyć dany tensor nierównomierności pola prędkości na tensor spinu i tensor prędkości deformacji oraz narysować odkształcony element płynu.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{\partial U_x}{\partial y} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} & \frac{\partial U_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \Omega + D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial U_y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(2+2) \\ \frac{1}{2}(-2-2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial U_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(2-2) \\ \frac{1}{2}(-2+2) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



y
1
2
0
1
-2
x