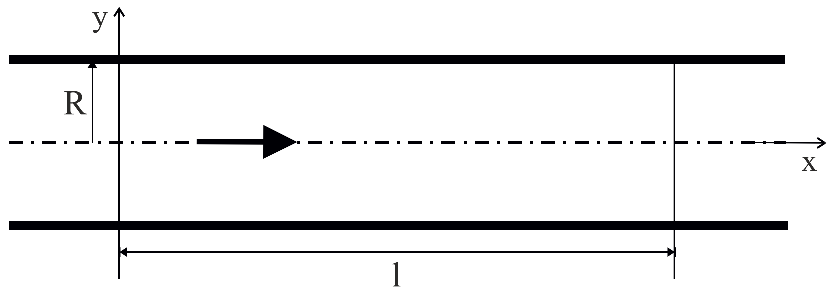
ĆWICZENIE 5

PRZEPŁYW PRZEZ RUROCIĄG



Prędkość

Dla przepływu ustalonego przez rurociąg o przekroju kołowym rozwiązano równania zachowania i wyznaczono pole prędkości $\vec{U} = \left[U_x, U_y, U_z\right]$:

$$U_x = 0$$

$$U_y = 0$$

$$U_z = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(x_0^2 + y_0^2 - x^2 - y^2\right) = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(R^2 - r^2\right)$$

gdzie: Δp - zmiana ciśnienia na odcinku l rurociągu, μ- dynamiczny współczynnik lepkości,
l - długość odcinka rurociągu, R - promień rurociągu

Źródłowość (rozbieżność) pola prędkości

$$\mathrm{div}\vec{U} = \nabla \circ \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Pole jest bezźródłowe. Oznacza to, że prędkość zmiany objętości płynu odniesiona do tej objętości jest równa zeru (nie zmienia się objętość płynu).

Wirowość pola

$$\vec{\Omega} = \left[\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\right] = \nabla \times \vec{U} = \mathrm{rot}\vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\Omega_x = \mathrm{rot}U_x = \frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{2\mu l} y$$

$$\Omega_y = \mathrm{rot}U_y = \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} = \frac{\Delta p}{2\mu l} x$$

$$\Omega_z = \mathrm{rot}U_x = \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} = 0$$

Zatem $\vec{\Omega} = \left[\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\right] = \left[-\frac{\Delta p}{2\mu l} y, \frac{\Delta p}{2\mu l} x, 0\right]$. Wartość rotacji pola prędkości mówi o tym, czy w płynie istnieją jakieś wiry. Ponieważ $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$ przepływ jest wirowy.

Linie wirowe

Linia wirowa jest to linia, do której w każdym punkcie styczny jest wektor wirowości. Linia wirowa jest linią pola wektorowego rotacji.

$$\boxed{\vec{\Omega} \times \partial \vec{l} = \vec{0}}$$

$\vec{\Omega} = \left[\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\right]$ - wektor wirowości

$\partial \vec{l} = \vec{\Omega} = \left[\partial x, \partial y, \partial z\right]$ - element linii wirowej

$$\frac{\partial x}{\Omega_x} = \frac{\partial y}{\Omega_y} = \frac{\partial z}{\Omega_z}$$

Zatem
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\Omega_y}{\Omega_x} = -\frac{x}{y}$$

$$y \partial y = -x \partial x$$

$$\int y dy = -\int x dx$$

$$\tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{2} x^2 = C$$

Gdy linia wirowa przechodzi przez punkt (x_0, y_0) to równanie linii wirowej przyjmuje postać $x^2 + y^2 = r^2$. Linie wirowe są więc koncentrycznymi okręgami o środkach leżących w osi rurociągu.

$$\left|\vec{\Omega}\right| = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}$$

$$\left|\vec{\Omega}\right| = \frac{\Delta p}{2\mu l} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\Delta p}{2\mu l} r$$

Wirowość jest zerowa tylko w osi rurociągu. Im większy jest bieżący promień r, tym większe jest zawirowanie.

Przyspieszenie elementu płynu

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U} \operatorname{grad}\right) \vec{U}}$$

Składowe wektora przyspieszenia mają postać:

$$a_x = \frac{dU_x}{dt} = \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} = 0$$

$$a_y = \frac{dU_y}{dt} = \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} = 0$$

$$a_z = \frac{dU_z}{dt} = \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

Zatem $\vec{a} = \vec{0}$.

Tensory: nierównomierności pola prędkości, spinu, prędkości deformacji

Tensor nierównomierności pola prędkości

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{\partial U_x}{\partial y} & \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} & \frac{\partial U_y}{\partial y} & \frac{\partial U_y}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z}{\partial x} & \frac{\partial U_z}{\partial y} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\Delta p}{2\mu l}x & \frac{-\Delta p}{2\mu l}y & 0 \end{bmatrix}$$

Tensor spinu

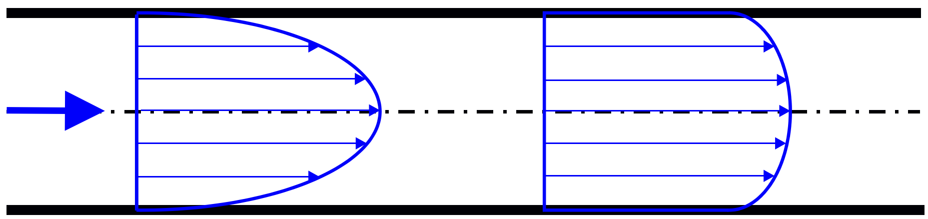
$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}} - \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}}\right)^T\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-\Delta p}{2\mu l}x \\ 0 & 0 & \frac{-\Delta p}{2\mu l}y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensor prędkości deformacji

$$D = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}} + \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}}\right)^T\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial U_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-\Delta p}{4\mu l}x \\ 0 & 0 & \frac{-\Delta p}{4\mu l}y \\ \frac{-\Delta p}{4\mu l}x & \frac{-\Delta p}{4\mu l}y & 0 \end{bmatrix}$$

Analizując składowe tensora prędkości deformacji widać, że nie ma deformacji liniowej, a zatem i objętościowej (składniki na głównej przekątnej są równe zeru). Istnieje deformacja kątowa (składniki poza główną przekątną są różne od zera). Istnieje obrót ($\mathrm{rot}\vec{U} \neq 0$).

Charakter przepływu a rozkład prędkości



profil prędkości
przepływ laminarny

profil prędkości
przepływ turbulentny

Przepływ laminarny (Re<2300)

Rozkład prędkości dla przepływu laminarnego $U_z = U_n = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(R^2 - r^2\right)$

$$\bar{U} = \frac{1}{S}\int U_n dS = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(R^2 - r^2\right) r dr = \frac{1}{\pi R^2}\frac{\Delta p}{4\mu l}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(R^2 r - r^3\right) dr = \frac{1}{\pi R^2}\frac{\Delta p}{4\mu l} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\Delta p}{8\mu l} R^2$$

<u>Wniosek: dla przepływu laminarnego (Re<2300)</u>:

Rozkład prędkości w rurociągu $U = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(R^2 - r^2\right)$

Prędkość maksymalna (dla r=0, tj. w osi rurociągu) $U_{max} = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2$

Średnia prędkość w przepływie laminarnym $\bar{U} = \frac{\Delta p}{8\mu l} R^2$

Zależność między prędkością średnią a prędkością maksymalną $\bar{U} = \frac{1}{2} U_{max}$

Przepływ turbulentny (Re>2300)

Rozkład prędkości w rurociągu dla przepływu turbulentnego (Re>2300) ustalony eksperymentalnie:

$$U = U_{max} \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(1 - \frac{R}{r}\right)^n$$

$n = \frac{1}{6}$ dla $Re = 4 \cdot 10^3$

$n = \frac{1}{7}$ dla $Re = 10^5$

$n = \frac{1}{10}$ dla $Re = 3 \cdot 10^6$

$$\bar{U}=\frac{1}{S}\int U_n dS=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R U_{max}\left(1-\frac{R}{r}\right)^n rdr=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\left(1-\frac{R}{r}\right)^n rdr=\left|\begin{array}{c}1-\frac{R}{r}=t\\ r=R\left(1-t\right)\\ dr=-Rdt\\ r\in\left\langle 0,R\right\rangle,\ t\in\left\langle 1,0\right\rangle\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi R^2}2\pi U_{max}\int_1^0 t^n R\left(1-t\right)\left(-R\right)dt=-2U_{max}\left[\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right]=2U_{max}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]$$

<u>Wniosek: dla przepływu turbulentnego (Re>2300)</u>:

Rozkład prędkości w rurociągu $U=U_{max}\frac{\Delta p}{4\mu l}\left(1-\frac{R}{r}\right)^n \wedge n=n\left(Re\right)$

Średnia prędkość w przepływie turbulentnym $\bar{U}=2U_{max}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]$

Zależność między prędkością średnią a prędkością maksymalną $\bar{U}=2U_{max}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]$