ĆWICZENIE 6
STRUMIEŃ MASY

RÓWNANIE ZACHOWANIA MASY

Równanie zachowania masy mówi, że jeżeli pewna objętość płynna $\tau(S)$ utworzona jest z ciągle tych samych elementów płynu, to masa M zawarta w tej objętości nie ulega zmianie.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{\tau(S)} \rho d\tau = 0$$

$$\int\limits_{\tau(S)} \frac{d\rho}{dt} d\tau + \int\limits_{S(\tau)} \rho \frac{d}{dt} d\tau = 0$$

$$\int\limits_{\tau(S)} \frac{d\rho}{dt} d\tau + \int\limits_{S(\tau)} \rho \operatorname{div}\vec{U} d\tau = 0$$

$$\int\limits_{\tau(S)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\vec{U} \right) d\tau = 0 \qquad \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\vec{U} = 0}$$

postać różniczkowa równania zachowania masy

$$\int\limits_{\tau(S)} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{U} \operatorname{grad}\rho + \rho \operatorname{div}\vec{U} \right) d\tau = 0$$

$$\int\limits_{\tau(S)} \frac{\partial\rho}{\partial t} d\tau + \int\limits_{\tau(S)} \operatorname{div}\left(\rho\vec{U}\right) d\tau = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\vec{U}\right) = 0}$$

postać różniczkowa równania zachowania masy

Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego $\int\limits_{\tau(S)} \operatorname{div}\left(\rho\vec{U}\right) d\tau = \int\limits_{S(\tau)} \rho\vec{U} \circ \vec{n} dS$ otrzymamy:

$$\boxed{\int\limits_{\tau(S)} \frac{\partial\rho}{\partial t} d\tau + \int\limits_{S(\tau)} \rho\vec{U} \circ \vec{n} dS = 0}$$

postać całkowa
równania zachowania masy

Dla przepływu płynu nieściśliwego ρ=const z równania $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\vec{U} = 0$ wynika, że $\operatorname{div}\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0$.

<u>Wniosek</u>: Przyczyną zmiany objętości płynu jest zmiana jego gęstości.
<u>Wniosek</u>: Strumień płynu przepływającego w sposób ustalony przez przewód jest stały w każdym dowolnym przekroju przewodu (prostopadłym do kierunku ruchu płynu) $\dot{m} = \text{const}$.
<u>Wniosek</u>: W przypadku przepływu płynu nieściśliwego ρ=const strumień płynu także jest stały.

Miarą przepływu jest **strumień płynu**: strumień masy lub objętości.

Strumień masy $\boxed{\dot{m} = \bar{\rho}\bar{U}_n\bar{S}}$ (masowe natężenie przepływu) jest to masa płynu przepływająca przez określoną powierzchnię w jednostce czasu. W jednostkach SI wyrażany w kg/s.

Strumień objętości $\boxed{\dot{Q} = \bar{U}_n\bar{S}}$ (objętościowe natężenie przepływu) jest to objętość płynu przepływająca przez określoną powierzchnię w jednostce czasu. W jednostkach SI wyrażany w m^3/s.

Strumień masy (masowe natężenie przepływu) definiuje się jako iloczyn średniej gęstości, prędkości w kierunku normalnym do kierunku przepływu oraz powierzchni:

$$\dot{m} = \overline{\rho}\overline{U}_n\overline{S}$$

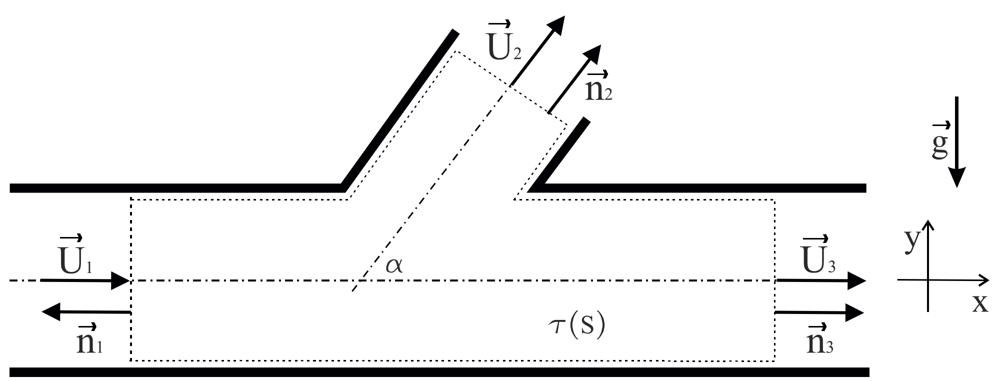
Wartości średnie definiuje się następująco:

$$\overline{U}_i = \frac{\int\limits_{S_i(\tau)} U_{in} dS}{\int\limits_{S_i(\tau)} dS} = \frac{\int\limits_{S_i(\tau)} U_{in} dS}{S}$$

$$\overline{\rho} = \frac{\int\limits_{S_i(\tau)} \rho U_{in} dS}{\int\limits_{S_i(\tau)} U_{in} dS} = \frac{\int\limits_{S_i(\tau)} \rho U_{in} dS}{\overline{U}_{in} S}$$

Przykład

Określić strumień masy dla przepływu przez rurociąg.



Założenia:

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ stacjonarność przepływu

$\rho = \text{const}$ nieściśliwość płynu

Analiza równania zachowania masy:

$$\boxed{\int\limits_{\tau(S)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int\limits_{S(\tau)} \rho \vec{U} \circ \vec{n} dS = 0}$$

$$\int\limits_{\tau(S)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = 0$$ przepływ jest stacjonarny

$$\int\limits_{S(\tau)} \rho \vec{U} \circ \vec{n} dS = \int\limits_{S_0(\tau)} \rho \vec{U}_0 \circ \vec{n}_0 dS + \int\limits_{S_1(\tau)} \rho \vec{U}_1 \circ \vec{n}_1 dS + \int\limits_{S_2(\tau)} \rho \vec{U}_2 \circ \vec{n}_2 dS + \int\limits_{S_3(\tau)} \rho \vec{U}_3 \circ \vec{n}_3 dS$$

$$\int\limits_{S_0(\tau)} \rho \vec{U}_0 \circ \vec{n}_0 dS = 0 \qquad \vec{U}_0 \circ \vec{n}_0 = \left|\vec{U}_0\right| \cdot \left|\vec{n}_0\right| cos\left(\vec{U}_0, \vec{n}_0\right) = \left|\vec{U}_0\right| \cdot 1 \cdot cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\int\limits_{S_1(\tau)} \rho \vec{U}_1 \circ \vec{n}_1 dS = -\int\limits_{S_1(\tau)} \rho U_{1n} dS = -\dot{m}_1$$

znak '-' wynika z przeciwnych znaków wektorów $\vec{U}_1$ i $\vec{n}_1$

$$\int\limits_{S_2(\tau)} \rho \vec{U}_2 \circ \vec{n}_2 dS = \int\limits_{S_2(\tau)} \rho U_{2n} dS = \dot{m}_2$$

$$\int\limits_{S_3(\tau)} \rho \vec{U}_3 \circ \vec{n}_3 dS = \int\limits_{S_3(\tau)} \rho U_{3n} dS = \dot{m}_3$$

znak '+' wynika ze zgodnych znaków wektorów $\vec{U}_2$ i $\vec{n}_2$ oraz $\vec{U}_3$ i $\vec{n}_3$

$$\int\limits_{S(\tau)} \rho \vec{U} \circ \vec{n} dS = 0 - \int\limits_{S_1(\tau)} \rho U_{1n} dS + \int\limits_{S_2(\tau)} \rho U_{2n} dS + \int\limits_{S_3(\tau)} \rho U_{3n} dS = -\dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$

$$-\dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3 = 0$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$ tyle samo masy wpływa przekrojem 1, ile wypływa przekrojami 2 i 3

Strumienie masy:

$$\dot{m}_1 = \bar{\rho}\bar{U}_{1n}\bar{S}_1 = \rho U_1 S_1 \qquad \dot{m}_2 = \bar{\rho}\bar{U}_{2n}\bar{S}_2 = \rho U_2 S_2 \qquad \dot{m}_3 = \bar{\rho}\bar{U}_{3n}\bar{S}_3 = \rho U_3 S_3$$

$$S_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} \qquad S_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} \qquad S_3 = \frac{\pi D_3^2}{4}$$

Przekroje wyznaczono dla rurociągu o przekroju kołowym