

ĆWICZENIE 7

SIŁY ODDZIAŁYWANIA W PRZEPŁYWIE PRZESZ RUCIĄG

RÓWNANIE ZACHOWANIA PĘDU: zmiana w czasie pędu w dowolnej objętości płynnej $\tau(S)$ jest równa sumie sił masowych działających na tę objętość oraz sił powierzchniowych działających na powierzchnię płynną S .

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau(S)} \rho \vec{U} d\tau = F_{\tau} + F_S$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau(S)} \rho \vec{U} d\tau = \int_{\tau(S)} \rho \vec{f} d\tau + \int_{S(\tau)} \vec{p}_n dS$$

postać całkowa
równania zachowania pędu

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau(S)} \rho \vec{U} d\tau \quad \text{zmiana pędu objętości płynnej } \tau(S)$$

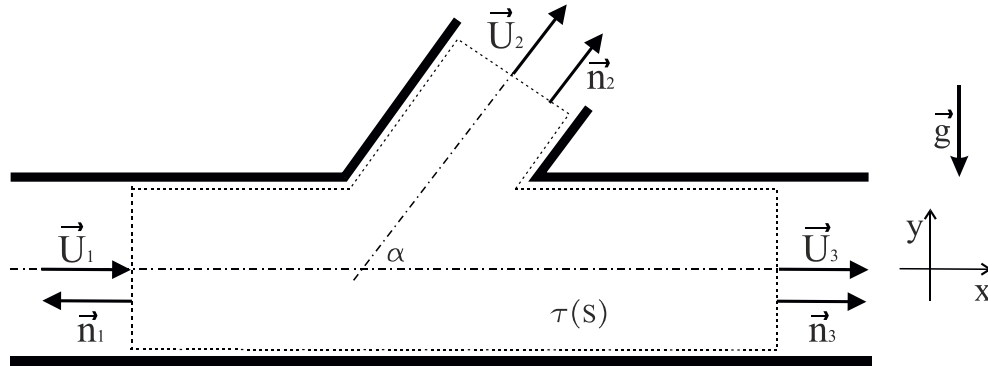
$$F_{\tau} = \int_{\tau(S)} \rho \vec{f} d\tau \quad \begin{array}{l} \text{siły masowe (objętościowe) działające na objętość płynną } \tau(S) \\ \text{np. siła grawitacji, siły odśrodkowe, siły elektromagnetyczne} \end{array}$$

$$F_S = \int_{S(\tau)} \vec{p}_n dS \quad \begin{array}{l} \text{siły powierzchniowe działające na powierzchnię płynną } S(\tau) \\ \text{np. siły ciśnienia, tarcie wewnętrzne w płynie, tarcie płynu o ściany sztywne, napór} \\ \text{hydrostatyczny, reakcje hydro- i aerodynamiczne} \end{array}$$

$$\int_{\tau(S)} \frac{\partial(\rho \vec{U})}{\partial t} d\tau + \int_{S(\tau)} \rho \vec{U} \vec{U} \cdot \vec{n} dS = \int_{\tau(S)} \rho \vec{f} d\tau + \int_{S(\tau)} \vec{p}_n dS$$

Przykład

Określić siły oddziaływania między ściankami rurociągu a płynem.



Założenia:

- $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ stacjonarność przepływu
- $\rho = \text{const}$ nieściśliwość płynu
- $\vec{f} = \vec{g}$ jedyna siła masowa to siła grawitacji

Analiza równania zachowania pędu:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau(S)} \rho \vec{U} d\tau = \int_{\tau(S)} \rho \vec{f} d\tau + \int_{S(\tau)} \vec{p}_n dS$$

$$\int_{\tau(S)} \frac{\partial(\rho \vec{U})}{\partial t} d\tau + \int_{S(\tau)} \rho \vec{U} \vec{U} \cdot \vec{n} dS = \int_{\tau(S)} \rho \vec{f} d\tau + \int_{S(\tau)} \vec{p}_n dS$$

$$\int_{\tau(S)} \frac{\partial(\rho \vec{U})}{\partial t} d\tau = 0 \quad \text{przepływ jest stacjonarny}$$

$$\int_{S(\tau)} \rho \vec{U} \vec{U} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_0(\tau)} \rho \vec{U}_0 \vec{U}_0 \cdot \vec{n}_0 dS + \int_{S_1(\tau)} \rho \vec{U}_1 \vec{U}_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2(\tau)} \rho \vec{U}_2 \vec{U}_2 \cdot \vec{n}_2 dS + \int_{S_3(\tau)} \rho \vec{U}_3 \vec{U}_3 \cdot \vec{n}_3 dS$$

$$\int_{S_0(\tau)} \rho \vec{U}_0 \vec{U}_0 \cdot \vec{n}_0 dS = \int_{S_0(\tau)} \rho \vec{U}_0 U_{0n} dS = 0 \quad \text{ponieważ } U_{0n} = 0 \quad \vec{U}_0 \perp \vec{n}_0$$

$$\int_{S_1(\tau)} \rho \vec{U}_1 \vec{U}_1 \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{S_1(\tau)} \rho \vec{U}_1 U_{1n} dS = - \vec{\vec{U}}_1 \int_{S_1(\tau)} \rho U_{1n} dS = - \vec{\vec{U}}_1 \dot{m}_1$$

$$\int_{S_2(\tau)} \rho \vec{U}_2 \vec{U}_2 \cdot \vec{n}_2 dS = \int_{S_2(\tau)} \rho \vec{U}_2 U_{2n} dS = \vec{\vec{U}}_2 \int_{S_2(\tau)} \rho U_{2n} dS = \vec{\vec{U}}_2 \dot{m}_2$$

$$\int_{S_3(\tau)} \rho \vec{U}_3 \vec{U}_3 \cdot \vec{n}_3 dS = \int_{S_3(\tau)} \rho \vec{U}_3 U_{3n} dS = \vec{\vec{U}}_3 \int_{S_3(\tau)} \rho U_{3n} dS = \vec{\vec{U}}_3 \dot{m}_3$$

$$\int_{\tau(S)} \rho \vec{f} d\tau = \int_{\tau(S)} \rho \vec{g} d\tau = \vec{g} \int_{\tau(S)} \rho d\tau = M \vec{g}$$

gdzie: M - masa płynu zawarta w objętości $\tau(S)$

$$\begin{aligned} \int_{S(\tau)} \vec{p}_n dS &= \int_{S_0(\tau)} \vec{p}_{n0} dS + \int_{S_1(\tau)} \vec{p}_{n1} dS + \int_{S_2(\tau)} \vec{p}_{n2} dS + \int_{S_3(\tau)} \vec{p}_{n3} dS \\ \int_{S_0(\tau)} \vec{p}_{n0} dS &= \int_{S_0(\tau)} (\vec{p}_{nn0} + \vec{p}_{nr0}) dS = \vec{R}_0 \end{aligned}$$

$\vec{R}_0$ siła oddziaływania rurociągu na płyn

$\vec{R} = -\vec{R}_0$ siła oddziaływania płynu na rurociąg

$$\begin{aligned} \int_{S_1(\tau)} \vec{p}_{n1} dS &= \int_{S_1(\tau)} (\vec{p}_{nn1} + \vec{p}_{nr1}) dS = \int_{S_1(\tau)} \vec{p}_{nn1} dS + \int_{S_1(\tau)} \vec{p}_{nr1} dS \approx \int_{S_1(\tau)} \vec{p}_{nn1} dS + 0 = \\ &= - \int_{S_1(\tau)} p_{nn1} \vec{n}_1 dS = -\bar{p}_1 \vec{n}_1 S_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_2(\tau)} \vec{p}_{n2} dS &= \int_{S_2(\tau)} (\vec{p}_{nn2} + \vec{p}_{nr2}) dS = \int_{S_2(\tau)} \vec{p}_{nn2} dS + \int_{S_2(\tau)} \vec{p}_{nr2} dS \approx \int_{S_2(\tau)} \vec{p}_{nn2} dS + 0 = \\ &= - \int_{S_2(\tau)} p_{nn2} \vec{n}_2 dS = -\bar{p}_2 \vec{n}_2 S_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_3(\tau)} \vec{p}_{n3} dS &= \int_{S_3(\tau)} (\vec{p}_{nn3} + \vec{p}_{nr3}) dS = \int_{S_3(\tau)} \vec{p}_{nn3} dS + \int_{S_3(\tau)} \vec{p}_{nr3} dS \approx \int_{S_3(\tau)} \vec{p}_{nn3} dS + 0 = \\ &= - \int_{S_3(\tau)} p_{nn3} \vec{n}_3 dS = -\bar{p}_3 \vec{n}_3 S_3 \end{aligned}$$

$$\text{gdzie: } \int_{S_1(\tau)} \vec{p}_{nr1} dS \approx 0 \quad \int_{S_2(\tau)} \vec{p}_{nr2} dS \approx 0 \quad \int_{S_3(\tau)} \vec{p}_{nr3} dS \approx 0$$

Wartości średnie określić można jako:

$$\vec{\bar{U}}_i = \frac{\int_{S_i(\tau)} \rho \vec{U}_i U_{in} dS}{\int_{S_i(\tau)} \rho U_{in} dS} = \frac{\int_{S_i(\tau)} \rho \vec{U}_i U_{in} dS}{\dot{m}_i}$$

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{S_i(\tau)} \rho U_{in} dS}{\int_{S_i(\tau)} U_{in} dS} = \frac{\int_{S_i(\tau)} \rho U_{in} dS}{\bar{U}_{in} S}$$

$$\bar{p}_i = \frac{\int_{S_i(\tau)} p_i dS}{\int_{S_i(\tau)} dS} = \frac{\int_{S_i(\tau)} p_i dS}{S}$$

Ostatecznie:

$$\int_{\tau(S)} \frac{\partial(\rho \vec{U})}{\partial t} d\tau + \int_{S(\tau)} \rho \vec{U} \vec{U} \circ \vec{n} dS = \int_{\tau(S)} \rho \vec{f} d\tau + \int_{S(\tau)} \vec{p}_n dS \quad \text{przybiera postać:}$$

$$-\dot{m}_1 \vec{U}_1 + \dot{m}_2 \vec{U}_2 + \dot{m}_3 \vec{U}_3 = M \vec{g} + \vec{R}_0 - \bar{p}_1 \vec{n}_1 S_1 - \bar{p}_2 \vec{n}_2 S_2 - \bar{p}_3 \vec{n}_3 S_3$$

Siła oddziaływania rurociągu na płyn:

$$\vec{R}_0 = -\dot{m}_1 \vec{U}_1 + \dot{m}_2 \vec{U}_2 + \dot{m}_3 \vec{U}_3 + M \vec{g} - \bar{p}_1 \vec{n}_1 S_1 - \bar{p}_2 \vec{n}_2 S_2 - \bar{p}_3 \vec{n}_3 S_3$$

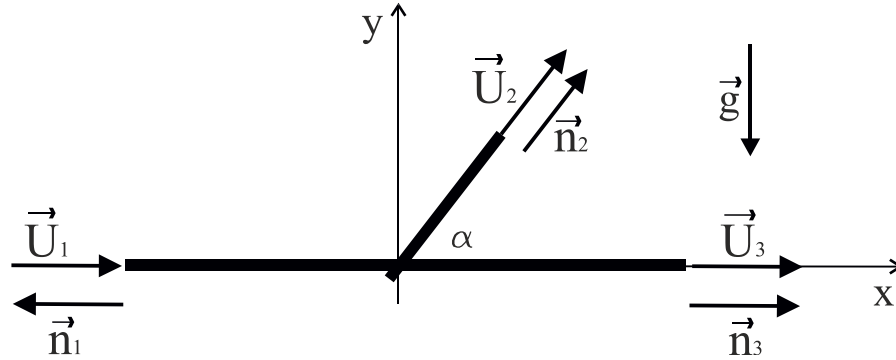
$$R_0 = \sqrt{R_{0x}^2 + R_{0y}^2 + R_{0z}^2}$$

Siła oddziaływania płynu na rurociąg:

$$\vec{R} = -\vec{R}_0$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Dla przepływu przez rurociąg jak na rysunku i przyjętego układu współrzędnych mamy:



$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

$$\vec{U}_1 = U_1 \vec{i} \quad \vec{U}_2 = U_2 \cos \alpha \vec{i} + U_2 \sin \alpha \vec{j} \quad \vec{U}_3 = U_3 \vec{i}$$

$$\vec{g} = -g \vec{j}$$

$$\vec{n}_1 = -\vec{i} \quad \vec{n}_2 = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} \quad \vec{n}_3 = \vec{i}$$

$$-\dot{m}_1 \vec{U}_1 + \dot{m}_2 \vec{U}_2 + \dot{m}_3 \vec{U}_3 = R_{0x} \vec{i} + R_{0y} \vec{j} + R_{0z} \vec{k} + M \vec{g} - \bar{p}_1 \vec{n}_1 S_1 - \bar{p}_2 \vec{n}_2 S_2 - \bar{p}_3 \vec{n}_3 S_3$$

$$-\dot{m}_1 U_1 \vec{i} + \dot{m}_2 (U_2 \cos \alpha \vec{i} + U_2 \sin \alpha \vec{j}) + \dot{m}_3 U_3 \vec{i} =$$

$$R_{0x} \vec{i} + R_{0y} \vec{j} + R_{0z} \vec{k} - M g \vec{j} + p_1 S_1 \vec{i} - p_2 S_2 (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) - p_3 S_3 \vec{i}$$

$$\begin{cases} R_{0x} = -\dot{m}_1 U_1 + \dot{m}_2 U_2 \cos \alpha + \dot{m}_3 U_3 - p_1 S_1 + p_2 S_2 \cos \alpha + p_3 S_3 \\ R_{0y} = \dot{m}_2 U_2 \sin \alpha + Mg + p_2 S_2 \sin \alpha \\ R_{0z} = 0 \end{cases} \quad \text{siła oddziaływania rurociągu na płyn}$$

$$R_0 = \sqrt{R_{0x}^2 + R_{0y}^2 + R_{0z}^2}$$

$$\begin{cases} R_x = -R_{0x} \\ R_y = -R_{0y} \\ R_z = -R_{0z} \end{cases} \quad \text{siła oddziaływania płynu na rurociąg}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$