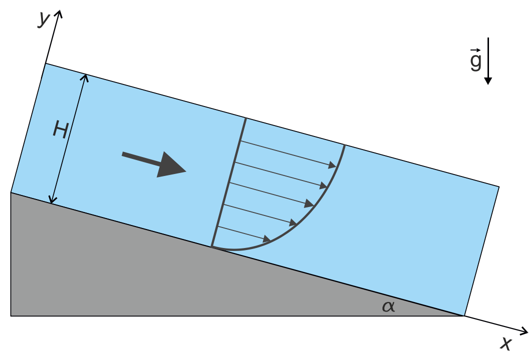
ĆWICZENIE 9
RÓWNANIE NAVIERA - STOKESA

Przykład 1
Warstwa cieczy o grubości H i szerokości B, spływa w polu sił grawitacyjnych wzdłuż powierzchni nachylonej do poziomu pod kątem α. Wyznaczyć rozkład prędkości oraz rozkład ciśnień wiedząc, że ciśnienie barometryczne wynosi p_{atm}, a współczynnik lepkości kinematycznej jest równy ν.



Układ równań dla tak określonego przepływu można opisać układem równań, który składa się z równania zachowania masy oraz równania Naviera – Stokesa.

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{U} = 0 \\ \rho\dfrac{d\vec{U}}{dt} = \rho f - \operatorname{grad}p + \mu\Delta\vec{U} \end{cases}$$

Równanie zachowania masy jest równaniem skalarnym, równanie Naviera – Stokesa równaniem wektorowym, które zapisać można w formie skalarnej.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_x}{\partial x} + \dfrac{\partial U_y}{\partial y} + \dfrac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial t} + U_x\dfrac{\partial U_x}{\partial x} + U_y\dfrac{\partial U_x}{\partial y} + U_z\dfrac{\partial U_x}{\partial z} = f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial U_x^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial U_x^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial U_x^2}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial t} + U_x\dfrac{\partial U_y}{\partial x} + U_y\dfrac{\partial U_y}{\partial y} + U_z\dfrac{\partial U_y}{\partial z} = f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial U_y^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial U_y^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial U_y^2}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\partial U_z}{\partial t} + U_x\dfrac{\partial U_z}{\partial x} + U_y\dfrac{\partial U_z}{\partial y} + U_z\dfrac{\partial U_z}{\partial z} = f_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\dfrac{\partial U_z^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial U_z^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial U_z^2}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

gdzie:

U_x, U_y, U_z	składowe wektora prędkości
p	ciśnienie
f_x, f_y, f_z	składowe wektora gęstości rozkładu sił masowych (np. grawitacja)
ν	kinematyczny współczynnik lepkości

Niewiadomymi w tym układzie 4 równań są składowe wektora prędkości oraz ciśnienie: U_x, U_y, U_z, p

Dla ruchu płaskiego jak na rysunku mamy:

$$U_x = U(y), \quad U_y = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p(y)}{\partial y}$$

$$f_x = g\,sin\,\alpha, \quad f_y = -g\,cos\,\alpha$$

Układ równań dla ruchu płaskiego:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_x}{\partial x} + \dfrac{\partial U_y}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \dfrac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \dfrac{\partial U_x}{\partial y} = f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial U_x^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial U_x^2}{\partial y^2}\right) \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \dfrac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \dfrac{\partial U_y}{\partial y} = f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial U_y^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial U_y^2}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$

Po wprowadzeniu danych otrzymujemy:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = g\,sin\,\alpha + \nu \dfrac{\partial U_x^2}{\partial y^2} \\ 0 = -g\,cos\,\alpha - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$$

Rozwiązanie równania: $0 = g\,sin\,\alpha + \nu \dfrac{\partial U_x^2}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial U_x^2}{\partial y^2} = -\frac{g\,sin\,\alpha}{\nu}$$

$$\int \frac{\partial U_x^2}{\partial y^2}dy = -\int \frac{g\,sin\,\alpha}{\nu}dy$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} = -\frac{g\,sin\,\alpha}{\nu}y + C_1$$

$$\int \frac{\partial U_x}{\partial y}dy = \int\left(-\frac{g\,sin\,\alpha}{\nu}y + C_1\right)dy$$

$$U_x = -\frac{g\,sin\,\alpha}{\nu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Warunki brzegowe: $U_x\left(y=0\right)=0$

$\frac{\partial U_x}{\partial y}\left(y=H\right)=0$ tzw. „znikanie” prędkości na powierzchni swobodnej cieczy

$$C_1=\frac{g\,sin\,\alpha}{\nu}H,\quad C_2=0$$

Rozkład prędkości:

$$U_x\left(y\right)=-\frac{g\,sin\,\alpha}{\nu}\frac{y^2}{2}+\frac{g\,sin\,\alpha}{\nu}Hy$$

Rozwiązanie równania: $0=-g\,cos\,\alpha-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\rho g\,cos\,\alpha$$

$$\int\frac{\partial p}{\partial y}dy=-\int\rho g\,cos\,\alpha dy$$

$$p=-\rho g\,cos\,\alpha y+C$$

Warunki brzegowe: $p\left(y=H\right)=p_{atm}$

$$C=p_{atm}+\rho g\,cos\,\alpha H$$

Ostatecznie rozkład ciśnienia opisany jest zależnością:

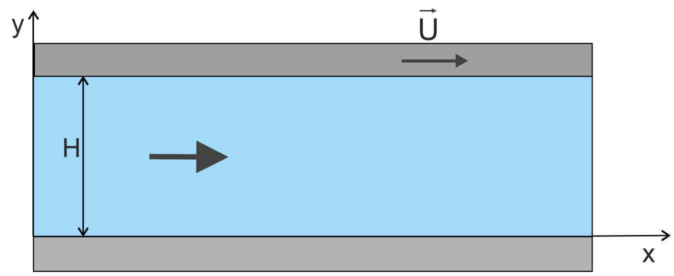
$$p=p_{atm}+\rho g\,cos\,\alpha\left(H-y\right)$$

Przykład 2

Pomiędzy dwiema poziomymi i równoległymi płytami o szerokości B, oddalonymi od siebie o wysokość H, przepływa ciecz pod działaniem stałego ciśnienia $\frac{dp}{dx}$. Górna płyta przemieszcza się względem dolnej ze stałą prędkością U. Zakładając wartość współczynnika lepkości dynamicznej μ wyznacz rozkład prędkości:

a) dla płaskiego przepływu Couette'a, w którym $U > 0$, a $\frac{dp}{dx} = 0$,

b) dla płaskiego przepływu Hagena – Poiseuille'a, gdzie $U = 0$, a $\frac{dp}{dx} < 0$.



Układ równań dla płaskiego przepływu określony jest układem równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial U_x^2}{\partial x^2} + \frac{\partial U_x^2}{\partial y^2}\right) \\ \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial U_y^2}{\partial x^2} + \frac{\partial U_y^2}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$

Oznaczenia dla ruchu jak na rysunku:

$U_x = U_x(y), \quad U_y = 0$

$\frac{\partial U_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U_y}{\partial t} = 0$ przepływ stacjonarny

$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ wynika z tego, że $p = p(x)$

$f_x = 0, \quad f_y = 0$ pominięcie sił masowych

Z układu równań otrzymujemy:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial U_x^2}{\partial y^2}$$

$$\nu \frac{\partial U_x^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\int \frac{\partial U_x^2}{\partial y^2} dy = \int \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} dy$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + C_1$$

$$\int \frac{\partial U_x}{\partial y} dy = \int \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + C_1 \right) dy$$

$$U_x(y) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Warunki brzegowe: $U_x(y = H) = U$

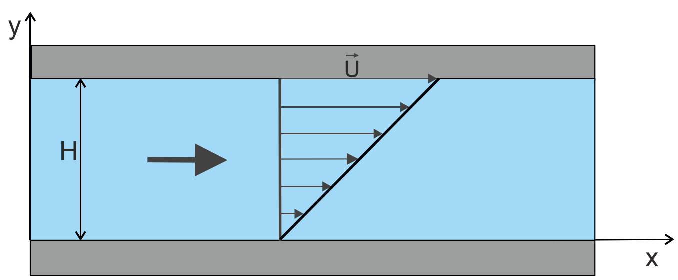
$U_x(y = 0) = 0$

prowadzą do wyznaczenia stałych całkowania: $C_1 = \frac{U}{H} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} H$, $C_2 = 0$

Ostatecznie rozkład prędkości

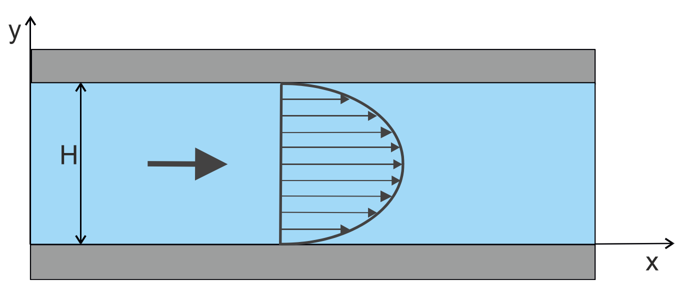
$$\boxed{U_x(y) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + \left(\frac{U}{H} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} H \right) y}$$

a) **Przepływ płaski Couette'a**, w którym $U > 0$, $\frac{dp}{dx} = 0$



$$U_x(y) = \frac{U}{H} y$$

b) **Przepływ płaski Hagena – Poiseuille'a**, gdzie $U = 0$, $\frac{dp}{dx} < 0$



$$U_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y - H) y$$