

J. Szantyr – Wykład 10 – Stan naprężenia w płynie

Można udowodnić, że tensor stanu naprężenia w płynie jest tensorem symetrycznym, czyli: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ itd.

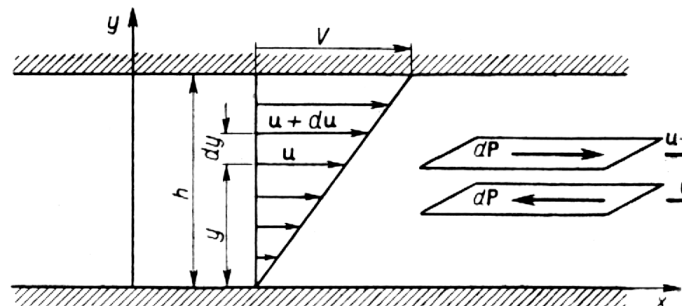
Redukuje to liczbę niewiadomych naprężeń lepkościowych do 6, które muszą być wyznaczone w oparciu o wybrany model płynu.

Najczęściej jest stosowany model płynu Newtona czyli płyn „niutonowski”.

Model płynu Newtona oparty jest na następujących założeniach:

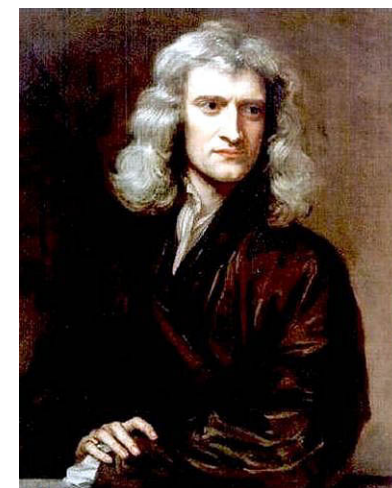
-płyn jest izotropowy, czyli ma jednakowe właściwości we wszystkich kierunkach,

-naprężenia w płynie są liniowymi funkcjami prędkości deformacji



$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{gdzie:}$$

μ - dynamiczny współczynnik lepkości, zależny co najwyżej od temperatury



Isaac Newton
1643 - 1727

W przepływie trójwymiarowym płynu ściśliwego model płynu Newtona jest opisany następującymi zależnościami:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \bar{u}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \bar{u}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \bar{u}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

gdzie:

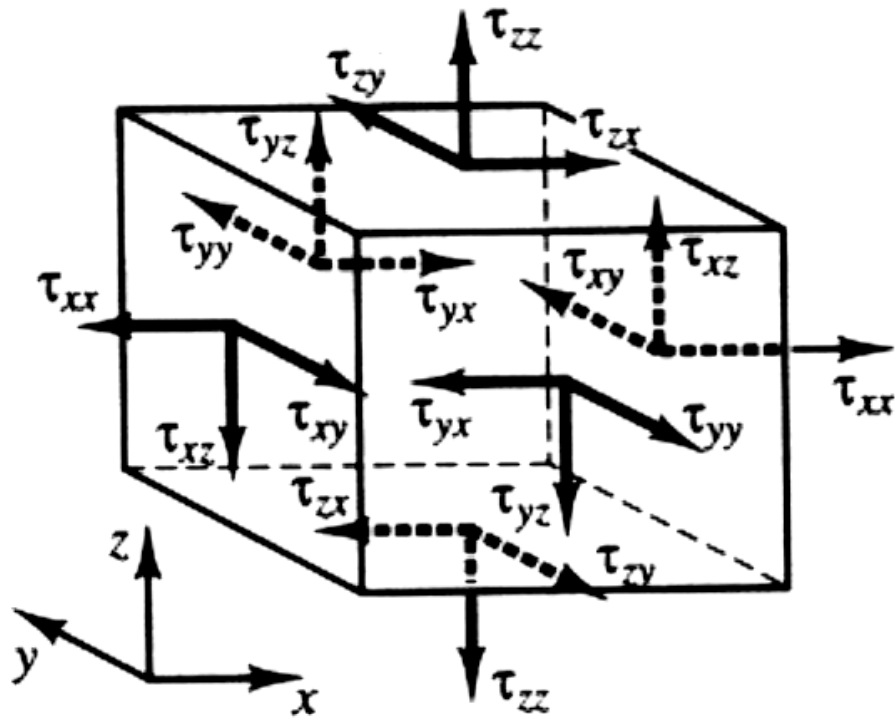
$$\operatorname{div} \bar{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

λ - objętościowy współczynnik lepkości

zgodnie z hipotezą Stokesa mamy:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

W płynie nieściśliwym jest $\operatorname{div} \bar{u} = 0$ czyli drugie człony naprężeń normalnych się zerują.



Powyższe zależności opisują normalne i styczne naprężenia lepkościowe pokazane na rysunku obok. Ponieważ zależności te wiążą pole naprężeń z polem prędkości, ich wstawienie do równania zachowania pędu prowadzi do zredukowania liczby niewiadomych. Jest to pokazane w następnym wykładzie.

W zapisie tensorowym mamy: $[P] = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{u}\right)[E] + 2\mu[D]$
gdzie:

$[E]$ - tensor jednostkowy (zob. następny slajd)

$[D]$ - tensor prędkości deformacji elementu płynu (Wykład nr 7)

W płynie nieściśliwym mamy: $[P] = -p[E] + 2\mu[D]$

Tensor stanu naprężenia w płynie

$$[P] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -p + \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \hline \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \hline \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p + \tau_{zz} \\ \hline \end{array}$$

Tensor jednostkowy

$$[E] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Inne modele płynu – płyny „nieniutonowskie”

Wszystkie płyny, których lepkość zależy od czynników innych niż temperatura nazywamy płynami nieniutonowskimi. Ich zachowanie pod działaniem sił (naprężeń) opisują inne modele teoretyczne. Płyny nieniutonowskie wraz z plastycznymi ciałami stałymi są obiektem zainteresowania dziedziny zwanej **reologia**. Nazwa **reologia** została stworzona przez Eugene C. Bingham i jego współpracownika Markusa Reinera w roku 1920.

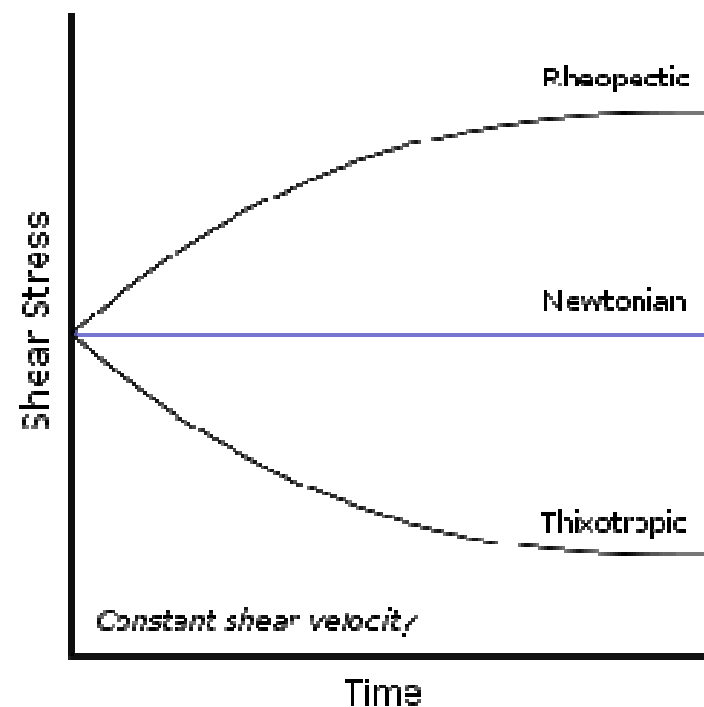


Eugene C. Bingham 1878 - 1945

A. Płyny o lepkości zależnej od czasu

1. Płyny reopektyczne – płyny o lepkości rosnącej w miarę upływu czasu działania odkształcenia (wymagają rosnącego naprężenia dla utrzymania stałej prędkości odkształcenia).
Przykłady to bita śmietana, niektóre smary.

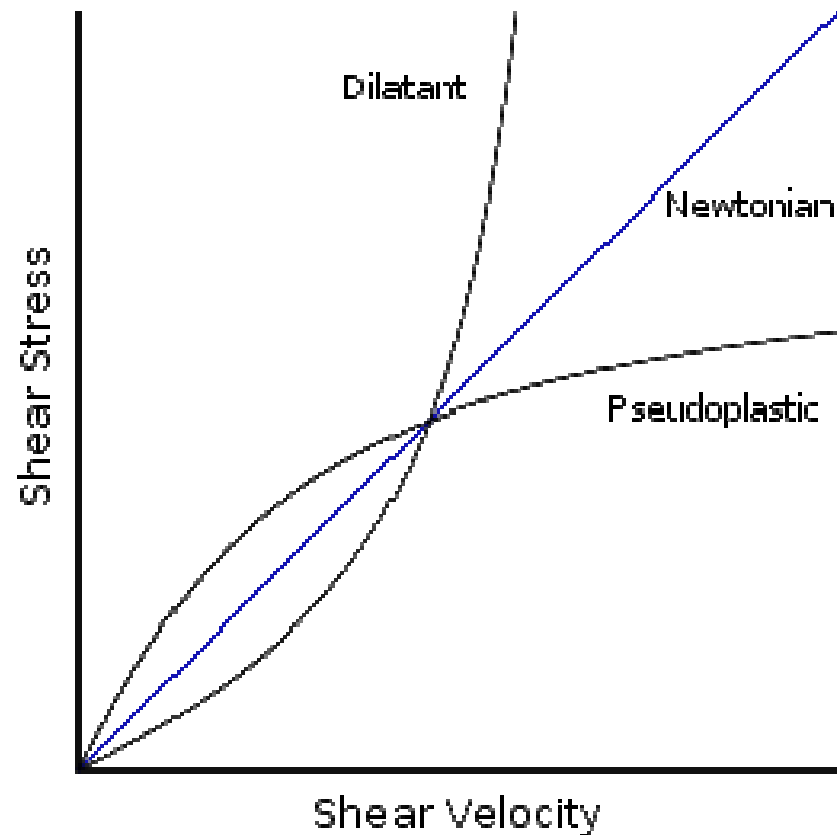
2. Płyny tiksotropowe – płyny o lepkości malejącej w miarę upływu czasu działania odkształcenia (naprężenie niezbędne do utrzymania stałej prędkości odkształcenia spada z upływem czasu).
Przykłady to niektóre farby, płuczka do wierceń geologicznych, płyn rdzeniowy w kręgosłupie, płyn wypełniający torebki stawowe).



B. Płyny o lepkości niezależnej od czasu

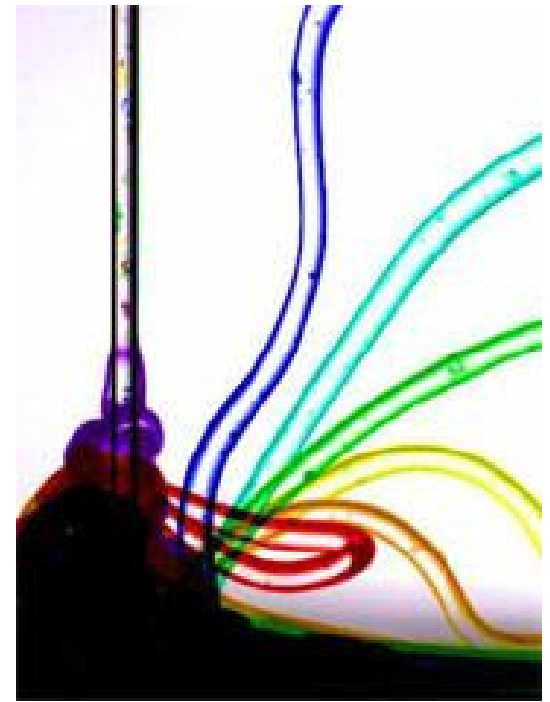
1. Płyny gęstniejące pod działaniem naprężeń (*dilatant fluids* czyli o lepkości rosnącej pod działaniem naprężeń), przykłady to krochmal, piasek w wodzie, oleje

2. Płyny rzednące pod działaniem naprężeń (*pseudoplastic fluids* czyli o lepkości malejącej pod działaniem naprężeń), przykłady to krew, syropy, farby, keczupy, szampony



Zjawisko Kaye (Kaye effect)

Zjawisko to zostało odkryte przez Alana Kaye w roku 1963. Dotyczy ono płynów pseudoplastycznych, np. szamponu. Cienki strumień płynu wylewanego na płaszczyznę tworzy na niej stożkową „górkę”. Na powierzchni górki pojawia się warstwa rozrzedzonego szamponu (czyli o małej lepkości). W wyniku smarowania tą warstwą opadający strumień nie miesza się już z szamponem w „górcie”, lecz odbija się od niej i strzela w górę, niekiedy mieszając się ze strumieniem opadającym. Na płaszczyźnie skośnej można uzyskać stabilny w czasie efekt kaskadowy →



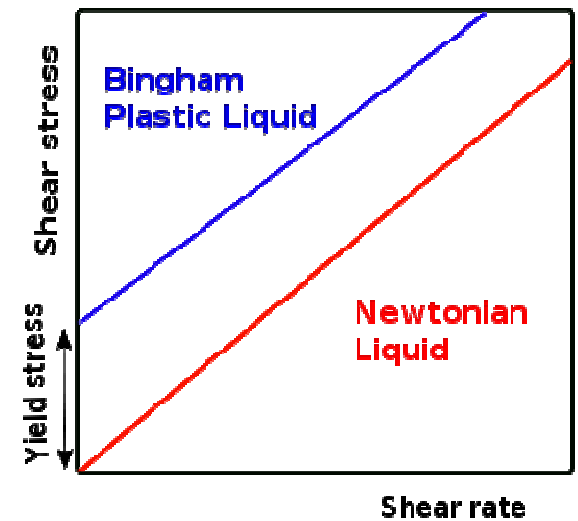
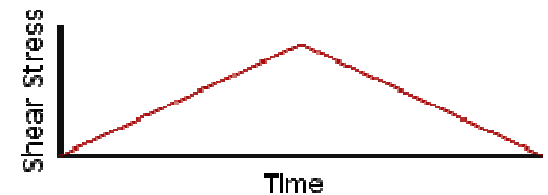
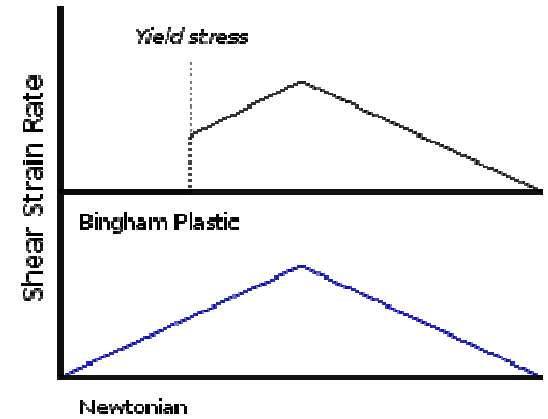
Ciecz Binghamama

Ciecz Binghamama jest wczesnym modelem płynu nieniutonowskiego. Do pewnej granicy naprężeń zachowuje się ona jak ciało stałe, a powyżej tej granicy jak płyn niutonowski, co można opisać wzorem:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{dla:} \quad \tau \leq \tau_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau - \tau_0}{\mu} \quad \text{dla:} \quad \tau > \tau_0$$

Przykładem cieczy Binghamama może być pasta do zębów lub margaryna



Model Herschela-Bulkleya

Model płynu Herschela-Bulkleya postuluje zależność naprężeń od prędkości deformacji, zgodnie z poniższymi formułami:

$$\tau_{ij} = 2 \cdot \mu \cdot E_{ij} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

czyli identycznie jak u Newtona – różnice są zawarte w sposobie wyznaczania współczynnika lepkości:

gdzie: $\mu = \mu_0$ dla $\Pi \leq \Pi_0$

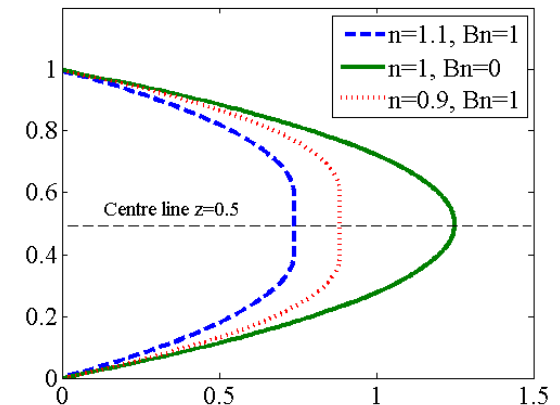
$\mu = k \cdot \Pi^{n-1} + \tau_0 \cdot \Pi^{-1}$ dla $\Pi \geq \Pi_0$

$\Pi = \sqrt{2 \cdot E_{ij} \cdot E_{ji}}$ - drugi niezmiennik tensora prędkości deformacji

k, n – stałe modelu (empiryczne)



W. H. Herschel 1926



Profile prędkości przepływu laminarnego w kanale (zielony – płyn niutonowski, czerwony – płyn pseudoplastyczny, niebieski – płyn gęstniejący) obliczone wg. modelu Herschela-Bulkleya

Superpłyny

Superpłyny to płyny o zerowej lepkości i o nieskończenie wielkim przewodnictwie cieplnym, ale z obecnym nadal napięciem powierzchniowym. Przykładem jest ciekły izotop helu ${}^4\text{He}$ w temperaturze $T < 2,17$ [K] ($t < -270,98$ C). Na skutek działania napięcia powierzchniowego przy braku lepkości taki superpłyn samoczynnie wypływa z naczynia lub wyrównuje poziomy w naczyniu z przegrodami. Za opracowanie modelu zjawisk występujących w superpłynach L.D. Landau otrzymał nagrodę Nobla.



Lew D. Landau 1908 – 1968
Nobel 1962

