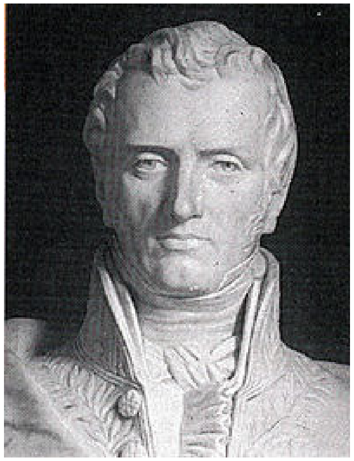
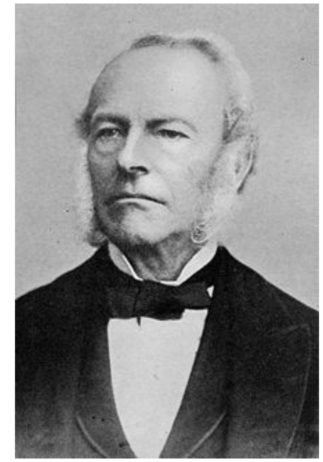


J. Szantyr – Wykład 11 – Równanie Naviera-Stokesa



George Stokes – 1819 – 1903 →

←Claude Navier 1785 - 1836

Podstawienie zależności wynikających z modelu płynu Newtona do równania zachowania pędu daje równanie znane jako **równanie Naviera-Stokesa.**

W formie skalarnej ma ono postać trzech równań:

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda div\bar{u}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\rho f_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda div\bar{u}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=\rho f_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda div\bar{u}\right]$$

W formie wektorowej równanie Naviera Stokesa ma postać:

$$\rho \frac{D\overline{u}}{Dt} = \rho\overline{f} - grad p + grad\left(\lambda div \overline{u}\right) + div\left(2\mu[D]\right)$$

$$A = B + C + D + E$$

A – prędkość zmiany pędu elementu płynu

B- siła masowa

C- siła powierzchniowa ciśnienia

D – siła powierzchniowa związana z lepkością płynu, wynikająca ze zmiany objętości elementu płynu <u>ściśliwego</u> (kompresji lub ekspansji)

E- siła powierzchniowa związana z lepkością płynu, wynikająca z deformacji liniowej i postaciowej elementu płynu

W płynie nieściśliwym równanie Naviera Stokesa upraszcza się do postaci:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho\bar{f} - gradp + div(2\mu[D])$$

Jeżeli dodatkowo założymy, że lepkość płynu jest stała,to mamy:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho\bar{f} - gradp + \mu\Delta\bar{u}$$

Leonhard Euler
1707 - 1783

Dalszym możliwym uproszczeniem jest założenie o braku lepkości płynu, które prowadzi do **równania Eulera**, opisującego ruch płynu nielepkiego i nieściśliwego:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho\bar{f} - gradp$$

Równanie Naviera Stokesa może być rozwiązane analitycznie tylko dla niewielu uproszczonych przypadków. Wybrane przykłady opisano niżej.

Przykłady rozwiązań analitycznych równania Naviera Stokesa dla prostych przepływów

Założenie: rozpatrujemy przepływ jednokierunkowy, tzn. taki w którym *v=w=0* czyli wektory prędkości są równoległe do siebie w każdym punkcie pola.

Jeżeli płyn jest nieściśliwy to z równania zachowania masy mamy:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \text{czyli:} \qquad u=u(y,z,t)$$

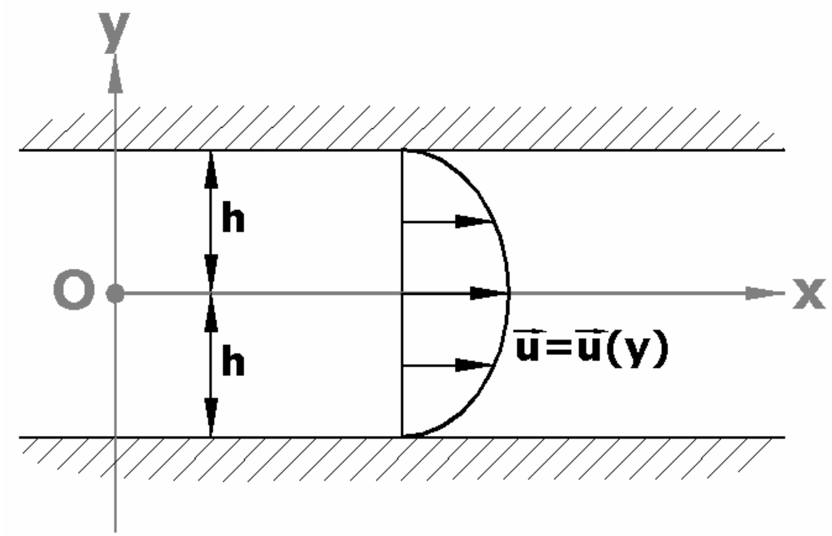
Wtedy równanie Naviera Stokesa upraszcza się do postaci:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}$$

Ponieważ lewa strona nie zależy od x, a ponadto mamy: $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial z}=0$

to: $p=p(x,t)$ $\qquad \frac{dp}{dx}=f(t)$ $\qquad$ czyli: $\frac{dp}{dx}=\frac{\Delta p}{\Delta x}$

Przykład 1: Ustalony laminarny przepływ pomiędzy dwoma nieskończonymi równoległymi płytami (przepływ Poiseuille'a)



Dane: $\frac{\Delta p}{\Delta x} = const$

Warunki brzegowe:

$u=0$ dla $y=h$

$u=0$ dla $y=-h$

Rozwiązanie

Równanie Naviera Stokesa przybiera postać: $\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}$

Po dwukrotnym scałkowaniu otrzymujemy:

$$u(y) = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych, co prowadzi do rozwiązania:

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\left(h^2 - y^2\right)$$

Objętościowe natężenie przepływu można wyznaczyć następująco:

$$Q = \int_S u dS = \int_{-h}^{+h} u(y) dy = -\frac{2}{3\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x} h^3$$

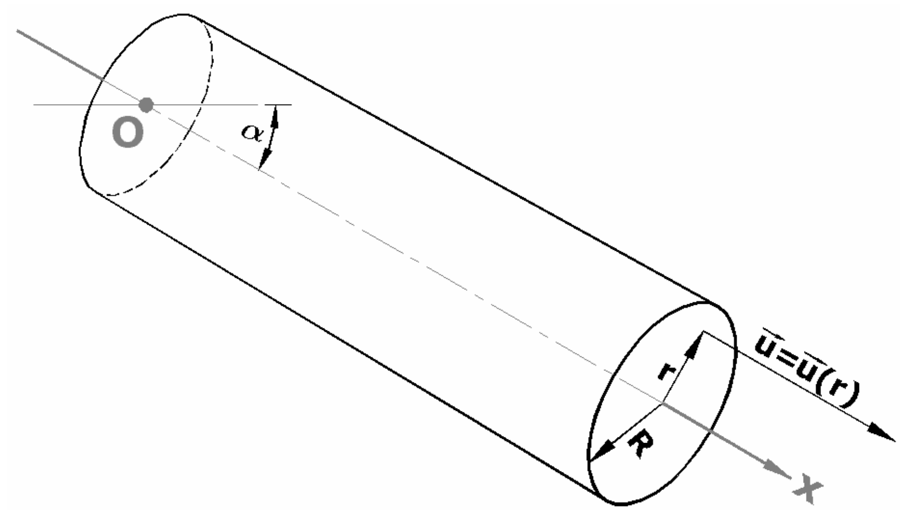
Komentarz:

-profil prędkości ma kształt paraboliczny z maksimum dla y=0,

-im większy gradient ciśnienia tym większa prędkość maksymalna i większe natężenie przepływu,

-im większa lepkość tym mniejsza prędkość maksymalna i mniejsze natężenie przepływu.

Przykład 2: Ustalony laminarny przepływ przez rurę o stałym przekroju kołowym ustawiona poziomo (przypadek α=0)



Dane: $\dfrac{\Delta p}{\Delta x} = const$

Warunki brzegowe:

$u(R) = 0 \qquad u(0) < \infty$

Rozwiązanie

Stosujemy walcowy układ współrzędnych, w którym laplasjan prędkości ma postać:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)$$

Równanie Naviera Stokesa ma postać: $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}$

Dwukrotne całkowanie względem r daje kolejno:

$$r\frac{du}{dr}=\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\frac{r^2}{2}+C_1 \qquad u=\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\frac{r^2}{4}+C_1\ln r+C_2$$

Stałe całkowania można wyznaczyć z warunków brzegowych:

$$C_1=0 \qquad C_2=-\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\frac{R^2}{4}$$

Co ostatecznie prowadzi do:

$$u(r)=-\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\left(R^2-r^2\right)$$

$$Q=\int_0^R u(r)\cdot 2\pi r dr=-2\pi\cdot\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\int_0^R\left(R^2-r^2\right)dr=-\frac{\pi}{8\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}R^4$$

Komentarz: porównanie do przykładu 1 przy założeniu h=R prowadzi do wniosku, że przy tym samym gradiencie ciśnienia maksymalna prędkość przepływu i objętościowe natężenie przepływu w rurze są mniejsze. Wynika to z bardziej intensywnego hamowania przepływu w rurze przez naprężenia lepkościowe.

<u>Przypadek rury nachylonej pod kątem α do poziomu</u>

W tym przypadku równanie Naviera Stokesa musi uwzględniać składową siły masowej grawitacji działającą w kierunku przepływu:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}-\frac{g}{\nu}\sin\alpha$$

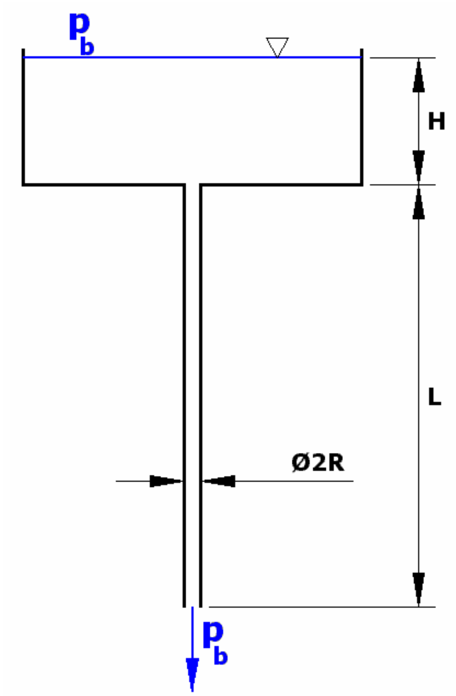
Ponieważ gradient ciśnienia i składowa siły masowej podobnie oddziaływują na przepływ można wprowadzić spadek hydrauliczny *J*:

$$J=\sin\alpha-\frac{1}{\rho g}\frac{\Delta p}{\Delta x}$$

Wtedy rozwiązanie ma postać:

$$u(r) = \frac{gJ}{4\nu}\left(R^2 - r^2\right) \qquad Q = \frac{\pi g J}{8\nu} R^4$$

Szczególny przypadek: rura skierowana pionowo



W tym przypadku mamy: $J = 1 - \dfrac{\Delta p}{\rho g L}$

Ciśnienie na wlocie do rury: $p_1 = p_b + \rho g H$

Ciśnienie na wylocie z rury: $p_2 = p_b$

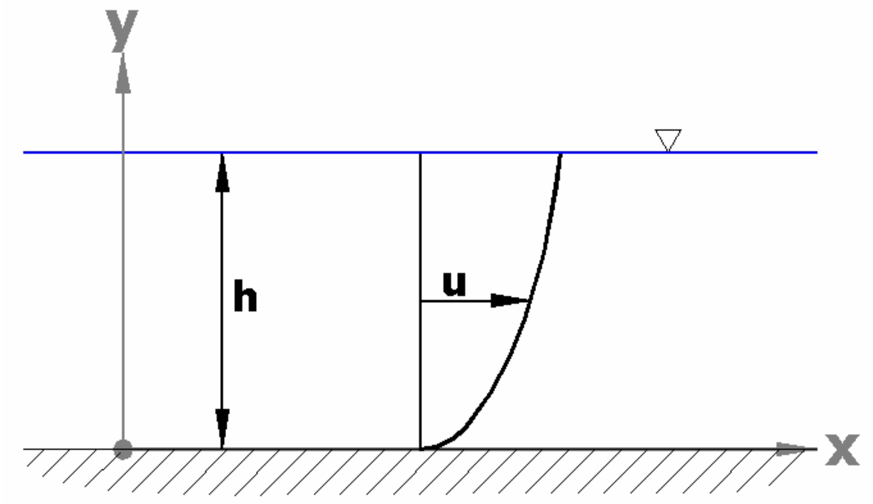
Czyli: $\Delta p = p_2 - p_1 = -\rho g H$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$Q = \frac{\pi g R^4}{8\nu}\left(1 + \frac{H}{L}\right)$$

Dzięki łatwości pomiaru Q można ten wzór użyć do określenia współczynnika lepkości kinematycznej ν

Przykład 3: Przepływ w kanale otwartym



warunki brzegowe:

$$\frac{du}{dy} = 0 \qquad \text{dla: } y{=}h \qquad (1)$$

$$u{=}0 \qquad \text{dla } y{=}0 \qquad (2)$$

Rozwiązanie

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x} \quad \longrightarrow \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x} y + C_1$$

Z warunku brzegowego (1): $C_1 = -\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x} h$ co prowadzi do:

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x} y - \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x} h$$

po kolejnym całkowaniu otrzymujemy: $u = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x} y^2 - \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x} hy + C_2$

$C_2 = 0$ z warunku brzegowego (2), co ostatecznie prowadzi do:

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x} y\left(y - 2h\right)$$

natomiast objętościowe natężenie przepływu wynosi:

$$Q = \int_0^h \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\left(y^2 - 2hy\right)dy = -\frac{2}{3}\frac{\Delta p}{\Delta x} h^3$$

Uwaga: przy porównywaniu wyników uzyskanych dla przepływu w kanale otwartym z tymi dla przepływu Poiseuille należy wziąć pod uwagę różnice w przyjętym układzie współrzędnych.