

J. Szantyr - Wykład 12 – Równanie zachowania energii

Energię kinetyczną płynu można traktować jako sumę energii ruchu makroskopowego oraz energii ruchu molekularnego, zwanej energią wewnętrzną:

$$\int_V \left(\frac{u^2}{2} + e \right) dV \qquad \bar{u}(u_x, u_y, u_z) \qquad u = |\bar{u}|$$

Zmiana w czasie (czyli pochodna substancjalna) całkowitej energii kinetycznej objętości płynnej V otoczonej powierzchnią S jest równa sumie mocy sił masowych, mocy sił powierzchniowych oraz strumieniowi energii doprowadzonej do objętości płynnej

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) dV = \int_V \rho \bar{f} \bullet \bar{u} dV + \int_{S(V)} \bar{\tau} \bullet \bar{u} dS - \int_{S(V)} \bar{j} \bullet \bar{n} dS$$

gdzie:

$\bar{f}$	jednostkowa siła masowa	$\bar{f}(f_x, f_y, f_z)$
$\bar{\tau}$	jednostkowa siła powierzchniowa	
$\bar{j}$	strumień ciepła doprowadzonego	$\bar{j}(j_x, j_y, j_z)$
$\bar{n}$	wersor normalny zewnętrzny	

Całki powierzchniowe w równaniu mogą być zamienione na objętościowe. Jeżeli jednocześnie wyrazimy jednostkowe siły powierzchniowe przez tensor stanu naprężenia w płynie $[\mathbf{P}]$, to powyższe równanie można przekształcić do postaci:

$$\int_V \left[\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2}{2} + e \right) - \rho \bar{\mathbf{f}} \bullet \bar{\mathbf{u}} - \text{div}([\mathbf{P}]\bar{\mathbf{u}}) + \text{div}\bar{\mathbf{j}} \right] dV = 0$$

Ponieważ obszar całkowania wybrano dowolnie, funkcja podcałkowa musi być też równa zero, co prowadzi do różniczkowej formy równania zachowania energii:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2}{2} + e \right) = \rho \bar{\mathbf{f}} \bullet \bar{\mathbf{u}} + \text{div}([\mathbf{P}]\bar{\mathbf{u}}) - \text{div}\bar{\mathbf{j}}$$

Pełne rozwinięcie operatorów w równaniu prowadzi do postaci:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2}{2} + e \right) = & \rho (f_x u_x + f_y u_y + f_z u_z) + \frac{\partial}{\partial x} [(-p + \tau_{xx})u_x + \tau_{yx}u_y + \tau_{zx}u_z] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} [\tau_{xy}u_x + (-p + \tau_{yy})u_y + \tau_{zy}u_z] + \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{xz}u_x + \tau_{yz}u_y + (-p + \tau_{zz})u_z] + \\ & - \frac{\partial j_x}{\partial x} - \frac{\partial j_y}{\partial y} - \frac{\partial j_z}{\partial z} \end{aligned}$$

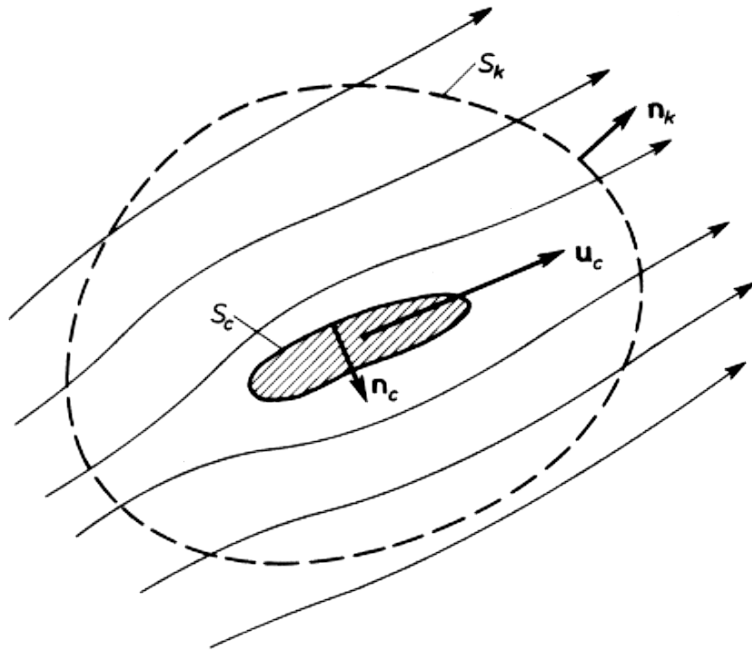
Jeżeli pole sił masowych jest stacjonarnym polem potencjalnym takim, że $\bar{f} = -grad\Pi$ to równanie zachowania energii można zapisać w postaci:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left[\left(\frac{u^2}{2} + e + \Pi \right) \right] = div([P]\bar{u}) - div\bar{j}$$

lub w postaci równania całkowego:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{u^2}{2} + e + \Pi \right) \right] dV + \int_{s(V)} \rho \left(\frac{u^2}{2} + e + \Pi \right) u_n dS = \int_{s(V)} \bar{\tau} \bullet \bar{u} dS - \int_{s(V)} \bar{j} \bullet \bar{n} dS$$

Przykład 1: przypadek zewnętrznego opływu ciała



S_k - powierzchnia kontrolna

u_c - prędkość ruchu ciała

Równanie zachowania energii dla takiego przypadku ma postać:

$$\begin{aligned} & \int_{V(S_k-S_c)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{u^2}{2} + e + \Pi \right) \right] dV + \int_{S_k} \rho \left(\frac{u^2}{2} + e + \Pi \right) u_n dS_k + \int_{S_c} \rho \left(\frac{u^2}{2} + e + \Pi \right) u_n dS_c = \\ & = \int_{S_k} \bar{\tau}_{nn} \bullet \bar{u} dS_k + \int_{S_k} \bar{\tau}_{nt} \bullet \bar{u} dS_k + \int_{S_c} \bar{\tau}_{nn} \bullet \bar{u} dS_c + \int_{S_c} \bar{\tau}_{nt} \bullet \bar{u} dS_c - \int_{S_k} \bar{j} \bullet \bar{n}_k dS_k - \int_{S_c} \bar{j} \bullet \bar{n}_c dS_c \end{aligned}$$

Ponieważ powierzchnia ciała jest nieprzenikalna, to trzeci człon lewej strony jest równy zero. Z kolei jeżeli prędkość $\bar{u}_c$ jest jednakowa w każdym punkcie ciała, to można napisać:

$$\int_{S_c} \bar{\tau}_{nn} \bullet \bar{u}_c dS_c + \int_{S_c} \bar{\tau}_{nt} \bullet \bar{u}_c dS_c = \bar{u}_c \left[\int_{S_c} \bar{\tau}_{nn} dS_c + \int_{S_c} \bar{\tau}_{nt} dS_c \right] = -\bar{u}_c \bullet \bar{R}$$

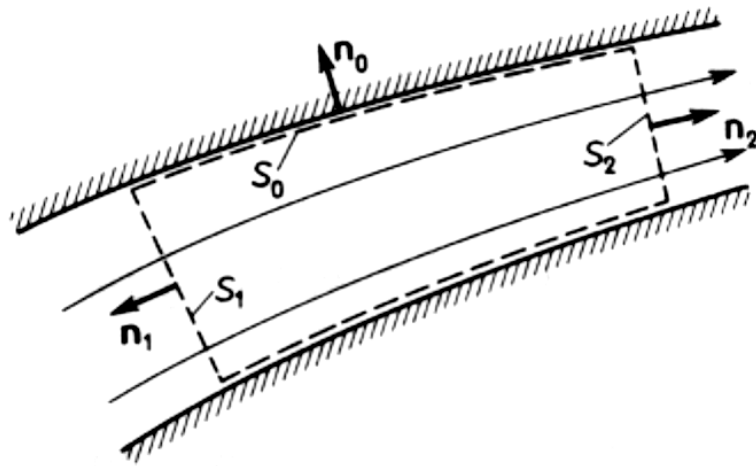
gdzie R jest siłą reakcji hydrodynamicznej płynu na ciało.

Jeżeli ponadto założymy: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ $\bar{j} = 0$ $\bar{\tau}_{nt} = 0$ $\bar{\tau}_{nn} = -p\bar{n}$

to otrzymamy: $\bar{u}_c \bullet \bar{R} = - \int_{S_k} \rho \left(\frac{u^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) u_n dS_k$

Wniosek: można wyznaczyć siłę hydrodynamiczną działającą na ciało poprzez analizę śladu hydrodynamicznego za tym ciałem, bez konieczności bezpośredniego pomiaru np. dynamometrem

Przykład 2: przypadek przepływu wewnętrznego (przepływ w kanale)



Założenie: przepływ jest stacjonarny

Równanie zachowania energii dla tego przypadku ma postać:

$$m \left[\left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \tilde{e} + \tilde{\Pi} \right)_{S_2} - \left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \tilde{e} + \tilde{\Pi} \right)_{S_1} \right] = \int_{S_0} \bar{\tau}_{nn} \bullet \bar{u} dS_0 + \int_{S_0} \bar{\tau}_{nt} \bullet \bar{u} dS_0 + \int_{S_1} \bar{\tau}_{nn} \bullet \bar{u} dS_1 + \\ + \int_{S_1} \bar{\tau}_{nt} \bullet \bar{u} dS_1 + \int_{S_2} \bar{\tau}_{nn} \bullet \bar{u} dS_2 + \int_{S_2} \bar{\tau}_{nt} \bullet \bar{u} dS_2 - \int_{S_0} \bar{j} \bullet \bar{n}_0 dS_0 - \int_{S_1} \bar{j} \bullet \bar{n}_1 dS_1 - \int_{S_2} \bar{j} \bullet \bar{n}_2 dS_2$$

m – masowe natężenie przepływu

Po lewej stronie równania występują wartości średnie zdefiniowane w następujący sposób:

$$\left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \tilde{e} + \tilde{\Pi} \right)_s = \frac{1}{m} \int_s \rho \left(\frac{u^2}{2} + e + \Pi \right) u_n dS$$

Dodatkowe założenia:

- płyn jest nielepki, czyli styczne naprężenia są równe zero a normalne wyrażają się tylko przez ciśnienie,
- brak transportu ciepła przez powierzchnie wlotu i wylotu.

Prowadzi to do zależności:

gdzie: $\Pi = gz$

$$m \left[\left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \tilde{e} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} + \tilde{\Pi} \right)_{s_1} - \left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \tilde{e} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} + \tilde{\Pi} \right)_{s_2} \right] = - \int_{s_0} \bar{j} \bullet \bar{n}_0 dS_0$$

Zależność ta może opisywać np. przepływ przez rurkę w wymienniku ciepła.