

J. Szantyr – Wykład nr 14 – Zamknięty układ równań mechaniki płynów

Przedstawione powyżej równania tworzą zamknięty układ równań mechaniki płynów, który może być zastosowany do opisu konkretnych przepływów i uzyskania, w drodze rozwiązania tego układu, informacji o wartościach interesujących nas parametrów tego przepływu. Konkretna postać układu równań zależy od przyjętego modelu płynu.

Przypadek 1: płyn nieściśliwy o stałej lepkości

Zamknięty układ równań tworzą:

- równanie zachowania masy $div \bar{u} = 0$

- równanie zachowania pędu $\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \bar{f} - grad p + \mu \Delta \bar{u}$

Razem są to cztery równania skalarne z czterema niewiadomymi:

- ciśnienie p

- składowe prędkości u_x, u_y, u_z

W tym przypadku pole temperatury nie wpływa na przepływ, ale samo jest uzależnione od pola prędkości przepływu poprzez równanie bilansu entropii w postaci:

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = T \dot{s}_M + \lambda \Delta T$$

Tę postać równania można uzyskać podstawiając do oryginalnego równania zależność dla energii wewnętrznej:

$$e = cT + e_0$$

W przypadku gdy lepkość płynu zależy od temperatury, równanie bilansu entropii jest sprzężone z równaniami zachowania masy i zachowania pędu poprzez zależność:

$$\mu = \mu(T)$$

Mamy wtedy układ sześciu równań z sześcioma niewiadomymi:

- ciśnienie p
- składowe prędkości u_x, u_y, u_z
- temperatura T
- współczynnik lepkości μ

Przypadek 2: płyn ściśliwy

W tym przypadku zamknięty układ równań tworzą:

- równanie zachowania masy $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0$

- równanie zachowania pędu $\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \bar{f} - \text{grad} p - \text{grad} \left(\frac{2}{3} \mu \text{div} \bar{u} \right) + \text{div}(2\mu[D])$

- równanie bilansu entropii $\rho \frac{De}{Dt} = T \dot{s}_M + \frac{p}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \lambda \Delta T$

- równanie energii wewnętrznej $e = \int_{T_0}^T c_v(T) dT$

- równanie stanu $\frac{p}{\rho} = Z(p, T) RT$ Z – funkcja ściśliwości
 R – stała gazowa

- dodatkowe zależności $\mu = \mu(T)$ $c_v = c_v(T)$

W tym przypadku mamy układ dziewięciu równań z dziewięcioma niewiadomymi:

- ciśnienie p
- gęstość ρ
- energia wewnętrzna e
- temperatura T
- współczynnik lepkości μ
- składowe prędkości u_x, u_y, u_z
- ciepło właściwe c_V

Założono, że współczynnik przewodnictwa cieplnego λ ma wartość stałą.

Warunki brzegowe i początkowe

Dla umożliwienia rozwiązania powyższych układów równań konieczne jest określenie odpowiednich warunków brzegowych oraz (dla przepływów niestacjonarnych) warunków początkowych. Warunki te są potrzebne do wyznaczenia dowolnych stałych i dowolnych funkcji wprowadzonych podczas całkowania równań.

Warunki brzegowe

Warunki brzegowe na powierzchni ciała stałego nieprzenikliwego

- płyn nielepki – prędkość normalna równa zero $u_n = 0$
- płyn lepki – prędkość równa zero $\bar{u} = 0$
- dana temperatura T lub strumień ciepła j

Warunki brzegowe na powierzchni ciała stałego porowatego

- prędkość styczna równa zero $u_t = 0$
- prędkość normalna zadana $u_n = f(x, y, z)$
- dana temperatura T lub strumień ciepła j

Warunki brzegowe na powierzchni rozdziału dwóch płynów

- płyn nielepki $u_n^1 = u_n^2$
- płyn lepki $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$

Jeżeli równanie powierzchni rozdziału płynów ma postać:

$$F(x, y, z, t) = 0$$

to kinematyczny warunek brzegowy ma postać:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_x \frac{\partial F}{\partial x} + u_y \frac{\partial F}{\partial y} + u_z \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Warunki w nieskończoności zadaje się w przypadku opływu obiektu strugą, w której pole prędkości z dala od obiektu jest jednorodne.

$$\bar{u} = \bar{u}(\infty)$$

$$p = p(\infty)$$

$$T = T(\infty)$$

Warunki początkowe

Warunki początkowe dotyczą zjawisk niestacjonarnych i powinny być podane dla wszystkich punktów przestrzeni wypełnionej płynem dla chwili $t = t_0$

Dla przepływu płynu nieściśliwego:

$$p = p(x, y, z, t_0) \quad \bar{u} = \bar{u}(x, y, z, t_0)$$

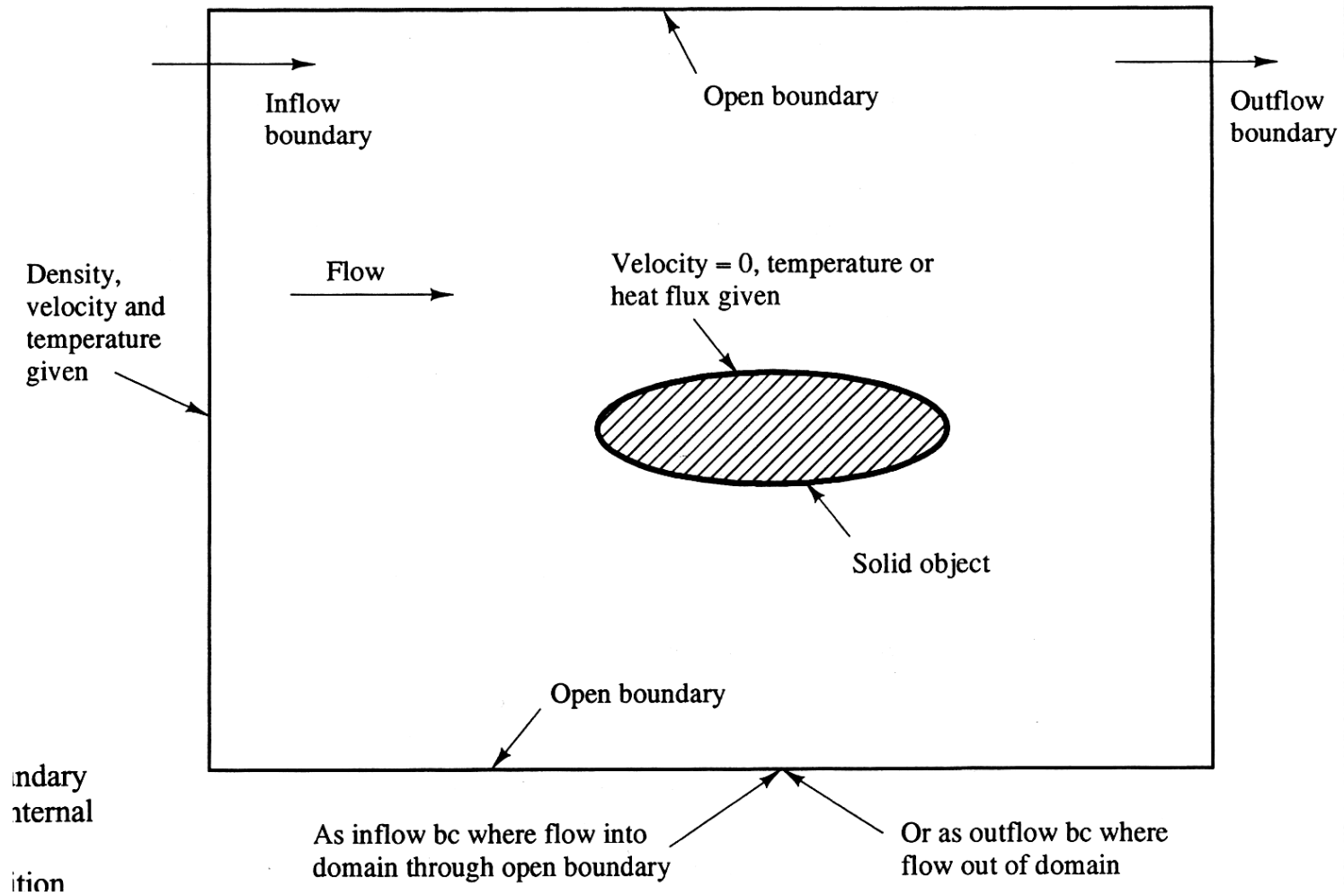
Dla przepływu płynu nieściśliwego o lepkości zależnej od temperatury dodatkowo:

$$T = T(x, y, z, t_0) \quad \mu = \mu(x, y, z, t_0)$$

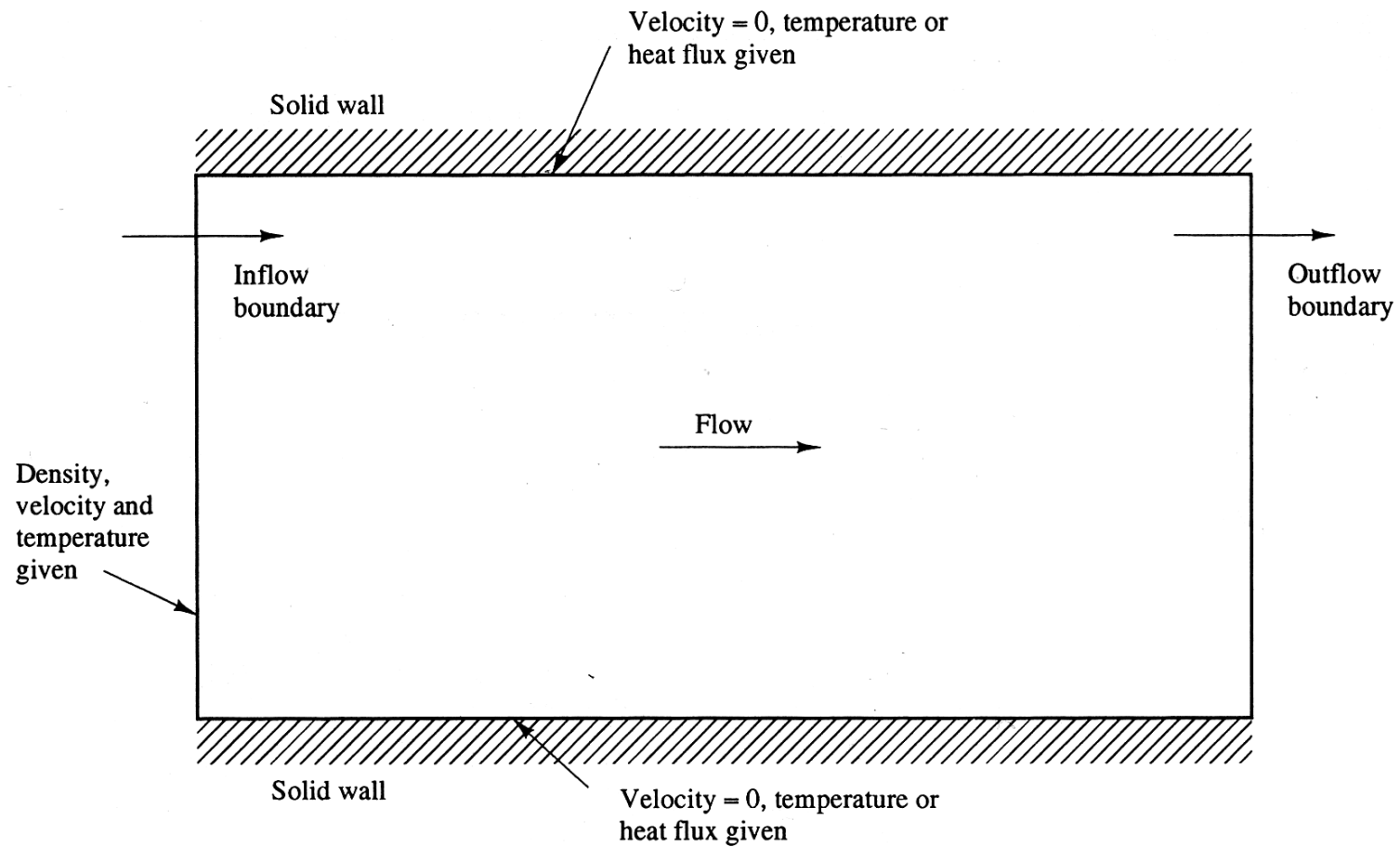
Dla przepływu płynu ściśliwego dodatkowo:

$$\rho = \rho(x, y, z, t_0) \quad e = e(x, y, z, t_0) \quad c_V = c_V(x, y, z, t_0)$$

Warunki początkowe powinny być niesprzeczne z warunkami brzegowymi.



Schemat warunków brzegowych dla przepływu zewnętrznego



Schemat warunków brzegowych dla przepływu wewnętrznego