J. Szantyr – Wykład nr 15 – Równanie Bernoulliego

Równanie Bernoulliego wyraża zasady zachowania pędu i zachowania energii płynu przy spełnieniu odpowiednich założeń.

Założenia:

-przepływ jest stacjonarny $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

-plyn jest nielepki $\mu = 0$

-płyn jest barotropowy $\rho = \rho(p)$

-pole sił masowych jest potencjalne $\bar{f} = -grad\Pi$

Przy takich założeniach można scałkować równanie Eulera:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho\bar{f} - gradp$$

Korzystamy z tożsamości:

$$\frac{D\overline{u}}{Dt} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\, grad\overline{u} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + grad\,\frac{u^2}{2} + rot\overline{u} \times \overline{u}$$

Ponadto wprowadzamy funkcję ciśnienia: $P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)}$

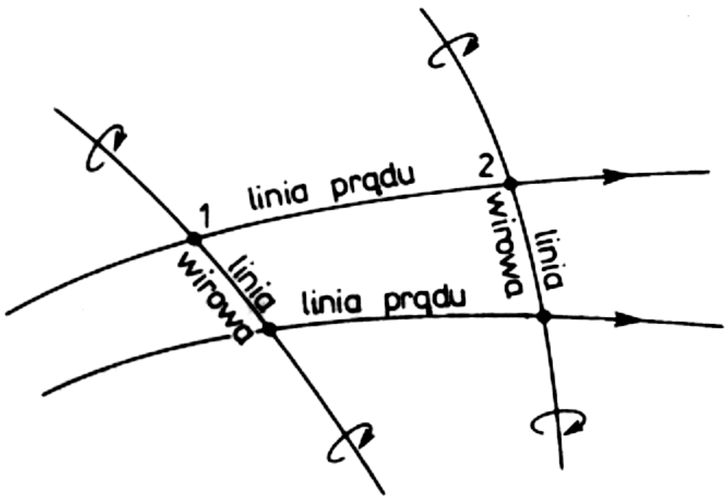
Co prowadzi do: $\frac{1}{\rho}\, gradp = gradP(p)$

Wtedy równanie Eulera można napisać w postaci:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + grad\left[\frac{u^2}{2} + P(p) + \Pi\right] = rot\overline{u} \times \overline{u}$$

Czyli: $grad\left[\frac{u^2}{2} + P(p) + \Pi\right] = gradE = rot\overline{u} \times \overline{u}$

Wyrażenie w nawiasie nazywamy trójmianem Bernoulliego *E*. Można wykazać stałość tego trójmianu w pięciu przypadkach.



Przypadek 1: wzdłuż linii prądu

$$gradE = \overline{u} \times rot\overline{u}$$

Mnożymy obie strony skalarnie przez wersor linii prądu $\overline{i}_s$

$$gradE \bullet \overline{i}_s = \left(\overline{u} \times rot\overline{u}\right) \bullet \overline{i}_s = 0$$

Co prowadzi do: $\frac{dE}{ds} = 0$ czyli: $E=const$

Przypadek 2: wzdłuż linii wirowej

Mnożymy obie strony równania skalarnie przez wersor linii wirowej

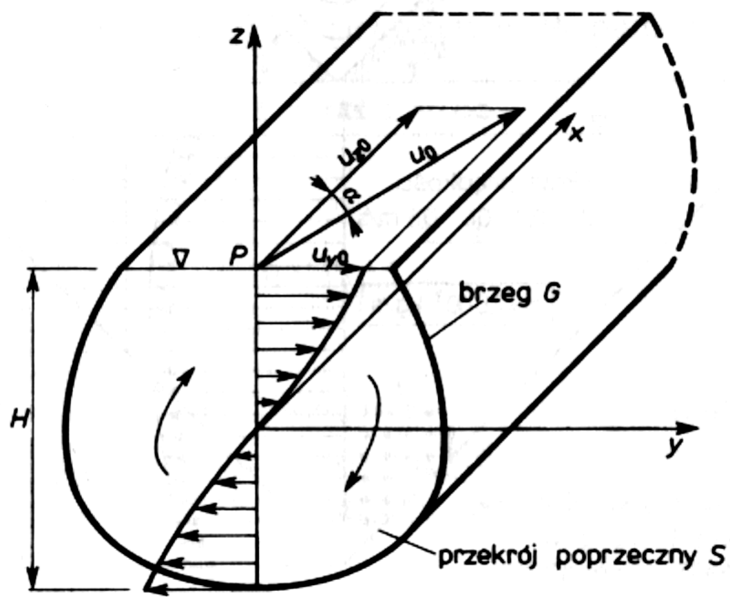
$gradE \bullet \overline{i}_\omega = \left(\overline{u} \times rot\overline{u}\right) \bullet \overline{i}_\omega = 0$ co daje $\frac{dE}{d\omega} = 0$ czyli $E=const$

Linie prądu i linie wirowe tworzą tzw. powierzchnię Bernoulliego na której jest $E=const$.

Przypadek 3: w przepływie bezwirowym $rot\overline{u} = 0 \rightarrow E = const$

Przypadek 4: w sytuacji hydrostatycznej $\overline{u} = 0 \rightarrow E = const$

Przypadek 5: w przepływie śrubowym

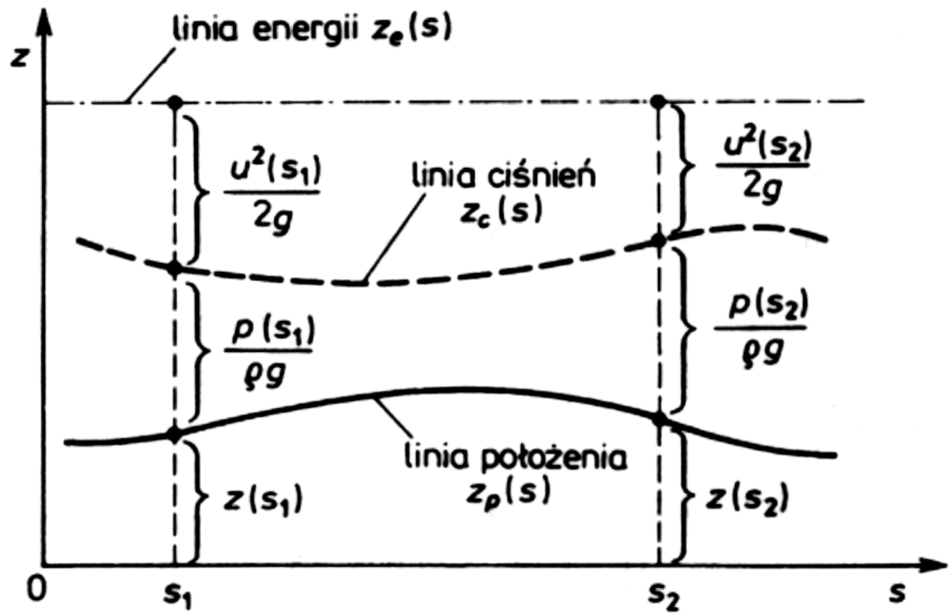


$$rot\overline{u} = \lambda\overline{u}$$

$$\overline{u} \times rot\overline{u} = \overline{u} \times \lambda\overline{u} = 0 \rightarrow E = const$$

W przypadku przepływu płynu **nieściśliwego** w **polu grawitacyjnym mamy:** $\rho = const$ oraz $\Pi = gz$ co daje:

Równanie Bernoulliego (1738)



Daniel Bernoulli
1700 - 1782

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = const$$

lub

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = const$$

Suma energii potencjalnej pola sił masowych, energii ciśnienia oraz energii kinetycznej płynu jest stała.

lub:

Suma wysokości geometrycznej, wysokości ciśnienia (czyli wysokości, na jaką wzniesie się słup cieczy pod ciśnieniem *p*) oraz wysokości prędkości (czyli wysokości, z której spadający element płynu uzyska prędkość *u*) jest stała.

Możliwe są inne postaci równania Bernoulliego, jeżeli przyjmie się szczególne formy warunku barotropowości płynu. Na przykład dla gazu podlegającego przemianie adiabatycznej warunek ten ma postać:

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0^{1/\kappa}} p^{1/\kappa}$$ gdzie κ jest wykładnikiem adiabaty Poissona $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$

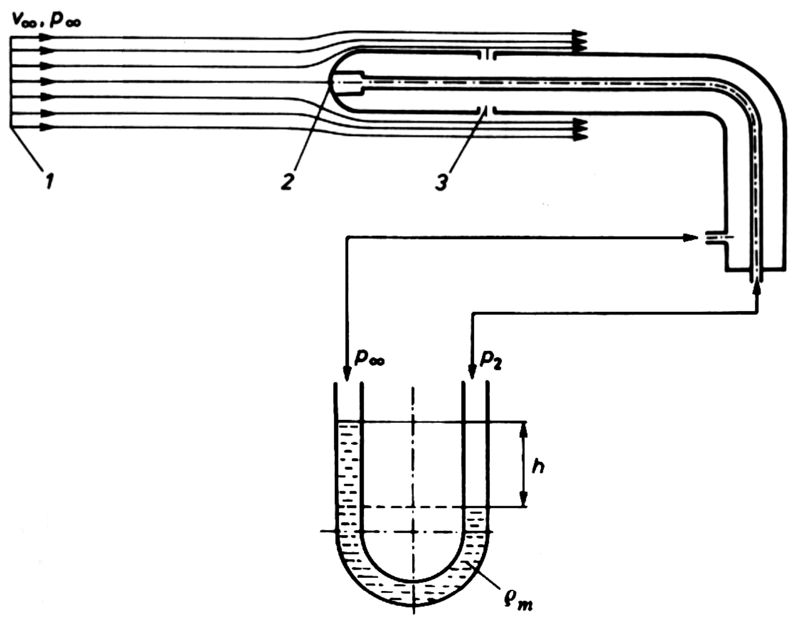
Równanie Bernoulliego przyjmuje wtedy postać:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1\right] + gz = const$$

Simeon Poisson
1781 - 1840

Porównanie wyprowadzenia równania Bernoulliego z równaniem zachowania energii dla rurki prądu (Wykład nr 12, slajd 7) pozwala stwierdzić, że przy pominięciu energii wewnętrznej płynu *e* i przewodnictwa cieplnego płynu równanie Bernoulliego wyraża również zasadę zachowania energii.

Przykład 1



Jaka jest prędkość przepływu płynu o gęstości ρ, w którym zanurzono rurkę Prandtla, jeżeli w podłączonym do niej manometrze różnica poziomów cieczy o gęstości ρ_m wynosi h?

Równanie Bernoulliego dla przekrojów 2 i 3 ma postać:

$$\frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} = \frac{u_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho}$$

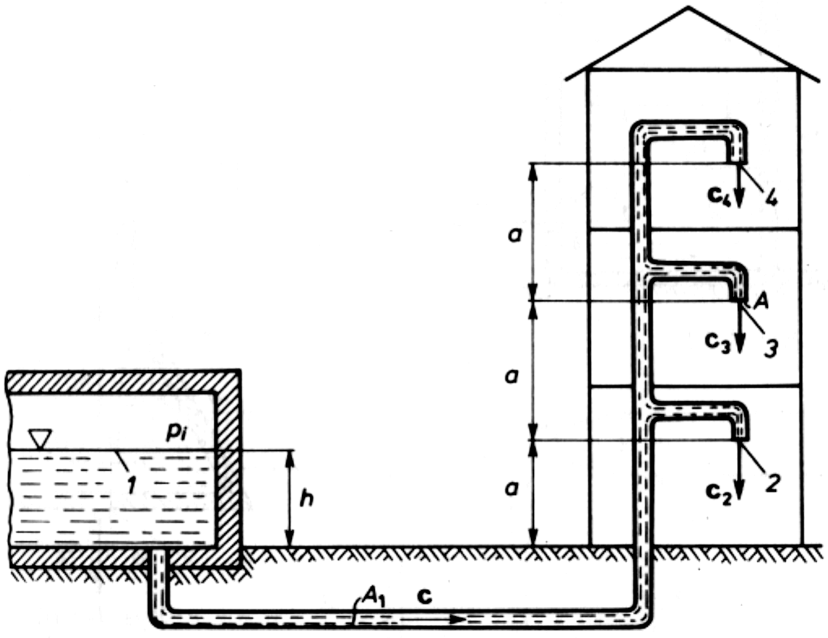
gdzie: $u_2 = 0$ $\quad u_3 = v_\infty$ $\quad p_3 = p_\infty$

co prowadzi do: $\frac{v_\infty^2}{2} = \frac{p_2 - p_\infty}{\rho}$

Z kolei różnica ciśnień wskazywana przez manometr wynosi:

$p_2 - p_\infty = \rho_m g h$ czyli: $\frac{v_\infty^2}{2} = \frac{\rho_m}{\rho} g h$ i ostatecznie: $v_\infty = \sqrt{2\frac{\rho_m}{\rho} g h}$

Przykład 2



Do budynku doprowadzono wodę z dużego zbiornika, w którym panuje ciśnienie absolutne p_i a odległość zwierciadła wody od poziomu fundamentu wynosi *h=const.* Obliczyć prędkość wypływu wody na kondygnacjach oraz prędkość przepływu w części podziemnej przewodu o przekroju A_1

Dane: przekroje wszystkich przewodów są równe *A*, gęstość wody jest równa *ρ*, a ciśnienie barometryczne jest równe p_b

Równania Bernoulliego względem poziomu fundamentu:

$$\frac{c_1^2}{2}+\frac{p_i}{\rho}+gh=\frac{c_2^2}{2}+\frac{p_b}{\rho}+ga \qquad \frac{c_1^2}{2}+\frac{p_i}{\rho}+gh=\frac{c_3^2}{2}+\frac{p_b}{\rho}+2ga$$

$$\frac{c_1^2}{2}+\frac{p_i}{\rho}+gh=\frac{c_4^2}{2}+\frac{p_b}{\rho}+3ga$$

Prędkość opadania wody w zbiorniku można przyjąć za równą zero, wobec czego mamy:

$$c_2 = \sqrt{2\left[\frac{p_i - p_b}{\rho} + g(h-a)\right]}$$

$$c_3 = \sqrt{2\left[\frac{p_i - p_b}{\rho} + g(h-2a)\right]}$$

$$c_4 = \sqrt{2\left[\frac{p_i - p_b}{\rho} + g(h-3a)\right]}$$

Prędkość c w przewodzie doprowadzającym wyznaczamy z równania ciągłości:

$$cA_1 = c_2 A + c_3 A + c_4 A$$

co daje:

$$c = \frac{A}{A_1}(c_2 + c_3 + c_4)$$