

## J. Szantyr – Wykład nr 16 – Podobieństwo przepływów I

Eksperymentalne badanie przepływów odbywa się najczęściej na modelach będących odwzorowaniem obiektów rzeczywistych w określonej skali. Aby wyniki pomiarów na modelu mogły być zastosowane do obiektu rzeczywistego, muszą być spełnione odpowiednie warunki podobieństwa przepływu modelowego i rzeczywistego.

### System wymiarowania wielkości fizycznych

#### Jednostki podstawowe

Długość [m]

Masa [kg]

Czas [s]

Temperatura [K]

#### Jednostki pochodne

Siła  $[N] = \left[ kg \frac{m}{s^2} \right]$

Moc  $[W] = \left[ kg \frac{m^2}{s^3} \right]$

Formułowanie praw fizycznych nie zależy od wyboru jednostek

## Twierdzenie Buckinghama (twierdzenie $\Pi$ )

1. Każdą funkcję  $n$  parametrów wymiarowych  $a_i$ , z których  $k$  ma wymiary podstawowe, można przedstawić w postaci funkcji  $n-k$  parametrów bezwymiarowych typu:  $\Pi_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}}$

Edgar Buckingham  
1867 - 1940



2. Jeżeli parametry bezwymiarowe  $\Pi$  będą identyczne dla dwóch różnych sytuacji (np. dwóch różnych skal), to zjawisko będzie przebiegało identycznie, pomimo różniących się parametrów typu  $a$ . Parametry typu  $\Pi$  można więc nazwać **parametrami podobieństwa** lub **kryteriami podobieństwa**.

Na podstawie ww. twierdzenia można przeprowadzić analizę wymiarową równań mechaniki płynów i wyprowadzić odpowiednie kryteria podobieństwa.

## Analiza wymiarowa równania zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \quad \text{dla skali 1}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial(\rho' u'_x)}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho' u'_y)}{\partial y'} + \frac{\partial(\rho' u'_z)}{\partial z'} = 0 \quad \text{dla skali 2}$$

Wprowadzamy przeliczniki skal:  $\rho' = \alpha_\rho \rho$       $t' = \alpha_t t$

$$x' = \alpha_x x \quad y' = \alpha_y y \quad z' = \alpha_z z \quad u'_x = \alpha_{ux} u_x \quad u'_y = \alpha_{uy} u_y \quad u'_z = \alpha_{uz} u_z$$

Postulujemy podobieństwo geometryczne pomiędzy przepływami w obu skalach, czyli:

$$\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \alpha_l = \frac{l'}{l}$$

Ponadto postulujemy podobieństwo kinematyczne, czyli podobieństwo pól prędkości pomiędzy przepływami w obu skalach, czyli:

$$\alpha_{ux} = \alpha_{uy} = \alpha_{uz} = \alpha_u = \frac{\bar{u}'}{\bar{u}}$$

Teraz równanie dla skali 2 można zapisać w postaci:

$$\frac{\alpha_\rho}{\alpha_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\alpha_\rho \alpha_u}{\alpha_l} \left[ \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] = 0$$

Warunek identyczności równań w skali 1 i 2 ma postać:  $\frac{\alpha_\rho}{\alpha_t} = \frac{\alpha_\rho \alpha_u}{\alpha_l}$  lub  $\frac{\alpha_l}{\alpha_t \alpha_u} = 1$

Wobec tego z zapisu skal wynika równość:  $\frac{l}{tu} = \frac{l'}{t'u'} = \frac{t_c}{t} = Sh$

Sh – liczba Strouhala

$t_c$  - czas charakterystyczny przepływu (czyli czas pokonania przez płyn charakterystycznego wymiaru liniowego  $l$  – np. długości rurociągu, z prędkością charakterystyczną  $u$ )

$t$  - czas zmienności niestacjonarnych warunków przepływu, np. długość cyklu pracy pompy tłokowej



Vincent Strouhal  
1850 - 1922

Wykorzystując liczbę Strouhala można napisać równanie zachowania masy w postaci bezwymiarowej:

$$Sh \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial(\hat{\rho} \hat{u}_x)}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial(\hat{\rho} \hat{u}_y)}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial(\hat{\rho} \hat{u}_z)}{\partial \hat{z}} = 0$$

gdzie wszystkie wielkości są odniesione do odpowiednich wielkości charakterystycznych, co czyni je bezwymiarowymi, np.:

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \hat{t} = \frac{t}{t_0} \quad \hat{u}_x = \frac{u_x}{u_0} \quad \hat{x} = \frac{x}{x_0} \quad \text{itd.}$$

Mała wartość liczby Strouhala w danym przepływie oznacza, że niestacjonarne zjawiska w tym przepływie są mało istotne i mogą być pominięte.

## Analiza wymiarowa równania Naviera - Stokesa

Dodatkowo należy wprowadzić przeliczniki skal:

$$\bar{f}' = \alpha_f \bar{f} \quad \mu' = \alpha_\mu \mu \quad p' = \alpha_p p$$

Po podstawieniu do równania N-S otrzymujemy:

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_u}{\alpha_t} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\alpha_\rho \alpha_u^2}{\alpha_l} \rho \left[ u_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right] = \alpha_\rho \alpha_f \rho \bar{f} - \frac{\alpha_p}{\alpha_l} \text{grad} p +$$

$$- \frac{\alpha_\mu \alpha_u}{\alpha_l^2} \text{grad} \left( \frac{2}{3} \mu \text{div} \bar{u} \right) + \frac{\alpha_\mu \alpha_u}{\alpha_l^2} \text{div} (2\mu [D])$$

Równanie to jest identyczne w dwóch różnych skalach 1 i 2 przy spełnieniu następującego warunku:

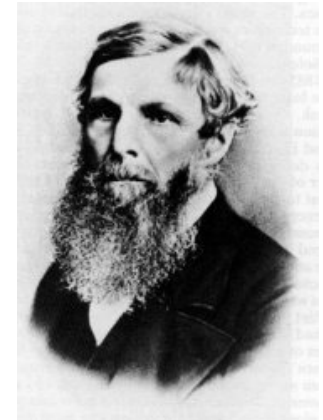
$$\frac{\alpha_\rho \alpha_u}{\alpha_t} = \frac{\alpha_\rho \alpha_u^2}{\alpha_l} = \alpha_\rho \alpha_f = \frac{\alpha_p}{\alpha_l} = \frac{\alpha_\mu \alpha_u}{\alpha_l^2}$$

Po podzieleniu stronami przez drugi wyraz i po wykorzystaniu definicji skal otrzymujemy:

Liczba Strouhala:  $Sh = \frac{l}{tu} = \frac{l'}{t'u'}$

Liczba Froude'a:  $(Fr)^2 = \frac{u^2}{fl} = \frac{u'^2}{f'l'}$

**William Froude**  
1810 - 1879



Liczba Froude'a wyraża stosunek sił bezwładności do sił masowych

Liczba Eulera:  $Eu = \frac{p}{\rho u^2} = \frac{p'}{\rho' u'^2}$

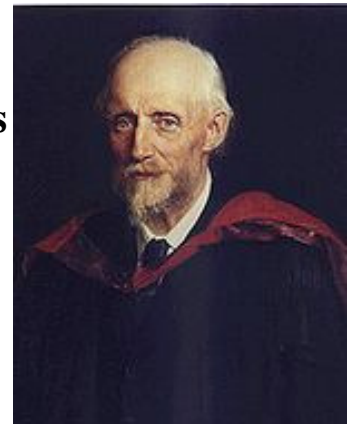
**Leonhard Euler**  
1707 - 1783



Liczba Eulera wyraża stosunek sił ciśnienia do sił bezwładności

Liczba Reynoldsa:  $Re = \frac{\rho u l}{\mu} = \frac{\rho' u' l'}{\mu'}$

**Osborne Reynolds**  
1842 - 1912



Liczba Reynoldsa wyraża stosunek sił bezwładności do sił lepkości

Wykorzystując liczby Strouhala, Froude'a, Eulera i Reynoldsa można napisać równanie Naviera Stokesa w postaci bezwymiarowej:

$$Sh\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho(\bar{u} grad)\bar{u} = \frac{\rho}{(Fr)} \bar{f} - Eu \cdot grad p +$$

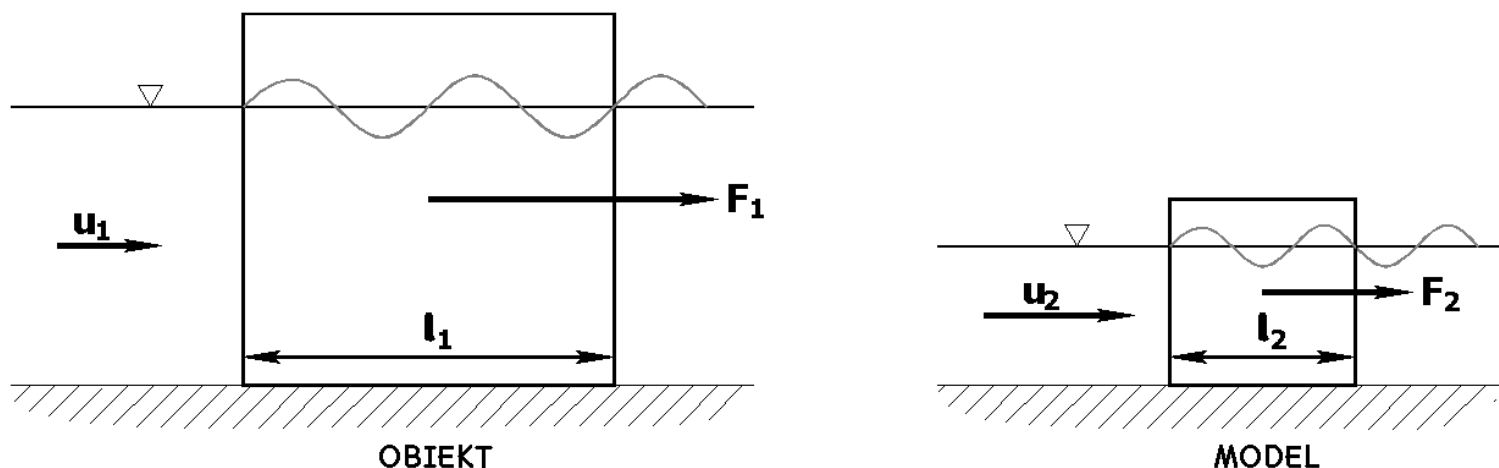
$$-\frac{1}{Re} \left[ grad \left( \frac{2}{3} \mu div \bar{u} \right) - div(2\mu[D]) \right]$$

W równaniu powyższym wszystkie parametry zostały odniesione do wielkości charakterystycznych, podobnie jak w równaniu zachowania masy.

Jeżeli równanie N-S w powyższej postaci zastosujemy do przepływów w dwóch różnych skalach, to uzyskamy pełne podobieństwo zjawisk przy zachowaniu równości wszystkich kryteriów podobieństwa. Nie zawsze jest to możliwe. Przy zachowaniu tylko niektórych kryteriów uzyskujemy tzw. podobieństwo częściowe, a wyniki pomiarów lub obliczeń są obciążone tzw. efektem skali (patrz przykład poniżej).



## Przykład



Rozpatrujemy przypadek podpory mostu (1), która jest badana w laboratorium na modelu (2) w skali zmniejszonej (1:10), w celu określenia wypadkowej siły hydrodynamicznej działającej na podporę. Siła ta składa się z części lepkościowej, zależnej przede wszystkim od liczby Reynoldsa, oraz z części falowej zależnej przede wszystkim od liczby Froude'a. Postulujemy:

$$F = F_w(Fr) + F_v(Re) \quad \text{przy np.:} \quad U_1 = 5,0 \left[ \frac{m}{s} \right] \quad L_1 = 10,0[m]$$

W przypadku pełnego podobieństwa  $Re_1 = Re_2$   $Fr_1 = Fr_2$  można napisać:

$$F_1 = C_{F1} \frac{\rho_1}{2} U_1^2 S_1 \quad \text{gdzie:} \quad C_{F1} = C_{F2} = \frac{F_2}{\frac{\rho}{2} U_2^2 S_2}$$

Zachowanie równości liczb Froude'a prowadzi do:

$$\frac{U_1}{\sqrt{gL_1}} = \frac{U_2}{\sqrt{gL_2}} \rightarrow U_2 = U_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = 0,3162 \cdot U_1 \rightarrow U_2 = 1,581 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Z kolei zachowanie równości liczb Reynoldsa prowadzi do:

$$\frac{U_1 L_1}{\nu} = \frac{U_2 L_2}{\nu} \rightarrow U_1 L_1 = U_2 L_2 \rightarrow U_2 = U_1 \frac{L_1}{L_2} \rightarrow U_2 = 50,0 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Widać wyraźnie, że jednoczesne spełnienie obu kryteriów podobieństwa jest niemożliwe. Łatwiejsze jest spełnienie kryterium Froude'a, gdyż spełnienie kryterium Reynoldsa wymaga zastosowania w laboratorium bardzo wysokiej prędkości. Powoduje to powstanie efektu skali, który powinien być wzięty po uwagę przy przeliczaniu wyników.

Procedura przeliczania wyniku ze skali modelowej na skalę rzeczywistą z uwzględnieniem konsekwencji częściowego podobieństwa, czyli efektu skali.

1. Mierzmy siłę oporu  $F_2$  w skali modelowej

2. Obliczamy współczynnik oporu całkowitego na modelu

$$C_{F_2} = \frac{F_2}{\frac{\rho}{2} U_2^2 S_2}$$

Założmy, że wynosi on np. 0,008

3. Obliczamy liczbę Reynoldsa dla modelu

$$\text{Re}_2 = \frac{L_2 U_2}{\nu_2} = \frac{1,0 \cdot 1,581}{1,16 \cdot 10^{-6}} = 1,36 \cdot 10^6$$

4. Obliczamy współczynnik oporu tarcia dla modelu

$$C_{V_2} = \frac{0,074}{\sqrt[5]{\text{Re}_2}} = \frac{0,074}{\sqrt[5]{1360000}} = 0,00439$$

5. Od współczynnika oporu całkowitego dla modelu odejmujemy współczynnik oporu tarcia dla modelu, uzyskując współczynnik oporu falowego, który skaluje się z liczbą Froude'a, czyli w tym przypadku jest taki sam dla modelu i dla obiektu rzeczywistego

$$C_{W2} = C_{F2} - C_{V2} = 0,008 - 0,00439 = 0,00371 = C_{W1}$$

6. Obliczamy liczbę Reynoldsa dla obiektu rzeczywistego

$$\text{Re}_1 = \frac{L_1 U_1}{\nu_1} = \frac{5,0 \cdot 10,0}{1,16 \cdot 10^{-6}} = 4,31 \cdot 10^7$$

7. Obliczamy współczynnik oporu tarcia dla obiektu rzeczywistego

$$C_{V1} = \frac{0,074}{\sqrt[5]{\text{Re}_1}} = \frac{0,074}{\sqrt[5]{43100000}} = 0,0022$$

8. Obliczamy współczynnik oporu całkowitego dla obiektu rzeczywistego

$$C_{F1} = C_{W1} + C_{V1} = 0,00371 + 0,0022 = 0,00591$$

9. Obliczamy opór całkowity na obiekcie rzeczywistym

$$F_1 = \frac{1}{2} C_{F1} \cdot \rho \cdot U_1^2 \cdot S_1 = 0,5 \cdot 0,00591 \cdot 1000 \cdot 5,0^2 \cdot 100 = 7387,5[N]$$

**Uwaga:** przyjęte pole zwilżone obiektu rzeczywistego  $S_1 = 100[m^2]$  obejmuje obie strony podpory

**Komentarz:** gdybyśmy nie uwzględnili efektu skali i przyjęli, że współczynniki oporu całkowitego są równe dla modelu i obiektu rzeczywistego, to wyznaczona siła oporu na obiekcie rzeczywistym wynosiłaby:

$$F_1 = 0,5 \cdot 0,008 \cdot 1000 \cdot 5,0^2 \cdot 100 = 10000[N]$$

czyli byłaby zawyżona o około 35%

W tym przypadku efekt skali zawiera się w różnicy współczynników oporu tarcia wynikającej z niedotrzymania kryterium podobieństwa Reynoldsa.