J .Szantyr – Wykład nr 17 – Podobieństwo przepływów II

Analiza wymiarowa równania zachowania energii

Postać wyjściowa równania zachowania energii:

$$\rho'\left[\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{u'^2}{2}+c'T'\right)+\left(\overline{u}'\bullet grad\right)\left(\frac{u'^2}{2}+c'T'\right)\right]=\rho'\overline{f}'\bullet\overline{u}'-div\left(p'[E]\overline{u}'\right)+$$

$$-div\left(\frac{2}{3}\mu' div\overline{u}'[E]\overline{u}'-2\mu'[D]'\overline{u}'\right)+div\left(\lambda' gradT'\right)$$

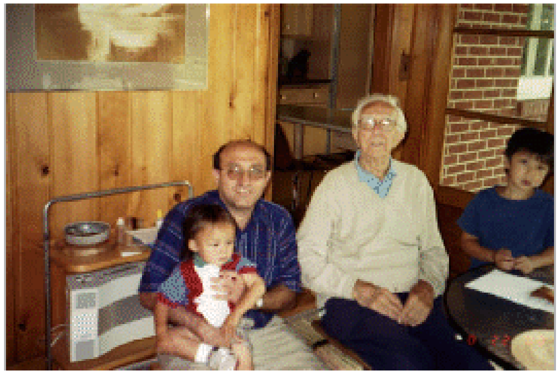
Konieczne jest wprowadzenie dodatkowych współczynników skal:

$$c'=\alpha_c c \qquad T'=\alpha_T T \qquad \lambda'=\alpha_\lambda\lambda$$

Warunek równoważności równania zachowania energii w obu skalach prowadzi do warunku:

$$\frac{\alpha_\rho\alpha_u^2}{\alpha_l}=\frac{\alpha_\rho\alpha_c\alpha_T}{\alpha_t}=\frac{\alpha_\rho\alpha_u^3}{\alpha_l}=\frac{\alpha_\rho\alpha_u\alpha_c\alpha_T}{\alpha_l}=\alpha_\rho\alpha_f\alpha_u=\frac{\alpha_\rho\alpha_u}{\alpha_l}=\frac{\alpha_\mu\alpha_u^2}{\alpha_l^2}=\frac{\alpha_\lambda\alpha_T}{\alpha_l^2}$$

Z powyższego równania wynikają znane już wcześniej liczby Strouhala, Froude'a, Eulera i Reynoldsa oraz dwa nowe kryteria podobieństwa:



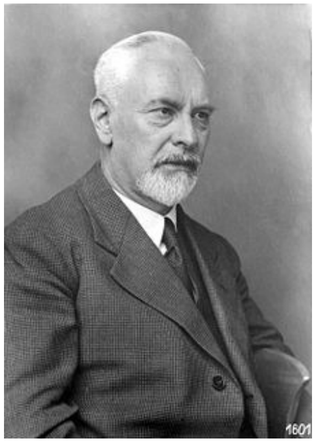
Ernst Eckert 1904 - 2004

Liczba Eckerta: $$Ec = \frac{u^2}{cT} = \frac{u'^2}{c'T'}$$

Liczba Eckerta wyraża stosunek energii kinetycznej makroskopowego ruchu płynu do energii ruchu molekularnego (energii wewnętrznej) płynu.

Liczba Prandtla: $$\Pr = \frac{c\mu}{\lambda} = \frac{c'\mu'}{\lambda'}$$

Ludwig Prandtl
1875 - 1953



Liczba Prandtla wyraża stosunek intensywności transportu pędu płynu do intensywności transportu energii płynu

Liczba Prandtla jest jedyną liczbą kryterialną składającą się <u>tylko ze stałych materiałowych.</u>

Przy wykorzystaniu liczb kryterialnych równanie zachowania energii może być zapisane w postaci bezwymiarowej:

$$Sh\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2}\right)+\frac{Sh}{Ec}\rho\frac{\partial}{\partial t}(cT)+\rho(\overline{u}\bullet grad)\frac{u^2}{2}+\frac{1}{Ec}\rho(\overline{u}\bullet grad)(cT)=$$

$$=\frac{1}{Fr}\rho\bar{f}\bullet\overline{u}-Eu\cdot div(\rho[E]\overline{u})-\frac{1}{\mathrm{Re}}div\left(\frac{2}{3}\mu div\overline{u}[E]\overline{u}-2\mu[D]\overline{u}+\right)$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Re}\cdot Ec}div(\lambda gradT)$$

Wszystkie parametry przepływu występujące w powyższym równaniu są odniesione do wartości charakterystycznych tych parametrów.

Analiza wymiarowa równania bilansu entropii

Postać wyjściowa równania bilansu entropii:

$$\rho'\left[\frac{\partial e'}{\partial t'}+\vec{u}'\bullet grade'\right]=T'\dot{s}'_m+\frac{p'}{\rho'}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t'}+\vec{u}'\bullet grad\rho'\right)+\lambda'\Delta T$$

Równanie bilansu entropii nie wymaga wprowadzenia dodatkowych skal. Wykorzystanie skal już wprowadzonych daje następujący warunek identyczności równań zapisanych w dwóch różnych skalach:

$$\frac{\alpha_\rho\alpha_c\alpha_T}{\alpha_t}=\frac{\alpha_\rho\alpha_u\alpha_c\alpha_T}{\alpha_l}=\frac{\alpha_\mu\alpha_u^2}{\alpha_l^2}=\frac{\alpha_p}{\alpha_t}=\frac{\alpha_p\alpha_u}{\alpha_l}=\frac{\alpha_\lambda\alpha_T}{\alpha_l^2}$$

Z warunku tego nie wynikają żadne nowe liczby kryterialne. Równanie bilansu entropii może być przedstawione w postaci bezwymiarowej przy użyciu dotąd wyprowadzonych liczb kryterialnych.

Bezwymiarowa postać równania bilansu entropii:

$$Sh \cdot \rho \frac{\partial}{\partial t}(cT) + \rho(\overline{u} \bullet grad)(cT) = \frac{Ec}{\mathrm{Re}} T\dot{s}_m + Eu \cdot Sh \cdot Ec \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} +$$

$$+ Eu \cdot Ec \frac{p}{\rho}(\overline{u} \bullet grad)\rho + \frac{1}{\mathrm{Pr} \cdot \mathrm{Re}} \lambda \Delta T$$

Podsumowanie

Bezwymiarowa postać równań mechaniki płynów pozwala na łatwą ocenę <u>względnej ważności</u> poszczególnych członów równania w opisie konkretnego przepływu. Mała wartość współczynnika złożonego z liczb kryterialnych może być podstawą do wprowadzenia uproszczenia polegającego na usunięciu danego członu równania. Należy jednak uważać, aby przez takie uproszczenie nie zmieniać rzędu równania. Np. odrzucenie członów lepkościowych w równaniu zachowania energii obniża rząd równania, co uniemożliwi spełnienie warunków brzegowych.

Rozwiązanie układu równań mechaniki płynów w postaci bezwymiarowej ma ogólną postać:

$$F\left(Sh, Fr, Eu, \mathrm{Re}, Ec, \mathrm{Pr}\right) = 0$$

Jeżeli wszystkie liczby kryterialne zawarte w powyższym wzorze mają te same wartości w przepływach o różnych skalach, to znaczy że przepływy te są podobne.