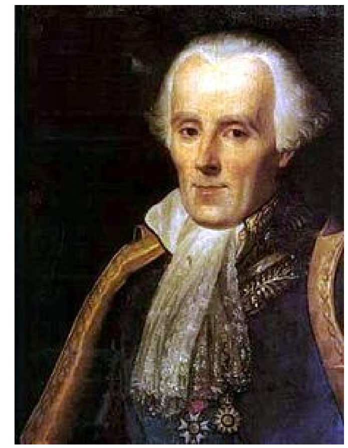
J. Szantyr – Wykład nr 23 – Przepływy potencjalne 1

Jeżeli przepływ płynu jest bezwirowy, czyli wszędzie lub prawie wszędzie w polu przepływu jest $rot\overline{u} = 0$ to oznacza, że istnieje funkcja skalarna $\varphi(x, y, z, t)$, taka że $\overline{u} = grad\varphi$. Przepływ taki nazywamy przepływem potencjalnym, a funkcję φ nazywamy potencjałem prędkości.

Mamy: $u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

W przypadku przepływu potencjalnego płynu nieściśliwego równanie zachowania masy przekształca się w równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\overline{u}) = 0 \rightarrow divgrad\varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$



Pierre Laplace
1749 - 1827

Równanie Laplace'a jest liniowe, co oznacza, że suma jego rozwiązań jest również rozwiązaniem. W praktyce więc można składać bardzo skomplikowane funkcje potencjału, opisujące złożone przepływy, z funkcji opisujących tzw. przepływy elementarne.

Przepływy potencjalne szczególnie dobrze nadają się do modelowania matematycznego ruchu płynu w obszarach poza warstwami przyściennymi i śladami, gdzie wpływ lepkości płynu na obraz przepływu jest pomijalnie mały. Sposób tworzenia złożonych przepływów potencjalnych zostanie pokazany na przykładzie <u>przepływów płaskich (czyli dwuwymiarowych).</u>

W tym przypadku mamy: $u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ $\quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

gdzie:

$\varphi(x, y)$ - potencjał prędkości

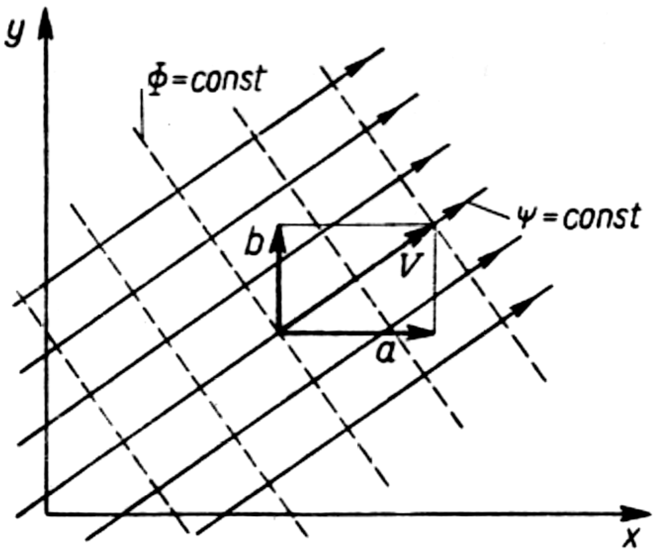
$\varphi(x, y) = C$ - linie ekwipotencjalne

$\psi(x, y)$ - funkcja prądu

$\psi(x, y) = C$ - linie prądu

Elementarne przepływy potencjalne

1. Przepływ jednorodny



$$u_x = a = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad u_y = b = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Potencjał prędkości:

$$\varphi(x, y) = a \cdot x + b \cdot y = u_x \cdot x + u_y \cdot y$$

Linie ekwipotencjalne:

$$y = -\frac{a}{b} x + C = -\frac{u_x}{u_y} x + C$$

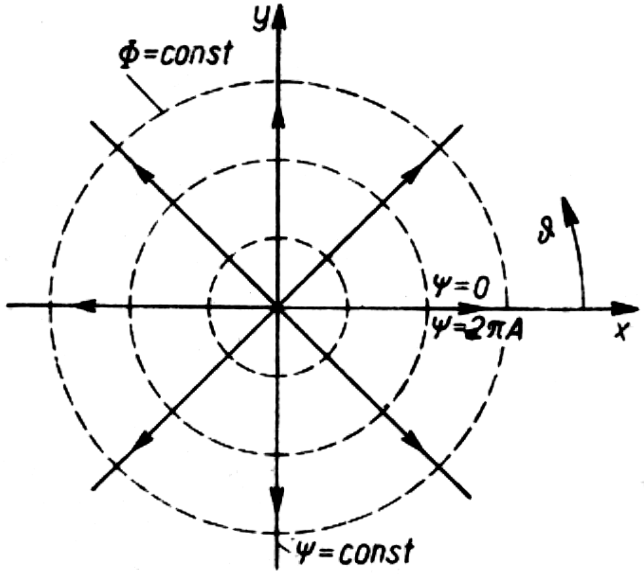
Funkcja prądu:

$$\psi(x, y) = a \cdot y - b \cdot x = u_x \cdot y - u_y \cdot x$$

Linie prądu:

$$y = \frac{b}{a} x + C = \frac{u_y}{u_x} x + C$$

2. Źródło (dodatnie lub ujemne)



Źródło jest punktem osobliwym w polu przepływu, w którym następuje wypływ płynu o określonym natężeniu objętościowym Q. Wypływ ten odbywa się jednakowo we wszystkich kierunkach. W przypadku źródła ujemnego (czyli ujścia), płyn dopływa do źródła i w nim „znika”. Mamy więc:

$Q = \pm 2\pi r u_r$ lub: $u_r = \pm \dfrac{Q}{2\pi r}$ gdzie: u_r - prędkość promieniowa

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \pm \frac{Q}{2\pi r} \rightarrow \varphi = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln r$$

Stałe wartości potencjału φ występują dla stałych wartości promienia r, czyli linie ekwipotencjalne są współśrodkowymi okręgami.

W układzie współrzędnych prostokątnych mamy:

$$u_x = u_r \cos\theta = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)} \qquad u_y = u_r \sin\theta = \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}$$

gdzie: $\theta = arctg\,\frac{y}{x}$

i dalej mamy:

różniczka zupełna potencjału:

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi}\frac{xdx}{\left(x^2+y^2\right)} + \frac{Q}{2\pi}\frac{ydy}{\left(x^2+y^2\right)}$$

różniczka zupełna funkcji prądu:

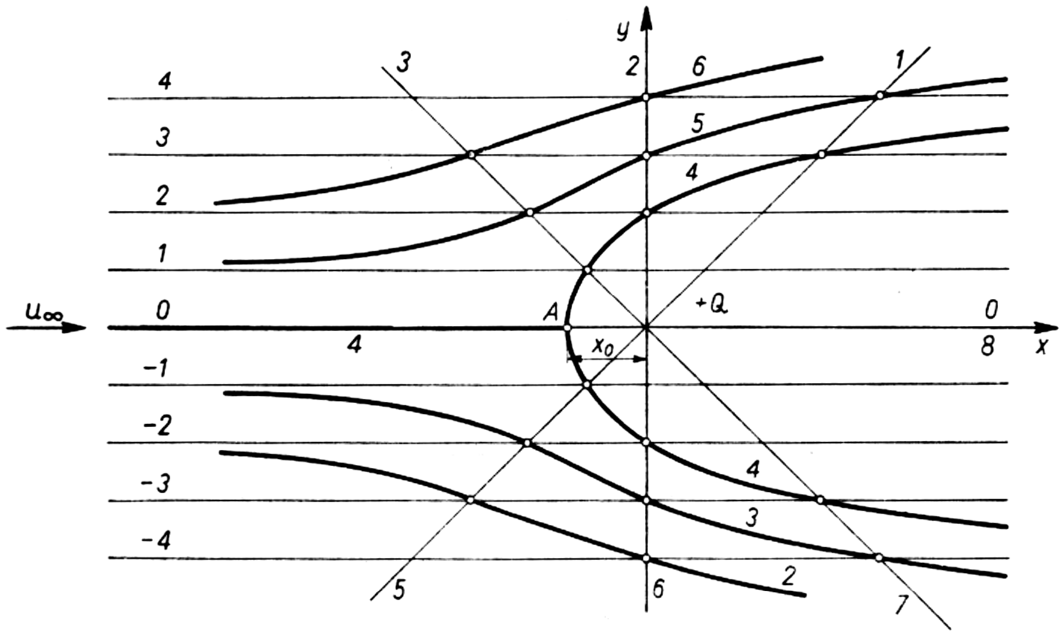
$$d\psi = \frac{Q}{2\pi}\frac{ydx}{\left(x^2+y^2\right)} - \frac{Q}{2\pi}\frac{xdy}{\left(x^2+y^2\right)}$$

i dalej, po scałkowaniu mamy:

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{Q}{2\pi}\ln\left(x^2+y^2\right) \qquad \psi = \frac{Q}{2\pi} arctg\,\frac{y}{x}$$

Linie prądu są półprostymi wychodzącymi ze źródła

Przykład: Superpozycja przepływu jednorodnego i źródła



Potencjał i funkcja prądu przepływu wypadkowego są sumami potencjałów składowych i składowych funkcji prądu. Zakładamy, że przepływ jednorodny jest równoległy do osi x.

Potencjał: $$\varphi = u_\infty x + \frac{Q}{4\pi}\ln\left(x^2 + y^2\right)$$

Funkcja prądu: $$\psi = u_\infty y + \frac{Q}{2\pi} arctg\,\frac{y}{x}$$

Zerowa linia prądu: $$\psi = 0 \rightarrow u_\infty y + \frac{Q}{2\pi} arctg\,\frac{y}{x} = 0$$

Rozwiązanie dla zerowej linii prądu: $x = -y\,ctg\left(\frac{2\pi u_\infty}{Q}\right)$

Jeżeli na miejsce zerowej linii prądu wprowadzimy sztywną ścianę, to obraz przepływu nie ulegnie zmianie i otrzymamy opływ „półciała”.

Składowe prędkości:

$$u_x = u_\infty + \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)} \qquad\qquad u_y = \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{\left(x^2 + y^2\right)}$$

Położenie punktu spiętrzenia na osi x: $x_0 = -\frac{Q}{2\pi u_\infty}$

Ciśnienie p w dowolnym punkcie przepływu możemy obliczyć z równania Bernoulliego:

$$p_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2} = p + \frac{\rho u^2}{2} \rightarrow C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = 1 - \left(\frac{u}{u_\infty}\right)^2$$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$C_p = -\frac{Q}{\pi u_\infty}\frac{1}{\left(x^2 + y^2\right)}\left(x + \frac{Q}{4\pi u_\infty}\right)$$

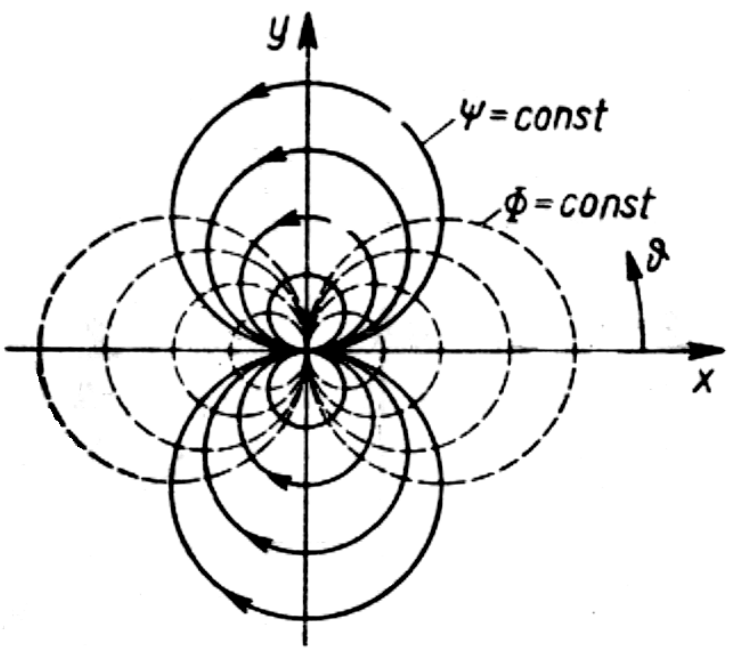
W punkcie spiętrzenia otrzymujemy:

$$C_p = -\frac{Q}{\pi u_\infty}\left(-\frac{2\pi u_\infty}{Q} + \frac{\pi u_\infty}{Q}\right) = 1$$

Natomiast na zerowej linii prądu w punkcie x=0 mamy:

$$u_x = u_\infty \qquad u_y = \pm\frac{2u_\infty}{\pi} \qquad \text{czyli:} \quad u = \sqrt{u_\infty^2 + \frac{4u_\infty^2}{\pi^2}} \approx 1{,}184 u_\infty$$

3. Źródło podwójne (dipol) Dipol jest efektem nałożenia źródła dodatniego i ujemnego o takim samym module natężenia wypływu. Miarą natężenia dipola jest tzw. moment dipola $M=2aQ$. <u>W odróżnieniu od źródła dipol ma własności kierunkowe, gdyż „wyrzuca" płyn w określonym kierunku i „wsysa" go z przeciwnej strony. Istotna jest więc orientacja dipola w przestrzeni.</u>



Dla dipola w $x=0$, $y=0$ skierowanego w dodatnim kierunku osi x mamy:

Potencjał dipola:

$$\varphi = -\frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

Funkcja prądu dipola:

$$\psi = \frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

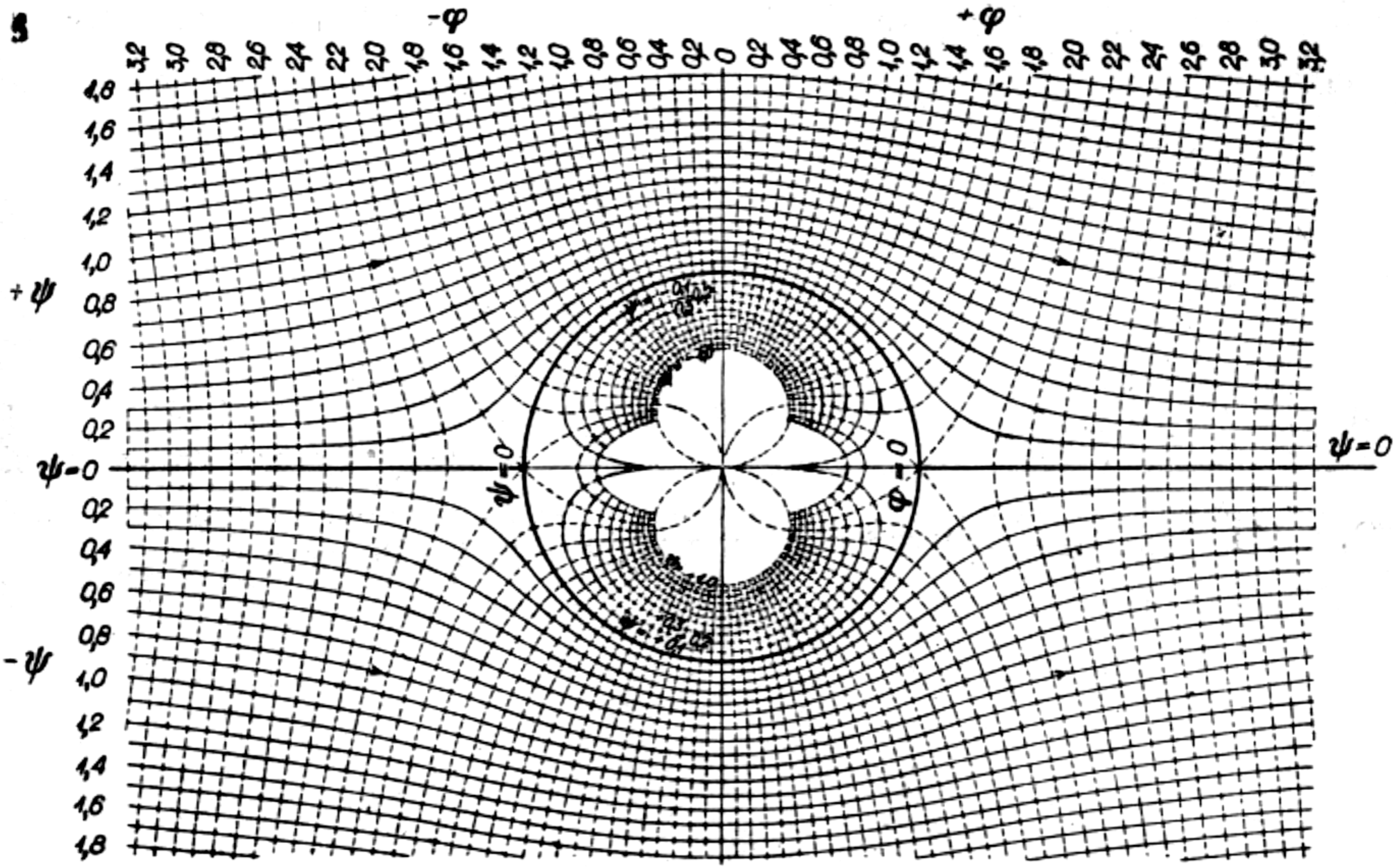
Linie prądu dla dipola: $$\frac{y}{x^2+y^2}=C \to x^2+\left(y-\frac{C}{2}\right)^2=\frac{C^2}{4}$$

Linie prądu są okręgami o promieniach *C/2*, których środki leżą na osi *y* w punktach *y=C/2*.

Linie ekwipotencjalne dla dipola: $$\frac{x}{x^2+y^2}=C \to \left(x-\frac{C}{2}\right)^2+y^2=\frac{C^2}{4}$$

Linie ekwipotencjalne są okręgami o promieniach *C/2*, których środki leżą na osi *x* w punktach *x=C/2*.

Przykład: opływ bezwirowy (bezcyrkulacyjny) walca kołowego



Superpozycja: przepływ jednorodny + dipol

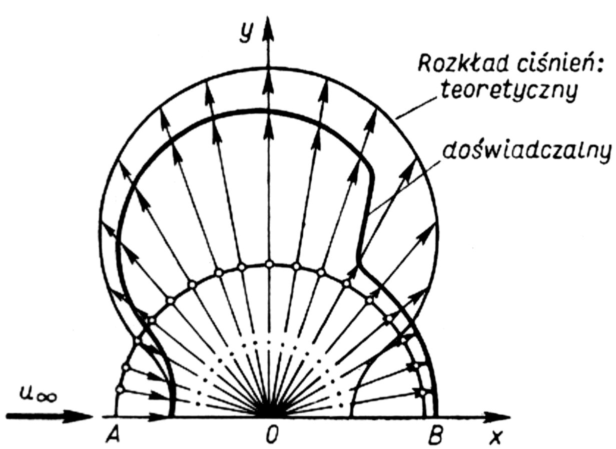
W układzie $Or\theta$ mamy: $M = 2\pi a^2 u_\infty$ gdzie: a – promień walca

$$u = u_\infty \sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^4 - 2\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos 2\theta}$$ gdzie: $\theta = arctg\,\frac{y}{x}$

$$p = p_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2}\left(1 - \frac{u^2}{u_\infty^2}\right)$$ dla r=a czyli na powierzchni walca mamy:

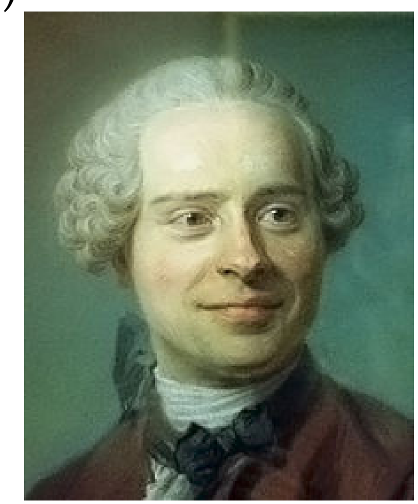
$$p_\theta = p_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2}\left(1 - 4\sin^2\theta\right)$$

Można obliczyć składowe siły działającej na walec:



$$P_x = -a\int_0^{2\pi} p_\theta \cos\theta d\theta = 0$$

$$P_y = -a\int_0^{2\pi} p_\theta \sin\theta d\theta = 0$$



Jean d'Alembert
1717 - 1783

Jest to tzw. paradoks d'Alemberta

Paradoks d'Alemberta mówi, że w przepływie potencjalnym siły oddziaływania płynącego płynu na ciała w nim zanurzone są równe zero, co jest sprzeczne z potocznym doświadczeniem. Jest to bezpośrednią konsekwencją symetrii wyznaczonego pola ciśnienia, które jest symetryczne zarówno względem osi *x* jak i osi *y*. W rzeczywistości pole ciśnienia wytworzone na walcu jest asymetryczne względem osi y, co pokazuje rysunek na poprzednim slajdzie oraz poniższe porównanie opływu wyznaczonego teoretycznie i zwizualizowanego eksperymentalnie. Różnice te widoczne są przede wszystkim po stronie spływowej.