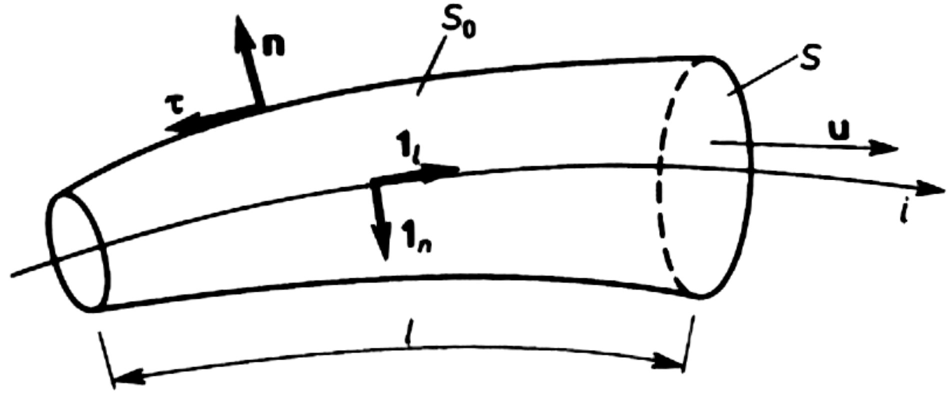
J. Szantyr – Wykład nr 25 – Przepływy w przewodach zamkniętych I

Przewód zamknięty – kanał o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, ograniczonym linią zamkniętą, całkowicie wypełniony płynem (bez swobodnej powierzchni)



Do opisu ruchu płynu w kanałach zamkniętych stosuje się uproszczony model przepływu jednowymiarowego. Zakłada się, że oś kanału jest „prawie” prosta, a przepływ przez przekrój S odbywa się z prędkością „reprezentatywną”, czyli jakąś prędkością średnią $\tilde{u}$

Najprostszy przypadek: przewód o stałym przekroju kołowym ułożony poziomo. Przepływ stacjonarny płynu nieściśliwego.

Równanie zachowania masy (*m*-masowe natężenie przepływu):

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\rho \tilde{u} S\right) = 0 \rightarrow \rho \tilde{u} S = m = const \rightarrow \tilde{u} = \frac{m}{\rho S} = const$$

Równanie zachowania pędu: $\frac{D}{Dt}\left(\tilde{\rho}\tilde{u} S\right) = \tilde{\rho}\tilde{f} S - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial l} S - p_\tau C$

gdzie C – obwód przekroju S

p_τ - lepkościowe naprężenia styczne

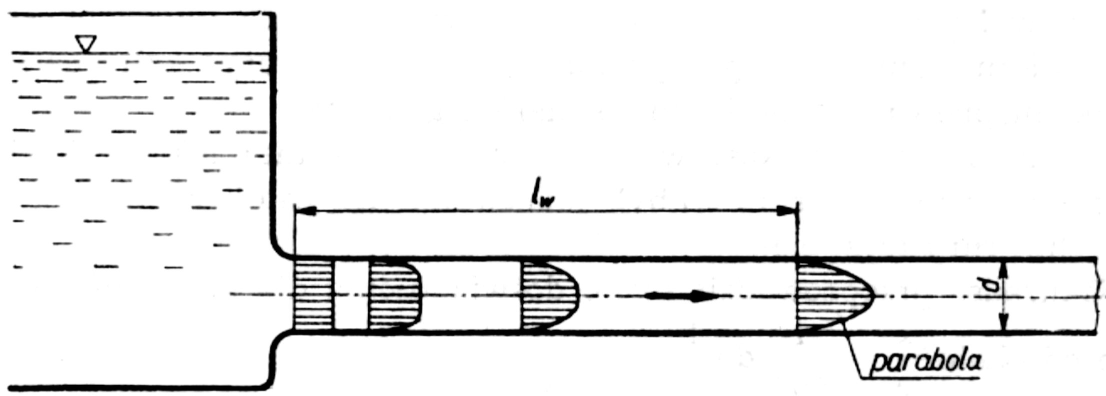
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial l} S - p_\tau C \rightarrow \frac{\partial p}{\partial l} = -p_\tau \frac{C}{S} \rightarrow \int_1^2 dp = -\int_1^2 p_\tau \frac{C}{S} dl$$

Przy stałych naprężeniach wzdłuż kanału o przekroju kołowym mamy:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = p_\tau \frac{4l}{d}$$

Na skutek działania sił lepkości wzdłuż kanału występuje spadek ciśnienia wprost proporcjonalny do l i p_τ oraz odwrotnie proporcjonalny do d.

W przypadku w pełni rozwiniętego przepływu laminarnego, czyli po odcinku początkowym $l_w \approx 0{,}03 \cdot \mathrm{Re} \cdot d$ można uzyskać analityczne rozwiązanie równania Naviera-Stokesa, które prowadzi do wzorów:

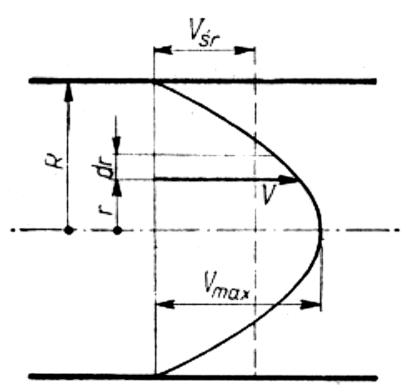


prędkość lokalna:

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu l}\left(r_0^2 - r^2\right)$$

prędkość średnia:

$$\tilde{u} = \frac{\Delta p \cdot r_0^2}{8\mu l}$$



Wzór na prędkość średnią można przekształcić do wzoru Darcy-Weisbacha:

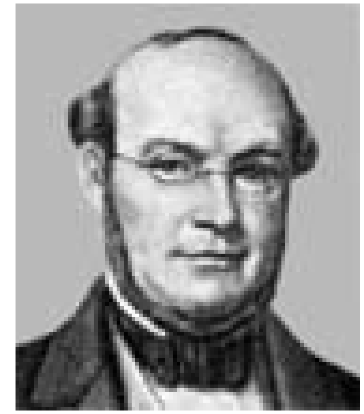
$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho \tilde{u}^2}{2}$$

gdzie λ – współczynnik oporu, lub **współczynnik strat liniowych**

W przepływie laminarnym: $\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$

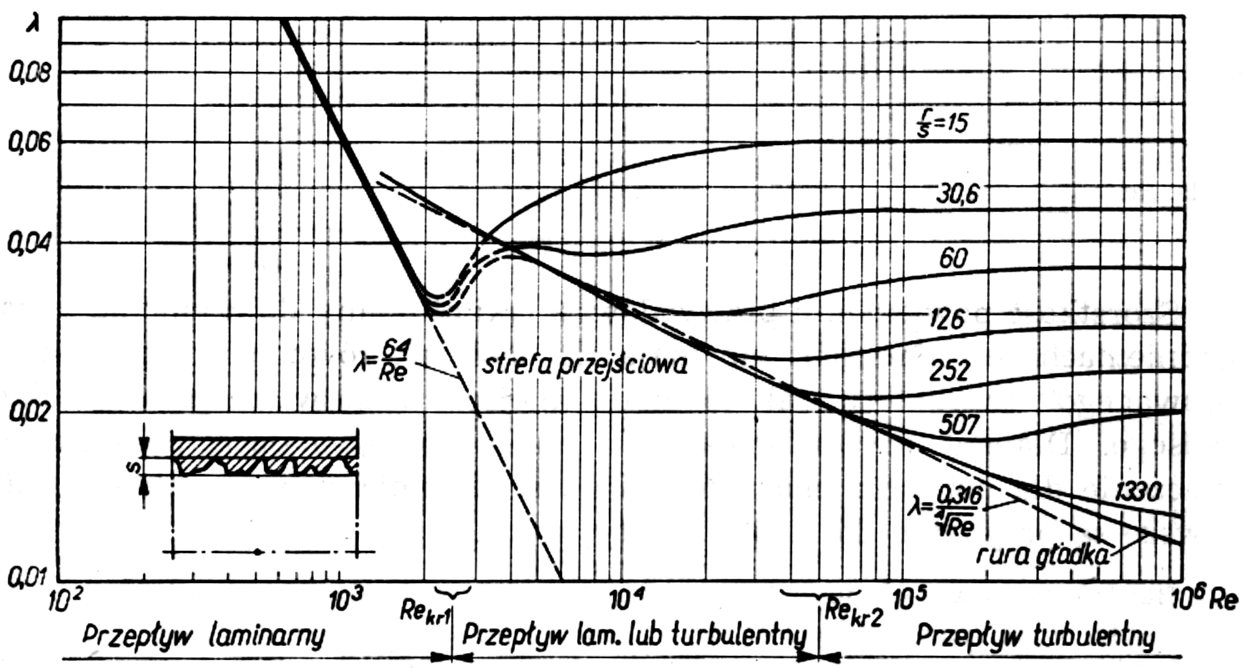
W przepływie turbulentnym przez rury hydrodynamicznie gładkie: $\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$

Henri Darcy
1803 - 1858

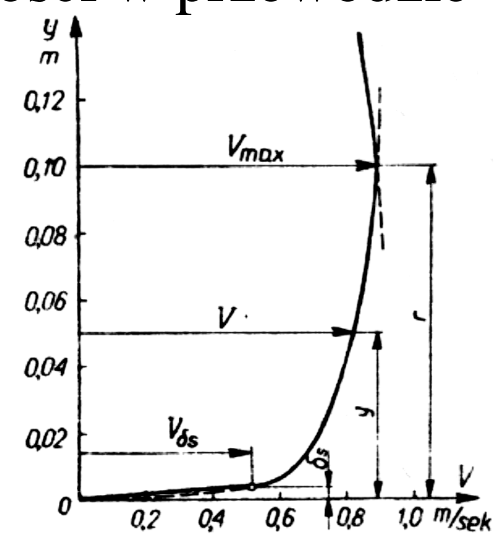


Julius Weisbach
1806 - 1871

W ogólnym przypadku należy uwzględnić wpływ chropowatości ścian: $\lambda = \lambda\left(\mathrm{Re}, \frac{r_0}{k}\right)$



Turbulentny profil prędkości w przewodzie



Przypadek trudniejszy: przewód nachylony pod kątem α

Jeżeli założymy przepływ stacjonarny, to równanie zachowania pędu przyjmie postać:

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial l} = f_l - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} - \frac{p_\tau}{\rho}\frac{C}{S} \rightarrow \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = -\frac{p_\tau}{\rho}\frac{C}{S}$$

gdzie podstawiono składową siły masowej wzdłuż l:

$$f_l = g\sin\alpha = -g\frac{dz}{dl}$$

Po scałkowaniu pomiędzy dwoma przekrojami kanału otrzymujemy **równanie Bernoulliego dla rzeczywistego przepływu ze stratami:**

$$\left(\frac{\tilde{u}_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1\right) - \left(\frac{\tilde{u}_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2\right) = \int_1^2 \frac{p_\tau}{\rho}\frac{C}{S}dl$$

albo:

$$\frac{\tilde{u}_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\tilde{u}_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_s = H = const$$

gdzie h_s - wysokość strat

Daniel Bernoulli
1707 - 1783

Wysokość strat możemy podzielić na dwa składniki:

-wysokość strat liniowych związanych z tarciem płynu o ścianki przewodu prostoliniowego o stałym przekroju,

-wysokość strat lokalnych związanych z obecnością zaworów, kolan, zwężeń, rozgałęzień i innych elementów.

Wysokość strat liniowych wyraża się wzorem: $$h_s = \frac{\tilde{u}^2}{2g}\lambda\frac{l}{d}$$

Wysokość strat lokalnych wyraża się wzorem: $$h_s = \varsigma\frac{\tilde{u}_1^2}{2g} = \varsigma'\frac{\tilde{u}_2^2}{2g}$$

Gdzie ζ jest współczynnikiem strat lokalnych, który może być określony w odniesieniu do prędkości przed elementem lub prędkości za elementem. Współczynniki ζ są określane eksperymentalnie i można je znaleźć w odpowiednich tablicach. Poniżej podano kilka przykładowych wartości współczynników strat lokalnych.

Współczynniki strat lokalnych

Rodzaj straty lokalnej	Współczynnik straty
Wlot ze zbiornika	$\varsigma' = 0,5$
Załamanie przewodu o φ	$\varsigma = 0,946\sin^2\varphi/2 + 2,05\sin^4\varphi/2$
Zwiększenie przekroju	$\varsigma = (1 - A_1/A_2)^2$ $\varsigma' = (A_2/A_1 - 1)^2$
Kurek otwarcie 5 stopni	$\varsigma = 0,05$
Kurek otwarcie 45 stopni	$\varsigma = 31,2$
Wlot ssania pompy	$\varsigma = 10,0$

W przypadku gdy przepływ odbywa się w przewodach o znacznej średnicy, równanie Bernoulliego powinno być jeszcze uzupełnione o współczynnik Coriolisa (lub de Saint-Venanta) α

$$\frac{\alpha_1 \cdot \tilde{u}_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\alpha_2 \cdot \tilde{u}_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_s = H = const$$

Wynika to z faktu, że energia strumienia niejednorodnego różni się od energii obliczonej według średniej prędkości wydatkowej dla tego strumienia. Wobec tego mamy:

Gaspard Coriolis
1792 - 1843

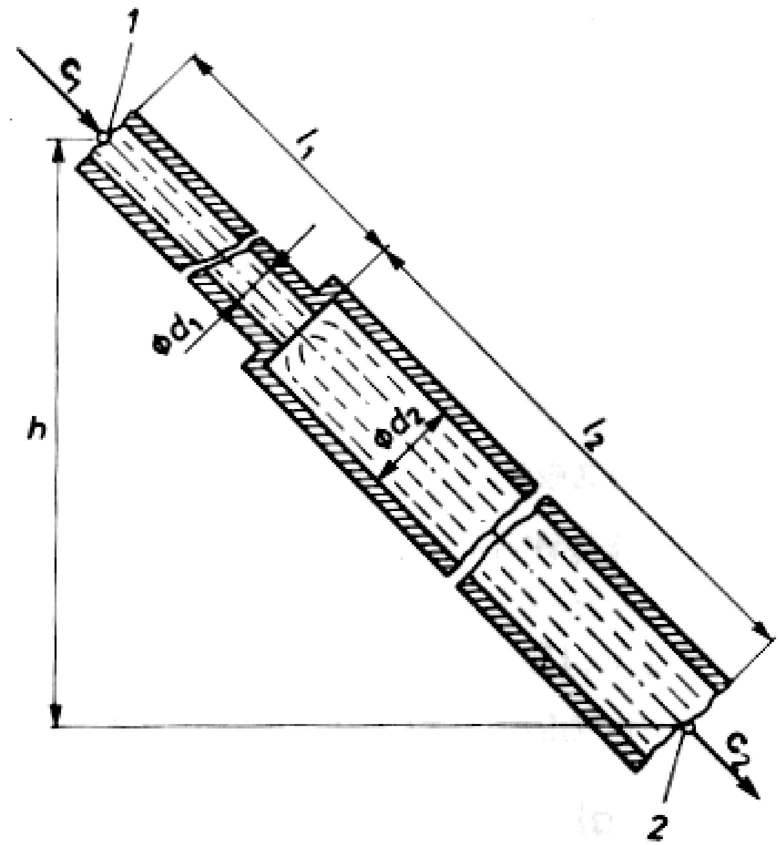
$$\alpha = \frac{\int_A u^3 dA}{\tilde{u}^3 \cdot A}$$

Współczynnik α jest tym większy im bardziej niejednorodne jest pole prędkości przepływu.

Adhemar de Saint Venant
1797 - 1886

Przykład 1: przewodem o zmiennym przekroju przepływa w ciągu godziny 19600 kg paliwa o gęstości ρ=930 kg/m3 i współczynniku lepkości kinematycznej ν=0,000061 m**2/s. Obliczyć spadek ciśnienia w przewodzie jeżeli wymiary wynoszą:**

$$l_1 = 5[m], d_1 = 50[mm], l_2 = 10[m], d_2 = 100[mm], h = 5[m]$$



Rozwiązanie

Objętościowe natężenie przepływu: $Q = \frac{19600}{930 \cdot 3600} = 0{,}00585\left[m^3/s\right]$

Prędkość średnia w części 1: $c_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}00585}{3{,}14 \cdot 0{,}05^2} = 2{,}98\left[m/s\right]$

Prędkość średnia w części 2: $c_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}00585}{3{,}14 \cdot 0{,}1^2} = 0{,}745\left[m/s\right]$

Liczba Reynoldsa w części 1: $\mathrm{Re}_1 = \frac{c_1 d_1}{\nu} = \frac{2{,}98 \cdot 0{,}05}{0{,}000061} = 2443$

Liczba Reynoldsa w części 2: $\mathrm{Re}_2 = \frac{c_2 d_2}{\nu} = \frac{0{,}745 \cdot 0{,}1}{0{,}000061} = 1221$

Współczynnik strat liniowych w części 1:

$$\lambda_1 = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}_1}} = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{2443}} = 0{,}045$$

Współczynnik strat liniowych w części 2: $\lambda_2 = \frac{64}{\mathrm{Re}_2} = \frac{64}{1221} = 0{,}052$

Spadek wysokości ciśnienia wywołany stratami liniowymi wynosi:

$$h_\lambda = \frac{c_1^2}{2g}\lambda_1\frac{l_1}{d_1} + \frac{c_2^2}{2g}\lambda_2\frac{l_2}{d_2} = \frac{2{,}98^2}{2\cdot 9{,}81}0{,}045\frac{5}{0{,}05} + \frac{0{,}745^2}{2\cdot 9{,}81}0{,}052\frac{10}{0{,}1} = 2{,}183[m]$$

Spadek wysokości ciśnienia wywołany stratami w rozszerzeniu przekroju:

$$h_\varsigma = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} = \frac{(2{,}98 - 0{,}745)^2}{2\cdot 9{,}81} = 0{,}255[m]$$

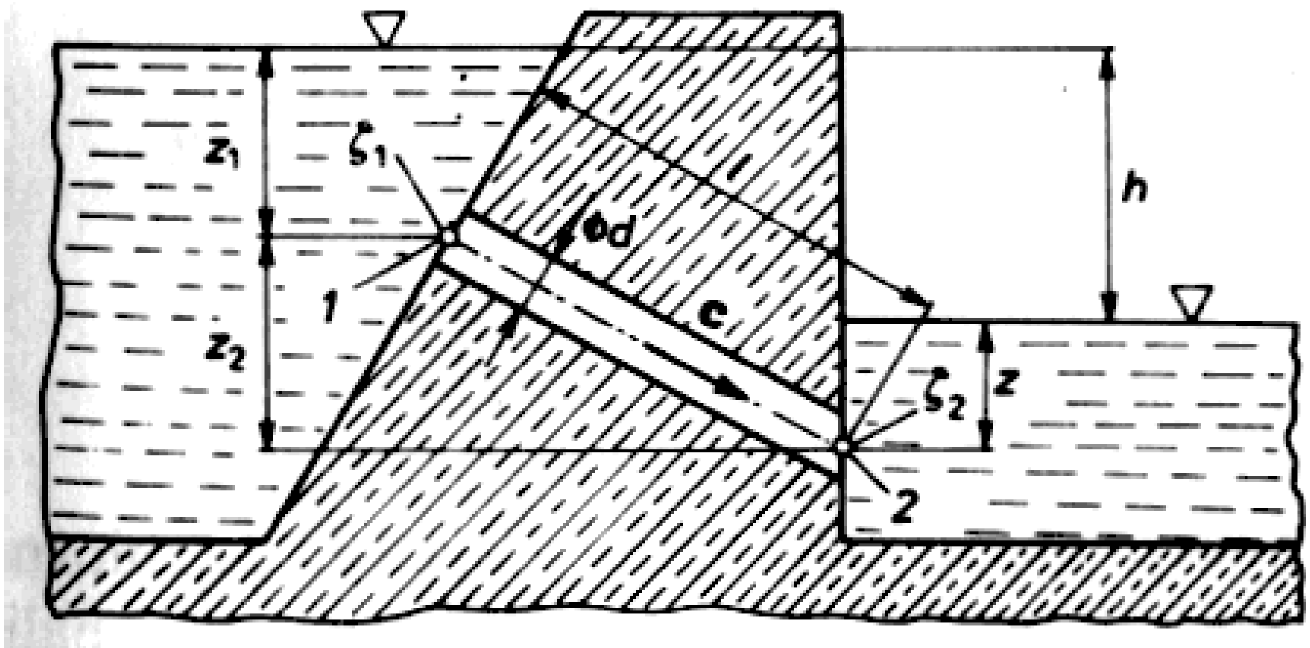
Całkowita strata wysokości ciśnienia wynosi:

$$h_s = h_\lambda + h_\varsigma = 2{,}183 + 0{,}255 = 2{,}438[m]$$

Spadek ciśnienia w przewodzie:

$$\Delta p = \rho g\left[\frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} + h_s - h\right] = 27245[Pa] \approx 0{,}272[MPa]$$

Przykład 2: Syfon o średnicy *d* i długości *l* łączy dwa zbiorniki, w których powierzchnie cieczy są oddalone o wysokość h. Określić objętościowe natężenie przepływu wody przez syfon znając współczynnik strat liniowych λ oraz współczynniki strat lokalnych na dopływie i na wypływie.



Rozwiązanie

Równanie Bernoulliego dla przekrojów 1 i 2:

$$\frac{c_1^2}{2g} + z_1 + z_2 = \frac{c_2^2}{2g} + z + \sum h_s$$

Dla przepływu ustalonego mamy: $c_1 = c_2 = c$

Co prowadzi do: $z_1 + z_2 - z = \sum h_s$

Ponieważ: $z_1 + z_2 - z = h$ oraz $\sum h_s = \frac{c^2}{2g}\left(\lambda \frac{l}{d} + \varsigma_1 + \varsigma_2\right)$

Otrzymujemy:

$$h = \frac{c^2}{2g}\left(\lambda \frac{l}{d} + \varsigma_1 + \varsigma_2\right)$$

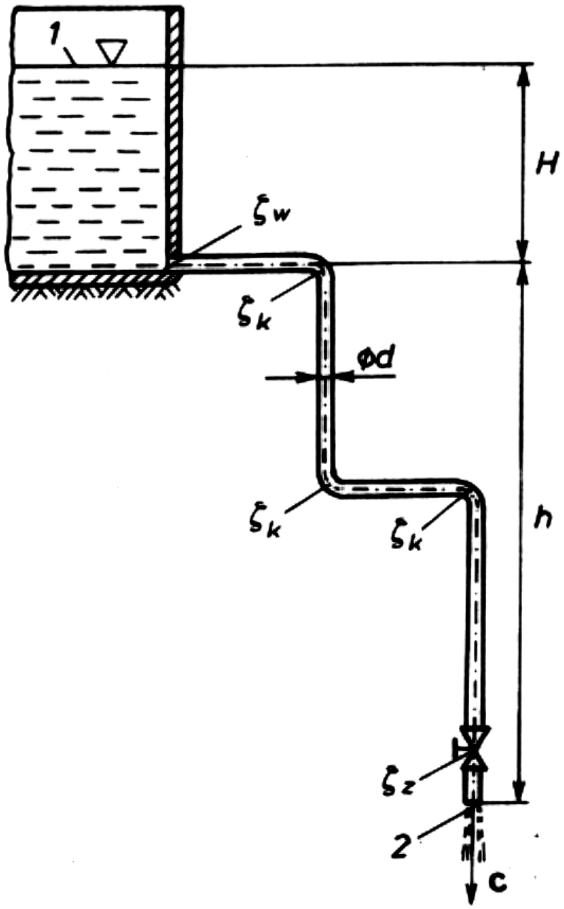
Z tego wyznaczamy średnią prędkość przepływu:

$$c = \sqrt{\frac{2gh}{\lambda \frac{l}{d} + \varsigma_1 + \varsigma_2}}$$

Następnie obliczamy objętościowe natężenie przepływu przez syfon:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gh}{\lambda \frac{l}{d} + \varsigma_1 + \varsigma_2}}$$

Przykład 3



Z otwartego zbiornika wypływa woda przez przewód o długości l=200 [m] i średnicy d=100 [mm]. Jaka powinna być wysokość H poziomu wody w zbiorniku aby objętościowe natężenie wypływu z wylotu rurociągu wynosiło Q=40 [l/s]?

Dane: h=2 [m] $\upsilon = 1 \cdot 10^{-6} \left[m^2/s \right]$

$\varsigma_w = 0{,}5$ wlot ze zbiornika

$\varsigma_k = 0{,}2$ kolano

$\varsigma_z = 5{,}0$ zawór wylotowy

Rozwiązanie

Prędkość średnia wypływu z rurociągu wynosi:

$$\tilde{c} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}04}{3{,}14 \cdot (0{,}1)^2} = 5{,}1[m/s]$$

Liczba Reynoldsa wynosi:

$$\mathrm{Re} = \frac{\tilde{c}\, d}{\upsilon} = \frac{5{,}1 \cdot 0{,}1}{1 \cdot 10^{-6}} = 510000$$

Przepływ w rurociągu jest turbulentny, czyli współczynnik tarcia wynosi:

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}} = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{510000}} = 0{,}012$$

Wysokość H określamy z równania Bernoulliego:

$$\frac{\tilde{c}_1^{\,2}}{2g} + \frac{p_b}{\rho g} + h + H = \frac{\tilde{c}_2^{\,2}}{2g} + \frac{p_b}{\rho g} + \sum h_s$$

gdzie: $c_1 = 0$ $\qquad c_2 = \tilde{c}$

Łączna wysokość strat wynosi:

$$\sum h_s = \frac{\tilde{c}^2}{2g}\left(\varsigma_w + 3\cdot\varsigma_k + \varsigma_z + \lambda\frac{l}{d}\right)$$

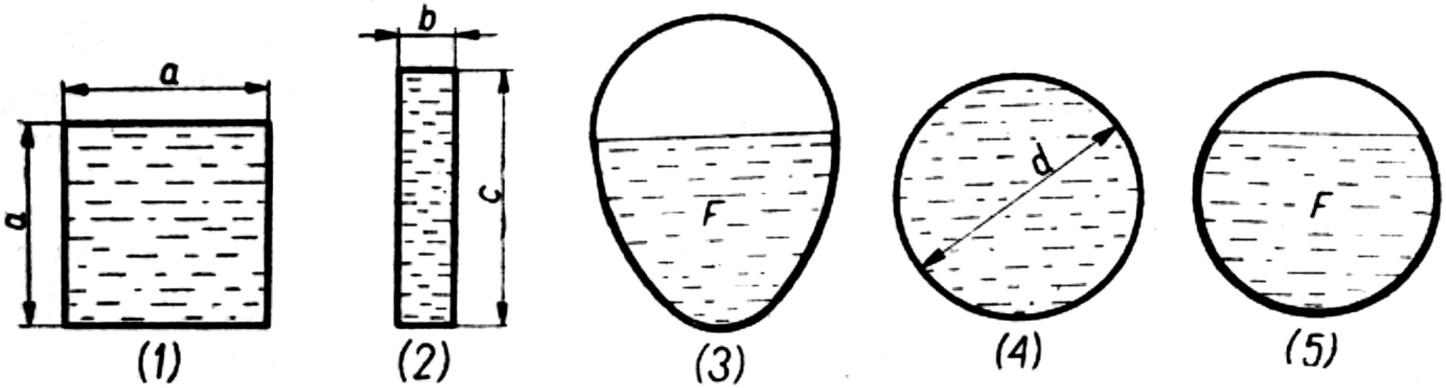
Czyli niezbędny poziom wody *H* w zbiorniku wynosi:

$$H = \frac{\tilde{c}^2}{2g}\left(1 + \varsigma_w + 3\cdot\varsigma_k + \varsigma_w + \lambda\frac{l}{d}\right) - h$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

$$H = \frac{(5{,}1)^2}{2\cdot 9{,}81}\left(1 + 0{,}5 + 3\cdot 0{,}2 + 5 + 0{,}012\frac{200}{0{,}1}\right) - 2 = 39{,}2[m]$$

Przypadek przewodów o przekroju niekołowym lub częściowo wypełnionych



W przypadku przewodów o przekroju innym niż kołowy oraz w przypadku przewodów częściowo wypełnionych płynem istotnym parametrem jest promień hydrauliczny, czyli stosunek pola przekroju strumienia płynu do obwodu zwilżonego:

$$r_h = \frac{F}{L_z}$$

W takich przypadkach liczbę Reynoldsa obliczamy według wzoru:

$$\mathrm{Re} = \frac{u \cdot 4 r_h}{\upsilon}$$