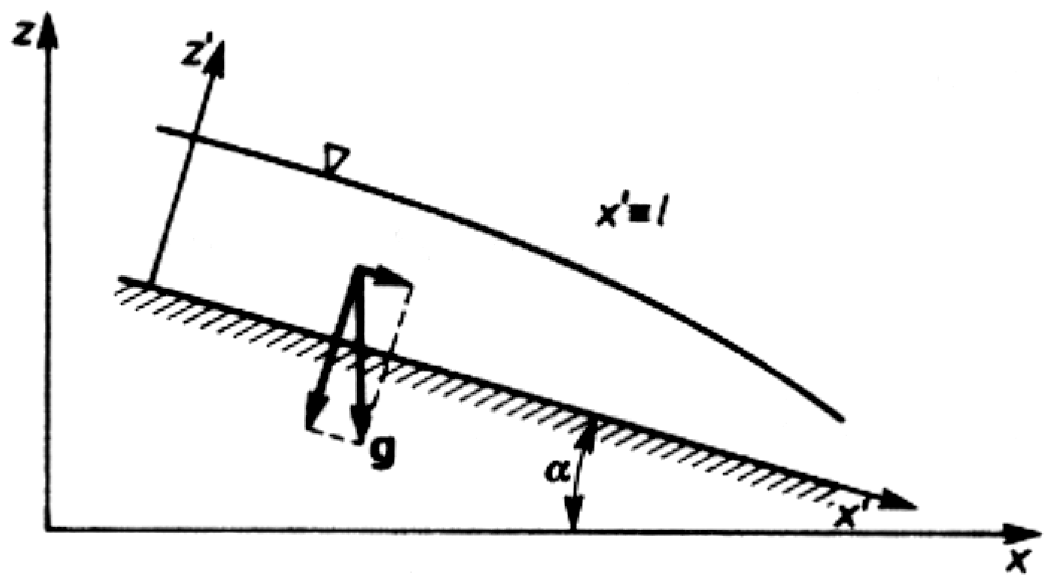
# J. Szantyr – Wykład nr 27 – Przepływy w kanałach otwartych I

Przepływy w kanałach otwartych najczęściej wymuszane są działaniem siły grawitacji. Jako wstępny uproszczony przypadek przeanalizujemy spływ warstwy cieczy nielepkiej o grubości $h$ i jednostkowej szerokości po nachylonej płaszczyźnie, pomijając wpływ ścian bocznych kanału. Jest to możliwe przy zaniedbaniu sił tarcia cieczy o powierzchnię kanału. Wprowadzamy dwa układy współrzędnych, układ $Ox'z'$ jest związany z nachyloną płaszczyzną.



W tym przypadku równanie zachowania pędu ma postać:

$$\frac{\partial p}{\partial z'} = -\rho g \cos\alpha$$ w kierunku $z'$

$$\rho u h \frac{du}{dx'} = \rho g h \sin\alpha - \frac{dp}{dx'} h$$ w kierunku $x'$

Z pierwszego otrzymujemy: $p = p_0 + \rho g (h - z') \cos\alpha$

gdzie: $p_0$ - ciśnienie na swobodnej powierzchni

Po wstawieniu do drugiego mamy: $\rho q \frac{du}{dx'} = \rho g h \sin\alpha - \frac{dh}{dx'} \rho g h \cos\alpha$

gdzie: $q = u \cdot h \cdot 1$ - objętościowe natężenie przepływu w warstwie

co prowadzi do: $$-q^2 \frac{1}{h^2} \frac{dh}{dx'} = g h \sin\alpha - g h \frac{dh}{dx'} \cos\alpha$$

Można to przekształcić do postaci:

$$\frac{dh}{dx'} = \frac{-\sin\alpha}{\left(\frac{q^2}{gh^3\cos\alpha} - 1\right)\cos\alpha}$$

Widać, że istnieje osobliwość przy wartości krytycznej *h* równej:

$$h_{kr} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g\cos\alpha}}$$

Wyrażenie w mianowniku można zapisać w innej formie:

$$\frac{q^2}{gh^3\cos\alpha} = \frac{u^2h^2}{gh^3\cos\alpha} = \left(\frac{u}{\sqrt{gh\cos\alpha}}\right)^2 = Fr^2$$

Czyli: $$\frac{dh}{dx'} = \frac{-\sin\alpha}{\left(Fr^2 - 1\right)\cos\alpha} = \frac{I}{\left(1 - Fr^2\right)\cos\alpha}$$

gdzie $I$ – spadek niwelacyjny

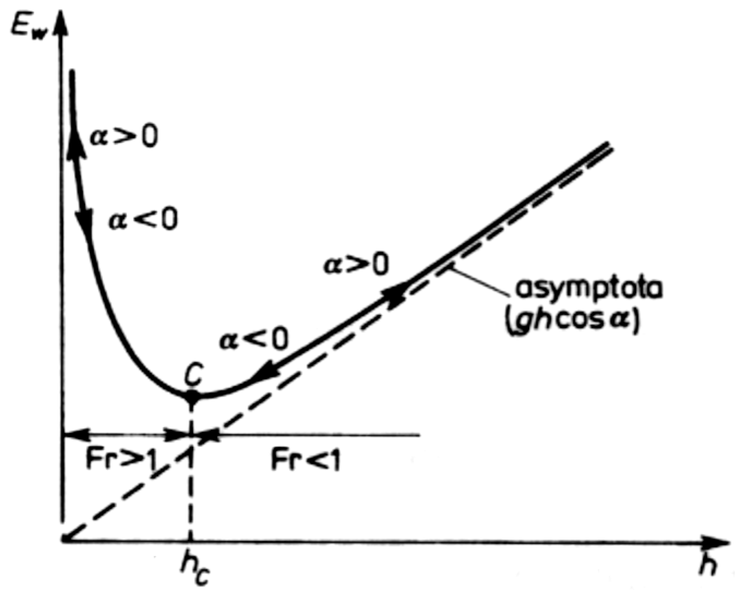
Dla $Fr=1$ mamy prędkość krytyczną: $u_{kr} = \sqrt{gh_{kr}\cos\alpha}$

Możliwe przypadki spływu warstwy cieczy można podzielić na podkrytyczne (Fr<1) – czyli **ruch spokojny** i nadkrytyczne (Fr>1) – czyli **ruch rwący**.

W zależności od rodzaju przepływu inaczej zmienia się grubość warstwy cieczy wzdłuż pochylonej płaszczyzny:

| | | |
|---|---|---|
| Spadek dna | Ruch spokojny<br>$Fr < 1$ | Ruch rwący<br>$Fr > 1$ |
| Pochylenie zstępujące<br>$\alpha > 0$ | Wzrost $h$<br>$\frac{dh}{dx'} > 0$ | Spadek $h$<br>$\frac{dh}{dx'} < 0$ |
| Pochylenie wstępujące<br>$\alpha < 0$ | Spadek $h$<br>$\frac{dh}{dx'} < 0$ | Wzrost $h$<br>$\frac{dh}{dx'} > 0$ |

Analiza równania energii dla przypadku spływu warstwy cieczy o jednostkowej szerokości po nachylonej płaszczyźnie prowadzi do następującej zależności dla tzw. energii właściwej:




$$E_w = \frac{u^2}{2} + gh\cos\alpha = \frac{q^2}{2h^2} + gh\cos\alpha$$

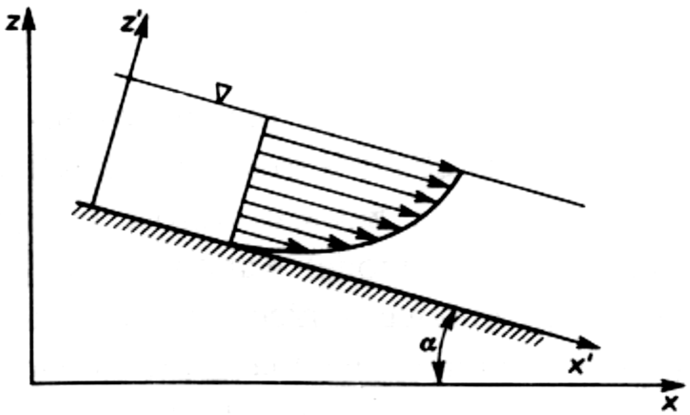
Warunek zachowania energii właściwej:

$$\frac{dE_w}{dx'} = \frac{d}{dx'}\left(\frac{u^2}{2} + gh\cos\alpha\right) = g\sin\alpha$$

Z postaci tej zależności wynika, że dla przepływu o nachyleniu zstępującym energia właściwa zawsze rośnie, a dla przepływu o nachyleniu wstępującym – zawsze maleje.

Energia właściwa osiąga minimum przy krytycznej grubości warstwy cieczy odpowiadającej Fr=1.

# Laminarny przepływ cieczy rzeczywistej (lepkiej)




W takim przypadku możliwe jest uzyskanie rozwiązania analitycznego równania zachowania pędu, które ma postać:

$$0 = g \sin\alpha + \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}$$

Warunki brzegowe: $u = 0$ dla: $z' = 0$

$\partial u / \partial z' = 0$ dla: $z' = h$

Rozwiązanie prowadzi do następujących zależności:

Profil prędkości: $$u(z') = -\frac{1}{2}\frac{g}{\upsilon}\sin\alpha \cdot z'(2 \cdot h - z')$$

Prędkość średnia: $$\tilde{u} = \frac{1}{h}\int_0^h u(z')dz' = \frac{1}{3}\frac{gh^2 \sin\alpha}{\upsilon}$$

Prędkość maksymalna: $$u_{\max} = \frac{1}{2}\frac{gh^2 \sin\alpha}{\upsilon} > \tilde{u}$$

**Wniosek:** prędkość przepływu jest proporcjonalna do kwadratu grubości warstwy cieczy, czyli: prędkość przepływu w kanale otwartym rośnie ze wzrostem stopnia napełnienia kanału.

Ważność rozwiązania dla przepływu laminarnego jest ograniczona do zakresu wartości liczby Reynoldsa poniżej około 2000, czyli:

$$\frac{u_{max} \cdot h}{\upsilon} = \frac{1}{2}\frac{gh^3 \sin\alpha}{\upsilon^2} < 2000 \rightarrow h < \frac{0{,}74 \cdot 10^{-3}}{\sqrt[3]{\sin\alpha}}$$

Z powyższego wzoru wynika, że przepływ laminarny w warstwie spływającej po ścianie pionowej wystąpi przy grubościach warstwy mniejszych od 0,74 [mm], a na ścianie prawie poziomej (nachylonej pod kątem 1 stopnia) przy grubościach mniejszych od 2,85 [mm]. W rzeczywistych ciekach z reguły występują przepływy turbulentne o w pełni rozwiniętym profilu prędkości.

# Turbulentny przepływ cieczy rzeczywistej (lepkiej)

W przypadku w pełni rozwiniętego przepływu turbulentnego w kanale o stałym nachyleniu parametry przepływu nie zmieniają się wzdłuż strumienia. Energia potencjalna cieczy jest zamieniana na energię wewnętrzną (cieplną) cieczy na skutek działania sił tarcia cieczy o ścianki kanału. Nie ma natomiast zamiany energii potencjalnej na energię kinetyczną płynącej cieczy. Energia właściwa jest stała wzdłuż przepływu.

$$0 = \rho g S \sin\alpha - p_\tau C \qquad e_2 - e_1 = \Delta e = \frac{p_\tau \cdot l}{\rho \cdot R_H} \qquad E_w = const$$

gdzie: $l$ – długość odcinka pomiędzy przekrojami 1 i 2

$p_\tau$ - naprężenia lepkościowe na ściance kanału

$R_H = S/C$ - promień hydrauliczny kanału

W takiej sytuacji istnieje związek pomiędzy spadkiem niwelacyjnym (który jest równy w tym przypadku spadkowi hydraulicznemu) a naprężeniami lepkościowymi:

$$I = I_H = \frac{p_\tau}{\rho g R_H}$$

# Wyznaczanie oporów tarcia w kanałach

Z analizy przepływu w kanale o chropowatych ściankach można wyprowadzić przybliżoną zależność na średnią prędkość przepływu:

$$\tilde{u} = C \cdot \sqrt{g \cdot I \cdot R_H} = C' \sqrt{I \cdot R_H}$$

gdzie: $C' \left[ \sqrt{m}/s \right]$ - wymiarowy współczynnik, określony np. według zależności:

$$C' = \frac{1}{n} R_H^{1/6}$$

n=0,009 dla powierzchni gładkich (glazura)

n=0,012 dla rur czystych i wygładzonego betonu

n=0,014 dla ściany z betonu

n=0,018 dla kanału ziemnego z warstwą ilastą

n=0,04 dla kanału ziemnego bardzo źle utrzymanego

## Przykład 1

Objętościowe natężenie przepływu w prostokątnym kanale betonowym (n=0,014) o szerokości B=4,0 [m] wynosi Q=5,0 [m**3/s]. Obliczyć krytyczne parametry przepływu w tym kanale

Warunek przepływu krytycznego ma postać:

$$\frac{q^2}{g h_{kr}^3 \cos\alpha} - 1 = 0 \rightarrow \frac{A^3}{B} = \frac{Q^2}{g} \rightarrow h_{kr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 g}} = \sqrt[3]{\frac{5{,}0^2}{4{,}0^2 \cdot 9{,}81}} = 0{,}54[m]$$

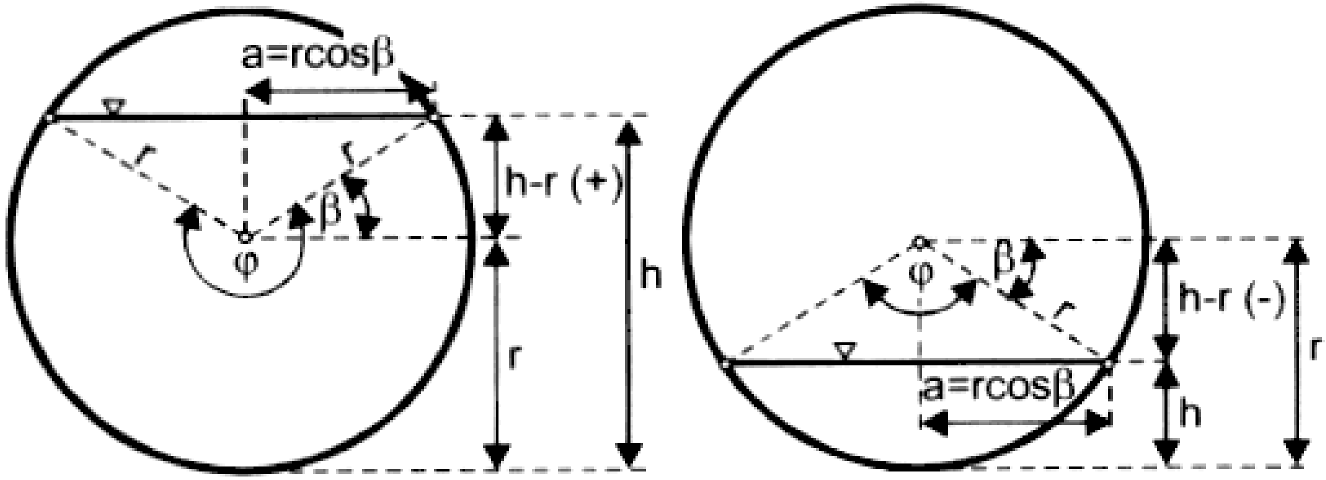
gdzie A – pole przekroju przepływu: $A = B \cdot h_{kr}$

Prędkość krytyczna: $u_{kr} = \frac{Q}{B \cdot h_{kr}} = \frac{5{,}0}{4{,}0 \cdot 0{,}54} = 2{,}31[m/s]$

Krytyczny spadek hydrauliczny:

$$u_{kr} = C' \sqrt{I_{kr} \cdot R_H} = \frac{1}{n} R_H^{1/6} \sqrt{I_{kr} \cdot R_H} \rightarrow I_{kr} = \frac{u_{kr}^2 n^2}{(R_H)^{4/3}} = 0{,}0033$$

# Przykład 2




Niecałkowicie wypełnionym kołowym kolektorem o promieniu $r$=1,5 [m] płynie grawitacyjnie woda. Kolektor zbudowano z tworzywa sztucznego o chropowatości $k$=0,5 [mm] i spadku $I$=0,4 [promile]. Sporządzić krzywą natężenia przepływu i krzywą prędkości wody w zależności od poziomu napełnienia kolektora. Przyjąć kinematyczny współczynnik lepkości wody: $\nu = 1{,}3 \cdot 10^{-6} \left[m^2/s\right]$

Objętościowe natężenie przepływu w niecałkowicie wypełnionym przewodzie obliczyć wg wzoru Darcy'ego-Weisbacha:

$$Q = \upsilon \cdot A = \sqrt{\frac{8 \cdot g \cdot R \cdot I}{\lambda}} \cdot A$$

Przy napełnieniu kolektora do głębokości h parametry przepływu są następujące:

- pole przekroju poprzecznego strumienia

$$A = \frac{\varphi}{360^0} \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a \cdot (h - r) = \frac{180^0 + 2 \cdot \beta}{360^0} + a \cdot (h - r)$$

gdzie:

$$\beta = \arcsin \frac{h - r}{r}$$

$$a = r \cdot \cos \beta$$

- obwód zwilżony kolektora $L_0 = \frac{\varphi}{180^0} \cdot \pi \cdot r$

- promień hydrauliczny $R = A / L_0$

- prędkość przepływu $\upsilon = \sqrt{\frac{8 \cdot g \cdot R \cdot I}{\lambda}}$

Współczynnik oporu liniowego zależy od chropowatości względnej i liczby Reynoldsa. Można go wyznaczyć metodą kolejnych przybliżeń według poniższego schematu:

- zakładamy wartość współczynnika oporu liniowego λ

- obliczamy prędkość przepływu wody wg wzoru Darcy'ego-Weisbacha $\upsilon = \sqrt{\frac{8 \cdot g \cdot R \cdot I}{\lambda}}$

- obliczamy wartość liczby Reynoldsa $\mathrm{Re} = \frac{\upsilon \cdot 4 \cdot R}{\nu}$

- dla znanej chropowatości względnej *k/(4R)* i liczby Reynoldsa obliczamy współczynnik $\lambda$ z zależności Colebrook'a – White'a:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log\left(\frac{2{,}51}{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k/(4 \cdot R)}{3{,}71}\right)$$

- jeżeli założona wartość współczynnika oporu liniowego nie zgadza się z obliczonym, powyższa procedura jest powtarzana, z przyjęciem wartości obliczonej jako kolejnego założenia

Poniżej **dla przykładu** obliczono natężenie przepływu i prędkość średnią przepływu w kolektorze dla głębokości wody h=0,8 [m]

$$A = \frac{\varphi}{360^0} \cdot \pi \cdot r^2 + a \cdot (h - r)$$

gdzie:

$$\sin\beta = \frac{h - r}{r} = \frac{0{,}8 - 1{,}5}{1{,}5} = -0{,}469 \rightarrow \beta = -27{,}818 \rightarrow a = r \cdot \cos\beta = 1{,}5 \cdot \cos 27{,}818 = 1{,}327[m]$$

$$A = \frac{180^0 + 2\cdot\left(-27{,}818^0\right)}{360^0}\cdot 3{,}14\cdot\left(1{,}5\right)^2 + 1{,}327\cdot\left(0{,}8 - 1{,}5\right) = 1{,}513\left[m^2\right]$$

$$L_0 = \frac{\varphi}{180^0}\cdot\pi\cdot r = \frac{180^0 + 2\cdot\beta}{180^0}\cdot\pi\cdot r = \frac{180^0 - 2\cdot 27{,}818^0}{180^0}\cdot 3{,}14\cdot 1{,}5 = 3{,}256\left[m\right]$$

$$R = \frac{A}{L_0} = \frac{1{,}513}{3{,}256} = 0{,}465\left[m\right]$$

Obliczenie współczynnika oporu liniowego według ww. procedury iteracyjnej daje wynik $\lambda$=0,0152.

Średnia prędkość przepływu wynosi wobec tego:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{8\cdot g\cdot R\cdot I}{\lambda}} = \sqrt{\frac{8\cdot 9{,}81\cdot 0{,}465\cdot 0{,}0004}{0{,}0152}} = 0{,}98\left[m/s\right]$$

Objętościowe natężenie przepływu wynosi:

$$Q = \upsilon\cdot A = 0{,}98\cdot 1{,}513 = 1{,}483\left[m^3/s\right]$$

Po przeprowadzeniu obliczeń dla wszystkich wybranych wartości głębokości wody wyniki można przedstawić graficznie: