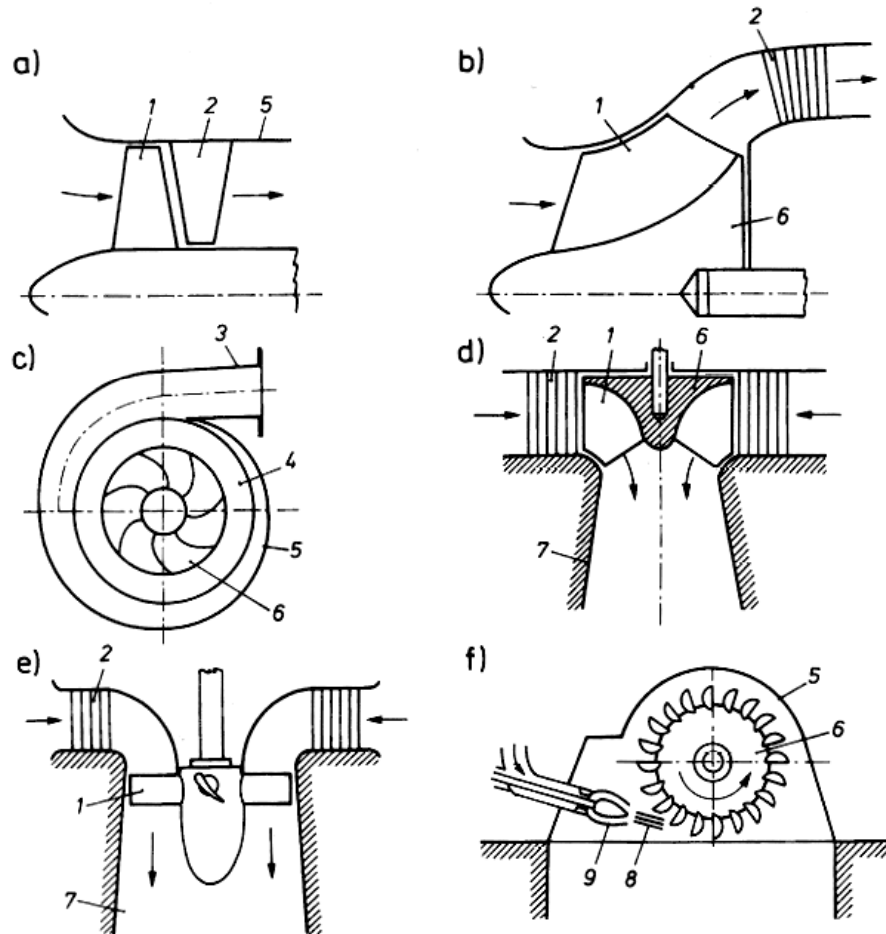
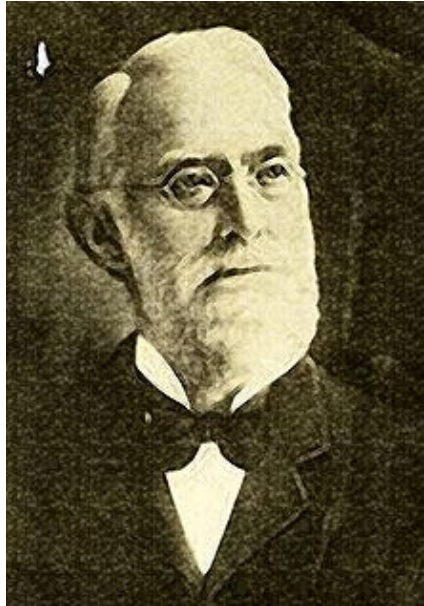


# J. Szantyr – Wykład 27bis – Podstawy jednowymiarowej teorii wirnikowych maszyn przepływowych



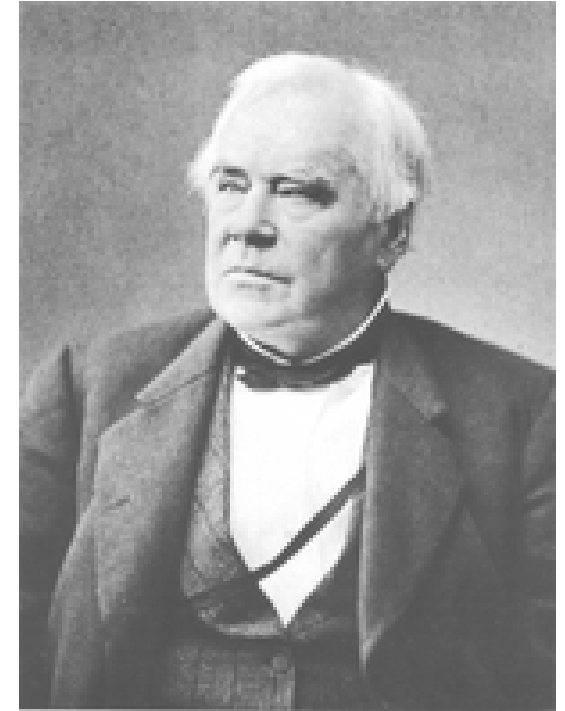
- a) Wentylator lub pompa osiowa
- b) Wentylator lub pompa diagonalna
- c) Sprężarka lub pompa odśrodkowa
- d) Turbina wodna promieniowo-osiowa (turbina Francisa)
- e) Turbina wodna osiowa (turbina Kaplana)
- f) Turbina wodna natryskowa (turbina Peltona)



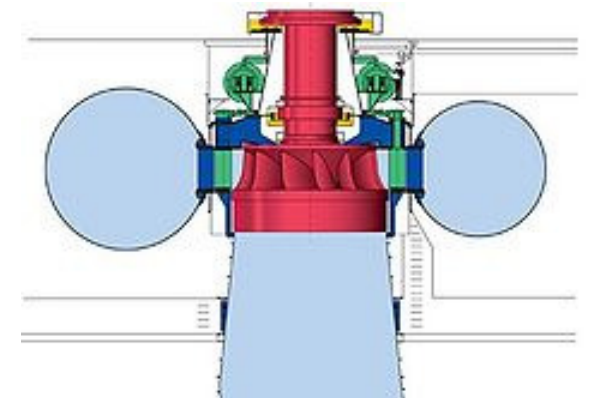
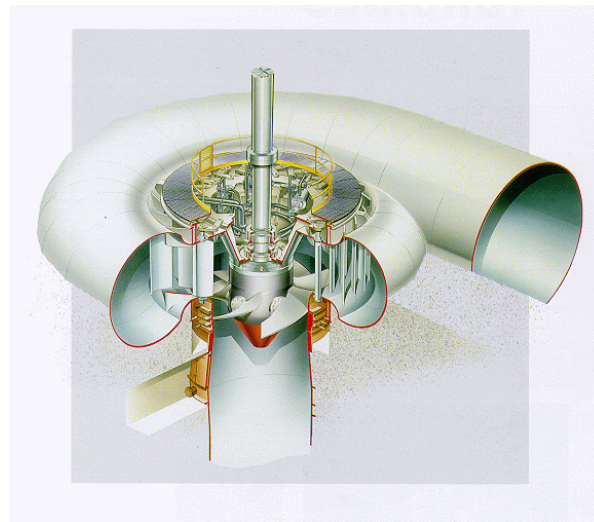
← Lester Pelton 1829 - 1908



Viktor Kaplan 1876 - 1934



James Francis 1815 - 1892



Celem teorii przepływu przez maszyny przepływowe jest dostarczenie wzorów do obliczania zmian ciśnienia podczas przepływu przez maszynę oraz mocy towarzyszącej temu procesowi. Teoria dostarcza też wskazówek do projektowania układu łopatkowego optymalnego z punktu widzenia sprawności maszyny. **Jednowymiarowa** teoria rozpatruje uproszczony model ustalonego przepływu płynu nieściśliwego przez wirnik o bardzo dużej liczbie nieskończenie cienkich łopatek. Rozpatruje się przepływ osiowo-symetryczny o polu prędkości opisanym zależnością:

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{\Omega} \times \vec{r} = \vec{w} + \vec{u}$$

gdzie:

- $\vec{v}$  - prędkość bezwzględna
- $\vec{w}$  - prędkość względna
- $\vec{u}$  - prędkość unoszenia
- $\vec{\Omega}$  - prędkość kątowa wirnika maszyny

Moc maszyny hydraulicznej może być wyznaczona na podstawie energii dostarczonej (w pompie) lub odebranej (w turbinie) jednostce ciężaru przepływającej cieczy:

$$N = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H$$

gdzie:

$\rho$  -gęstość cieczy,

$g$  -przyspieszenie grawitacyjne,

$Q$  -objętościowe natężenie przepływu,

$H$  -wysokość hydrauliczna.

Moc ta jest równa mocy na wale wirnika:  $N = M \cdot \Omega$

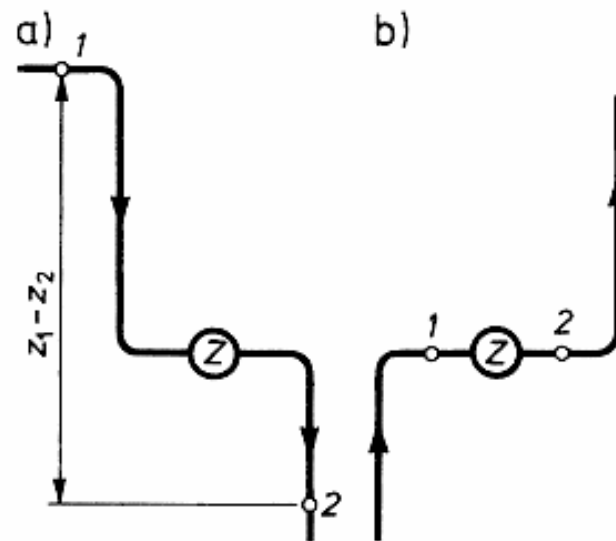
gdzie  $M$  jest momentem obrotowym

Wysokość hydrauliczna  $H$  może być powiązana z parametrami przepływu przy pomocy równania Bernoulliego:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + H + h_{str}$$

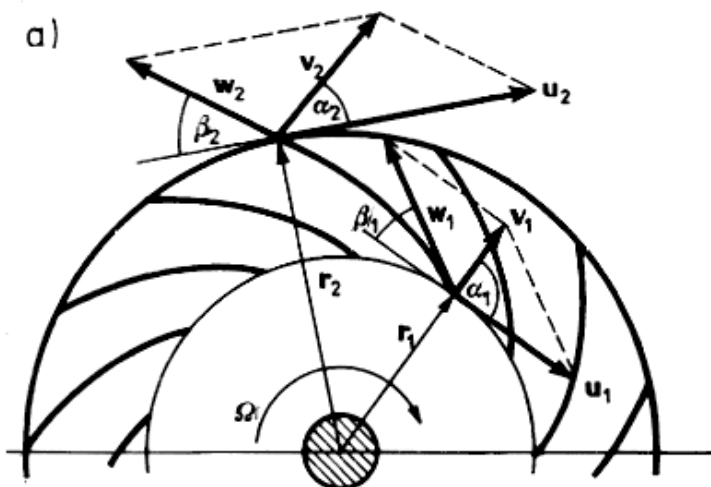
co prowadzi do zależności:

$$H = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 - h_{str}$$

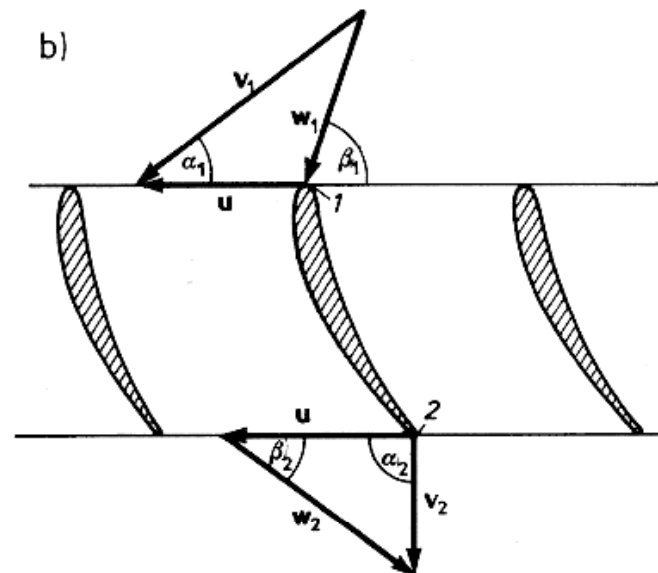


gdzie indeks  $1$  oznacza przekrój przed maszyną, a  $2$  - przekrój za maszyną. W przypadku pompy w powyższej zależności dominuje człon ciśnieniowy, a w przypadku turbiny - człon niwelacyjny. Człon opisujący straty w maszynie zmniejsza wysokość hydrauliczną dla turbiny (czyli moc turbiny rzeczywistej jest mniejsza niż turbiny idealnej), a zwiększa ją dla pompy (czyli pompa rzeczywista wymaga większej mocy niż pompa idealna).

## Wzór Eulera dla maszyn hydraulicznych



Wirnik promieniowy



Wirnik osiowy

Ciecz podczas przepływu przez wirnik doznaje zmiany momentu pędu (czyli zmiany **krętu**). Opisuje to równanie zachowania krętu:

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\vec{r} \times \rho \vec{v}) dV = \int_V (\vec{r} \times \vec{F}) \rho dV + \int_S (\vec{r} \times \vec{\tau}_n) dS$$

zmiana krętu = moment sił masowych + moment sił powierzchniowych

Uwzględniając rozkłady prędkości w przekroju wlotowym 1 oraz wylotowym 2, a także biorąc pod uwagę stacjonarność przepływu i nieściśliwość ciecży, lewą stronę równania można przekształcić do postaci:

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\vec{r} \times \rho \vec{v}) dV = \int_V (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dQ = \left[ (\vec{r} \times \vec{v}^\infty)_2 - (\vec{r} \times \vec{v}^\infty)_1 \right] \rho Q$$

Pole sił masowych grawitacyjnych i pole odśrodkowych sił bezwładności mają taką strukturę, że ich moment względem osi wirnika jest równy zero przy dowolnej orientacji przestrzennej wirnika, czyli:

$$\int_V (\vec{r} \times \vec{F}) \rho dV = 0$$

Z kolei siły powierzchniowe reprezentują moment obrotowy:

$$\int_S (\vec{r} \times \vec{\tau}_n) dS = -\vec{M}^\infty$$

Otrzymujemy więc:  $\vec{M}^\infty = \rho Q \left[ \left( \vec{r} \times \vec{v}^\infty \right)_1 - \left( \vec{r} \times \vec{v}^\infty \right)_2 \right]$

Iloczyny wektorowe można przekształcić do postaci:

$$\vec{r} \times \vec{v}^\infty = r v^\infty \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = r v^\infty \cos \alpha = r v_u^\infty$$

Co prowadzi do:  $M^\infty = \rho Q (r_1 v_{1u}^\infty - r_2 v_{2u}^\infty)$

Wykorzystując zależność:  $\rho g Q H^\infty = M^\infty \Omega$

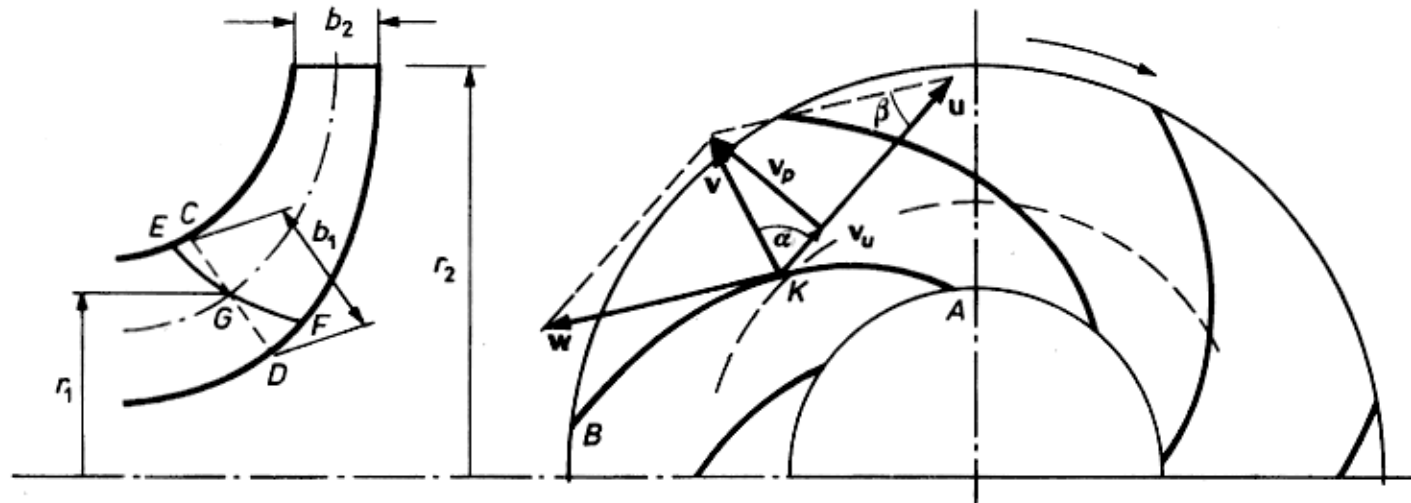
Otrzymujemy ostatecznie wzór Eulera:

$$H^\infty = \frac{\Omega}{g} (r_1 v_{1u}^\infty - r_2 v_{2u}^\infty)$$

Wyrażenie w nawiasie jest dodatnie dla turbiny wodnej i ujemne dla pompy.



## Pompa odśrodkowa



## Sprawność pompy

Głównym składnikiem wysokości podnoszenia pompy jest zmiana wysokości ciśnienia:

$$\Delta h_p = \frac{p_2 - p_1}{\rho g}$$

która jest związana z mocą użyteczną pompy:

$$N_u = \rho \cdot g \cdot Q \cdot \Delta h_p$$

Moc dostarczona do pompy  $N$  jest większa od mocy użytecznej z powodu strat, które dzielimy na straty hydrauliczne, objętościowe i mechaniczne. Łączny wpływ strat ujmuje sprawność pompy, którą można przedstawić jako iloczyn sprawności hydraulicznej, sprawności objętościowej i sprawności mechanicznej:

$$\eta = \frac{N_u}{N} = \eta_h \cdot \eta_v \cdot \eta_m$$

**Straty hydrauliczne** wywołane są tarciem cieczy o ścianki wirnika i kadłuba pompy oraz tarciem wewnętrznym.

$$\eta_h = \frac{\Delta h_p}{\Delta h_p + h_p} = \frac{\Delta h_p}{H_t}$$

Gdzie teoretyczna wysokość podnoszenia dla pompy o skończonej liczbie łopatek wynosi:

$$H_t = \frac{\Omega}{g} (r_2 v_{2u} - r_1 v_{1u})$$

**Straty objętościowe** są spowodowane przepływem wstecznym pomiędzy wirnikiem a kadłubem pompy, który sprawia, że rzeczywisty przepływ przez wirnik jest większy od wydajności pompy.

$$\eta_v = \frac{Q}{Q_w} = \frac{Q}{Q + Q_v} = \frac{\rho g H_t (Q_w - Q_v)}{\rho g Q_w H_t} = \frac{N_w - N_v}{N_w}$$

Teraz wzór na sprawność hydrauliczną można zapisać:

$$\eta_h = \frac{\rho \cdot g \cdot Q \cdot \Delta h_p}{\rho \cdot g \cdot (Q_w - Q_v) \cdot H_t} = \frac{N_u}{N_w - N_v}$$

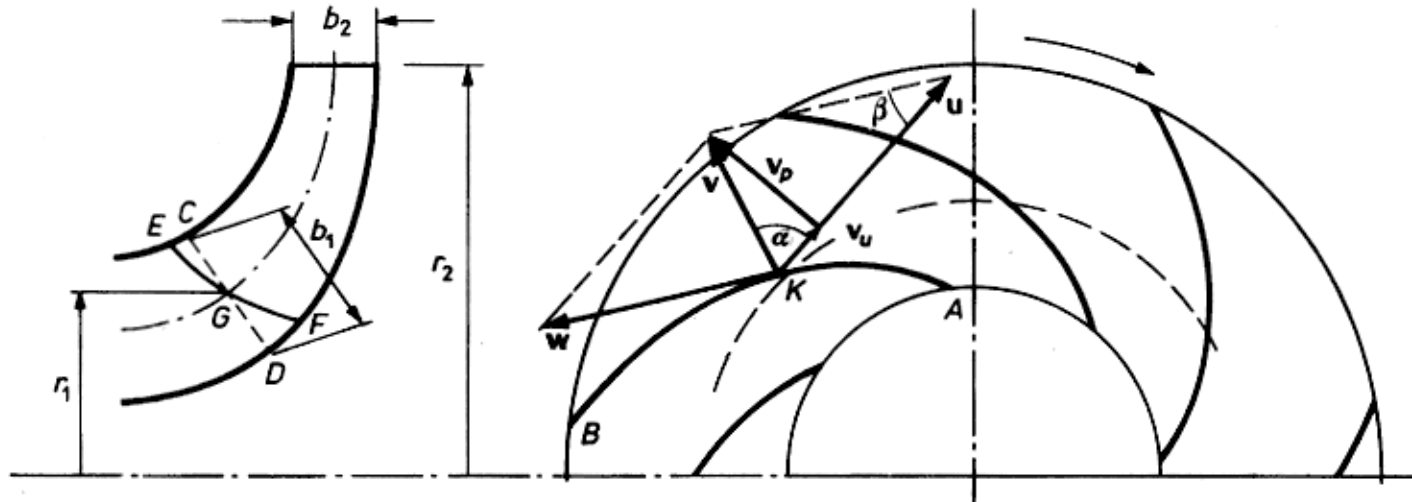
**Straty mechaniczne** są spowodowane tarciem w łożyskach i uszczelnieniach, a także tarciem zewnętrznej części wirnika o ciecz.

$$\eta_m = \frac{N_w}{N_w + N_m} = \frac{N_w}{N}$$

Ostatecznie:

$$\eta = \frac{N_u}{N} = \frac{N_u}{N_w - N_v} \cdot \frac{N_w - N_v}{N_w} \cdot \frac{N_w}{N} = \eta_h \cdot \eta_v \cdot \eta_m$$

# Kinematyka przepływu przez wirnik pompy odśrodkowej

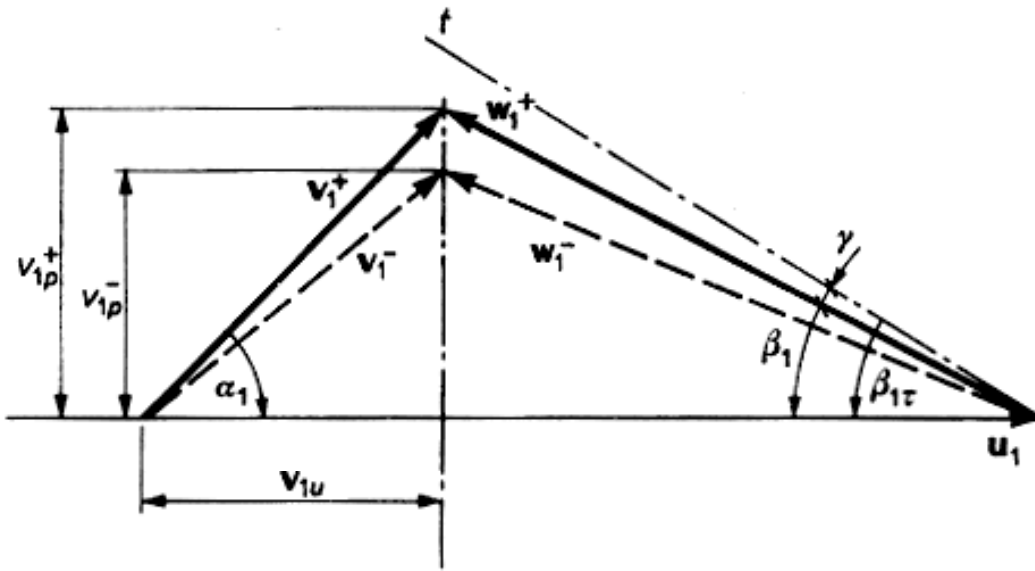


Prędkość południkowa  $v_p$  w danym punkcie to rzut prędkości bezwzględnej na płaszczyznę osiową przechodzącą przez ten punkt. Prędkość południkową na wlocie do wirnika określa wzór:

$$v_{1p}^+ = \frac{Q_w}{S_1} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot b_1 \cdot \eta_v \cdot \psi_1}$$

gdzie  $\psi_1$  - współczynnik przesłonięcia przekroju wlotowego

Znając prędkość południkową i prędkość unoszenia można narysować trójkąt prędkości na wlocie do wirnika:



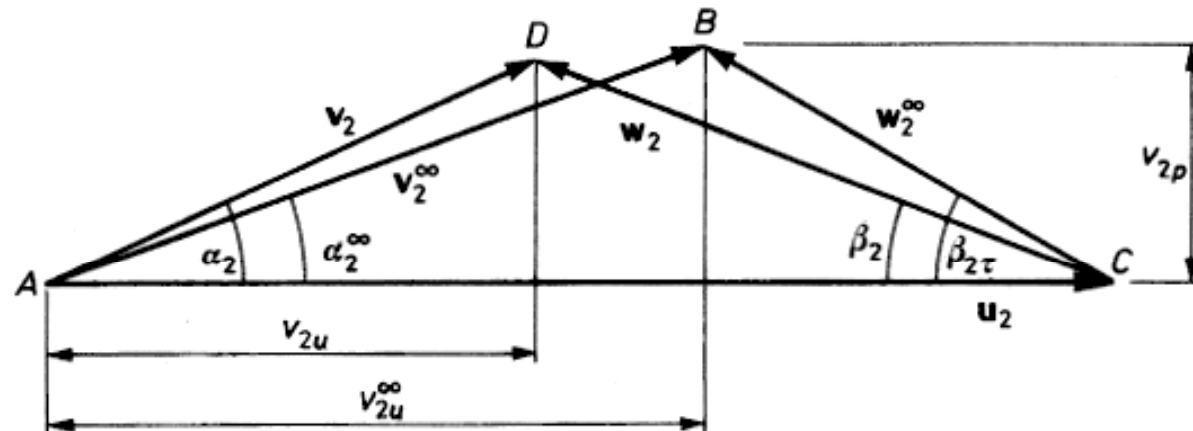
Symbol „+” oznacza wartości dla wirnika z rzeczywistą liczbą łopatek o rzeczywistej grubości, a symbol „-” – wartości dla wirnika o dużej liczbie nieskończenie cienkich łopatek

Z trójkąta prędkości można wyznaczyć prędkość względną na wlocie do wirnika oraz kąty  $\alpha_1$  i  $\beta_1$ . Kąt natarcia  $\gamma$  jest zwykle przyjmowany w granicach 3 – 8 stopni. Należy zwrócić uwagę, że kształt trójkąta prędkości zależy tylko od wydajności pompy  $Q$  i od prędkości obrotowej  $\Omega$ .

Prędkość południkową na wylocie określa wzór:

$$v_{2p} = \frac{Q_w}{S_2} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot b_2 \cdot \eta_v \cdot \psi_2}$$

Prędkość  $v_{2u}$  można wyznaczyć z wzoru Eulera dla znanej wysokości podnoszenia.

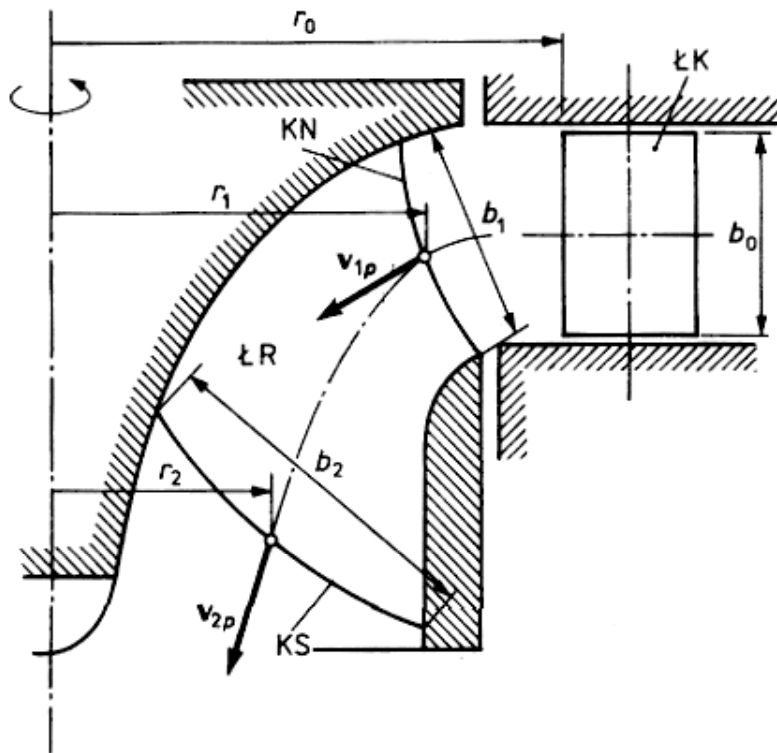


Ze względu na skończoną liczbę łopatek wirnika teoretyczny trójkąt prędkości ACD jest korygowany do postaci ABC wzorem empirycznym Stodoli:

$$v_{2u}^{\infty} - v_{2u} = \frac{\pi}{z} \cdot u_2 \sin \beta_1$$

Znajomość wlotowego i wylotowego trójkąta prędkości pozwala wykreślić przybliżony zarys łopatki wirnika.

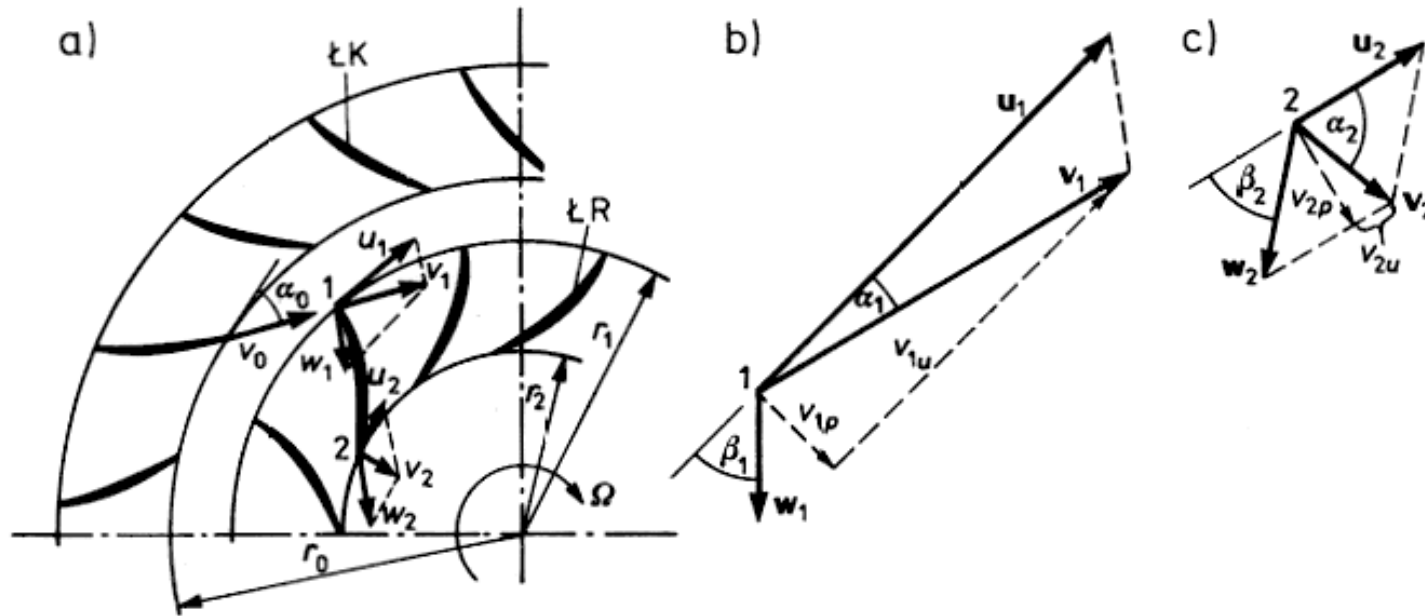
## Turbina wodna promieniowo-osiowa



Z punktu widzenia kinematyki przepływu turbina Francisa jest odwróceniem działania pompy odśrodkowej. Strumień wody przepływający przez łopatki kierownicy uzyskuje pewien kręt, który zostaje zredukowany niemal do zera w trakcie przepływu przez wirnik.

Turbina pracuje z największą sprawnością, gdy dopływ do wirnika jest bezuderzeniowy (kąt natarcia równy zero), a wypływ z wirnika jest osiowy, czyli gdy

$$v_{2u} = 0$$



Z kierownicy woda wypływa pod kątem  $\alpha_0 \approx \alpha_1$  i z prędkością:

$$v_0 = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot b_0 \cdot \sin \alpha_0}$$

Składowa obwodowa tej prędkości na wlocie do wirnika:

$$v_{1u} = \frac{r_0}{r_1} \cdot v_0 \cdot \cos \alpha_0$$



Prędkość południkowa na wlocie:  $v_{1p} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot b_1}$

Na podstawie powyższych danych i prędkości unoszenia można wykreślić trójkąt prędkości na wlocie, co pozwala na wyznaczenie prędkości względnej i jej kąta  $\beta_1$  który jest zarazem kątem wlotowym łopatkki. Na wylocie z wirnika jest odpowiednio:

$$v_{2p} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot b_2} \quad w_2 = \frac{v_{2p}}{\sin \beta_2} \quad u_2 = \Omega \cdot r_2 \quad v_{2u} \approx 0$$

Pozwala to wykreślić trójkąt prędkości na wylocie.

Odpowiednio przekształcony wzór Eulera ma postać:

$$H = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g}$$

Analiza tego wzoru pozwala powiązać wartość wysokości hydraulicznej z odpowiednim typem turbiny (osiowej lub promieniowo-osiowej).