

J. Szantyr – Wykład nr 28 – Przepływy w kanałach otwartych II

W przepływach w kanałach otwartych często występują zjawiska niestacjonarne, przede wszystkim związane z układami falowymi tworzącymi się na swobodnej powierzchni cieczy.

Najprostszy przypadek dotyczy rozprzestrzeniania się t. zw. małych zaburzeń na swobodnej powierzchni. Można wtedy pominąć siły lepkości i zlinearyzować równania ruchu cieczy. Do dyspozycji mamy równanie zachowania masy:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

oraz równanie zachowania pędu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

W przypadku małych zaburzeń grubości warstwy i prędkości:

$$h = h_0 + h'(t, x)$$

$$u = u_0 + u'(t, x)$$

$$h' \ll h_0$$

$$u' \ll u_0 \quad u' \ll \sqrt{g \cdot h_0}$$

można po ich podstawieniu zlinearyzować równania do postaci:

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h'}{\partial x} + h_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0$$

Rozwiązanie tego układu równań ma postać:

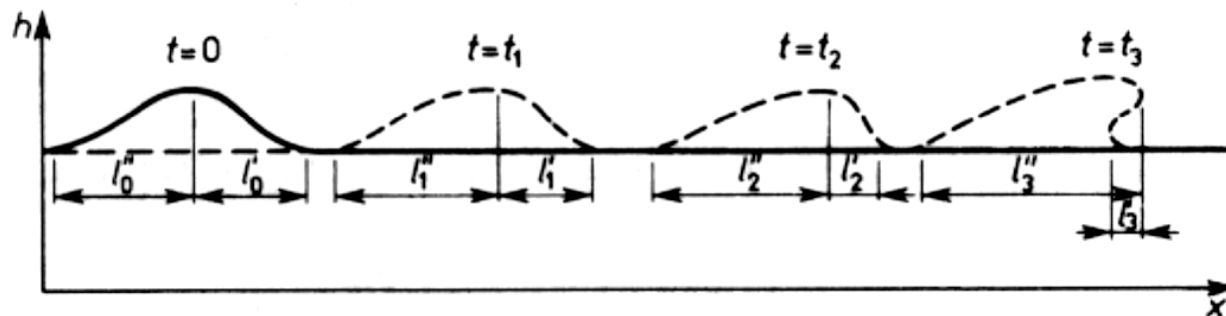
$$h' = h' \left[x - \left(u_0 \pm \sqrt{gh_0} \right) \cdot t \right] \qquad u' = u' \left[x - \left(u_0 \pm \sqrt{gh_0} \right) \cdot t \right]$$

Z postaci rozwiązania wynika, że małe zaburzenia rozchodzą się z prędkością charakterystyczną $\sqrt{gh_0}$ w dodatnim i ujemnym kierunku osi x bez zmiany kształtu początkowego określonego w warunkach początkowych $h'(0, x)$ oraz $u'(0, x)$

W przypadku zaburzeń o znacznej, skończonej amplitudzie linearyzacja równań ruchu cieczy nie jest możliwa. Rozwiązanie układu równań nieliniowych prowadzi do bardziej złożonych zależności opisujących rozprzestrzenianie się takich zaburzeń.

$$h = h_0 \left[x - 2\sqrt{gh_0} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{h}{h_0} - 1} \right) \cdot t \right]$$

Powyższy wzór opisuje rozprzestrzenianie się zaburzenia h w dodatnim kierunku osi x . Należy zauważyć, że w tym przypadku prędkość rozchodzenia się zaburzenia jest proporcjonalna do pierwiastka z jego amplitudy. Prowadzi to deformowania się zaburzenia jak na rysunku.



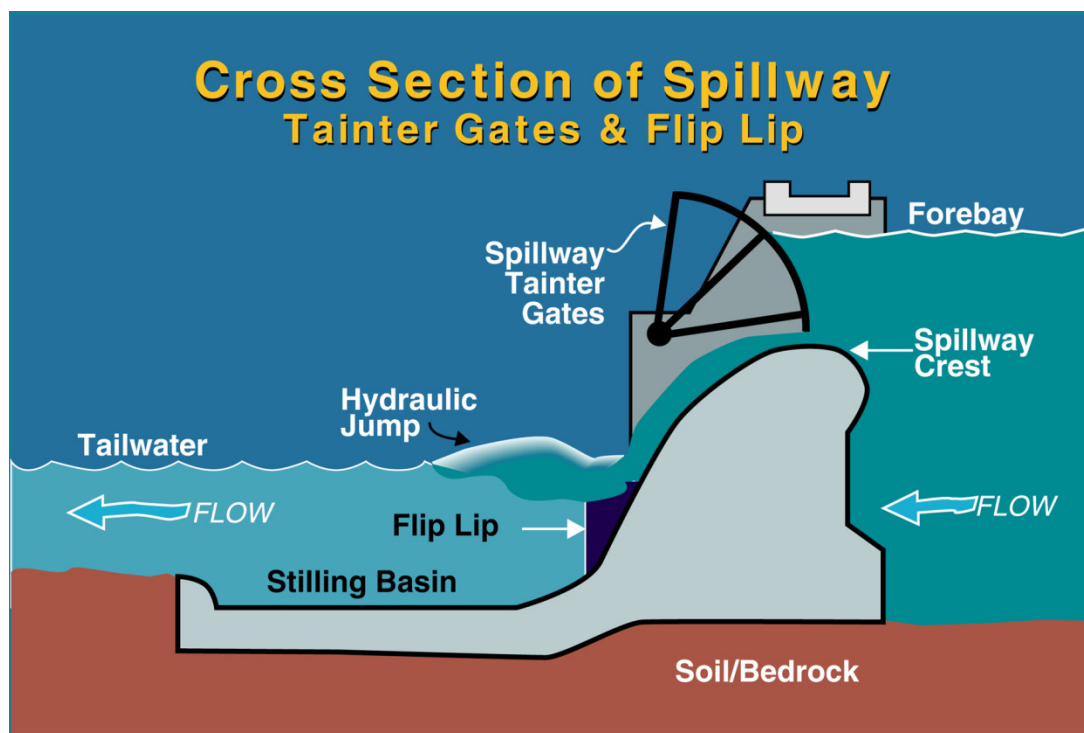
Czoło fali staje się coraz bardziej strome, a tył coraz bardziej rozmyty. W efekcie dochodzi do załamania fali, które w przepływie w kanale ma postać tzw. odskoku hydraulicznego. Należy pamiętać, że w prostym modelu przepływu jednowymiarowego pomijamy efekty dyssypacji związane z tarciem wewnętrznym cieczy i efekty dyspersji, związane z bezwładnością cieczy w ruchu falowym.

Odesk hydrauliczny

Odesk hydrauliczny jest złożonym zjawiskiem niestacjonarnym występującym w przepływach nadkrytycznych.



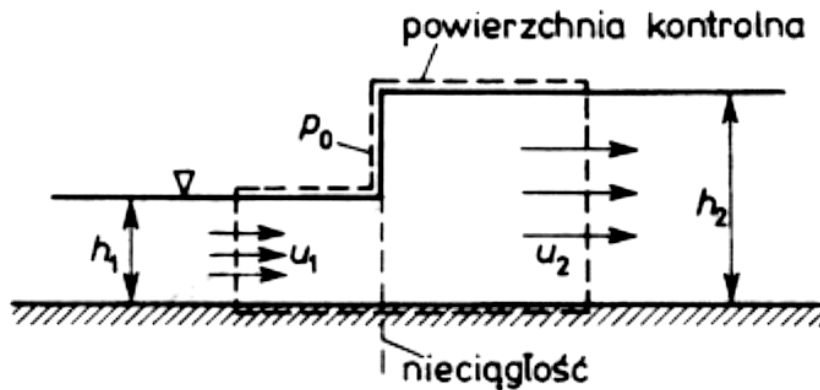
Odesk hydrauliczny polega na nagłym zwiększeniu grubości warstwy płynącej cieczy. Można go łatwo wytworzyć w każdej umywalce.



Przykłady odskoków hydraulicznych



Prosta analiza teoretyczna odskoku hydraulicznego



Równanie zachowania masy:

$$\rho h_1 u_1 = \rho h_2 u_2 = m$$

Równanie zachowania pędu:

$$p_1 = p_0 + \rho g(h_1 - z)$$

$$p_2 = p_0 + \rho g(h_2 - z)$$

w kierunku pionowym

$$m(u_2 - u_1) = \int_0^{h_1} p_1 dz - \int_0^{h_2} p_2 dz + \int_{h_1}^{h_2} p_0 dz$$

w kierunku poziomym

Po podstawieniu ciśnień i wykonaniu całkowania otrzymujemy:

$$h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 = h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2$$

Jeśli podstawimy: $u_2 = u_1 \frac{h_1}{h_2}$ $u_1 = Fr_1 \cdot \sqrt{g h_1}$

to otrzymamy:

$$\left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - 2 \cdot Fr_1^2 \right] \left(\frac{h_2}{h_1} - 1 \right) = 0$$

Równanie to ma trzy rozwiązania, ale fizycznie realne jest tylko jedno:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 1}{2}$$

Rozwiązanie to oznacza, że:

dla: $Fr_1 = 1$ jest $h_2 = h_1$

dla: $Fr_1 > 1$ jest $h_2 > h_1$ oraz $Fr_2 < 1$

dla: $Fr_1 < 1$ jest $h_2 < h_1$

Wynika z tego, że odskok hydrauliczny jest możliwy tylko w przepływie nadkrytycznym. Analiza równania energii prowadzi do wniosku, że w odskoku następuje wyraźne zwiększenie energii wewnętrznej cieczy na skutek bardzo silnych procesów dyssypacyjnych.

Wielkość straty energii cieczy na skutek dyssypacji w odskoku hydraulicznym można wyznaczyć według następującej zależności:

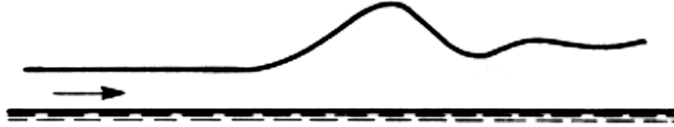
$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{\left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 3\right)^3}{8\left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 1\right)\left(\sqrt{Fr_1^2 + 2}\right)}$$

Odskoki hydrauliczne mogą być wywoływane celowo, dla następujących powodów:

- rozpraszanie energii mechanicznej strumienia
- podniesienie poziomu cieczy
- wymieszanie dodatków do cieczy
- napowietrzanie cieczy

Postać odskoku zależy od wartości liczby Froude'a

a) odskok zafalowany, $Fr=1+1,8$



$$\frac{h_2}{h_1} = 1 \leftrightarrow 2$$

$$\frac{\Delta E}{E_1} < 0,05$$

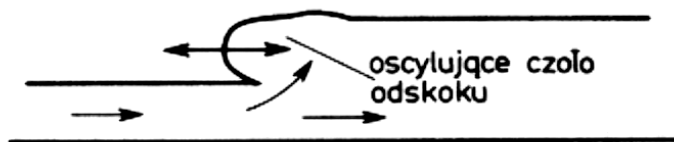
b) odskok słaby, $Fr=1,8+2,5$



$$\frac{h_2}{h_1} = 2 \leftrightarrow 3,1$$

$$\frac{\Delta E}{E_1} = 0,05 \leftrightarrow 0,15$$

c) odskok oscylujący, $Fr=2,5+4,5$



$$\frac{h_2}{h_1} = 3,1 \leftrightarrow 5,9$$

$$\frac{\Delta E}{E_1} = 0,15 \leftrightarrow 0,45$$

d) odskok stacjonarny, silny, $Fr > 4,5$



$$\frac{h_2}{h_1} = 5,9 \leftrightarrow 12$$

$$\frac{\Delta E}{E_1} = 0,45 \leftrightarrow 0,70$$

Przykład 1

W kanale o głębokości $h=1,0$ [m] wywołano przepływ o prędkości średniej $u=5,0$ [m/s]. Czy wystąpi w tym przepływie odskok hydrauliczny? Jeżeli tak, to jaka będzie głębokość wody za odskokiem? Jak będzie tam prędkość przepływu?

Rozwiązanie

$$Fr_1 = \frac{u}{\sqrt{gh}} = \frac{5,0}{\sqrt{9,81 \cdot 1,0}} \approx 1,6 > 1 \quad \text{Wystąpi odskok zafalowany}$$

$$h_2 = h_1 \frac{\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 1}{2} = 1,0 \frac{\sqrt{1,0 + 8 \cdot 1,6} - 1,0}{2} \approx 1,36 [m]$$

$$u_2 = u_1 \frac{h_1}{h_2} = 5,0 \frac{1,0}{1,36} \approx 3,68 [m / s]$$