J. Szantyr – Wykład nr 29 –Podstawy gazodynamiki I

Model płynu ściśliwego zakłada, że na dodatni przyrost ciśnienia płyn odpowiada dodatnim przyrostem gęstości, czyli:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = a^2$$

W płynie nieściśliwym jest: $\frac{\partial p}{\partial \rho} \to \infty$

Gazodynamika zajmuje się przepływami w których zjawisko ściśliwości płynu wpływa na charakter przepływu. W porównaniu z przepływem płynów nieściśliwych liczba równań niezbędnych do opisu przepływu wzrasta z dwóch do co najmniej czterech:

Równanie zachowania masy

Równanie zachowania pędu

Równanie zachowania energii

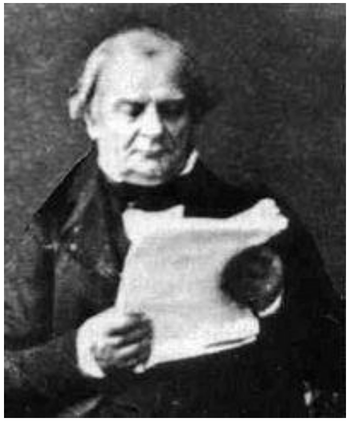
Równanie stanu

Równania dodane w gazodynamice

Równanie stanu

W prostych analizach gazodynamicznych wykorzystuje się model gazu idealnego i doskonałego ze stałymi wartościami ciepła właściwego, opisany równaniem Clapeyrona:

Benoit Clapeyron
1799 - 1864



$$p = \rho \cdot R \cdot T \qquad R = c_p - c_v = const \qquad k = \frac{c_p}{c_v} = const$$

gdzie: $R = \dfrac{\Lambda}{m} = \dfrac{8314}{28{,}97} = 287\left[\dfrac{m^2}{s^2 K}\right]$ dla powietrza

$$c_v = 718\left[\frac{m^2}{s^2 K}\right] \qquad c_p = 1005\left[\frac{m^2}{s^2 K}\right] \qquad k = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}4$$

Przy stałych wartościach ciepła właściwego wyznaczenie zmian energii wewnętrznej *e* i entalpii *h* gazu jest proste:

$$e_2 - e_1 = c_v\left(T_2 - T_1\right) \qquad h_2 - h_1 = c_p\left(T_2 - T_1\right)$$

Równanie zachowania energii

Punktem wyjścia jest równanie Bernoulliego wyprowadzone dla przepływów płynu ściśliwego przy założeniu przemiany adiabatycznej:

$$gz + \frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} = C$$

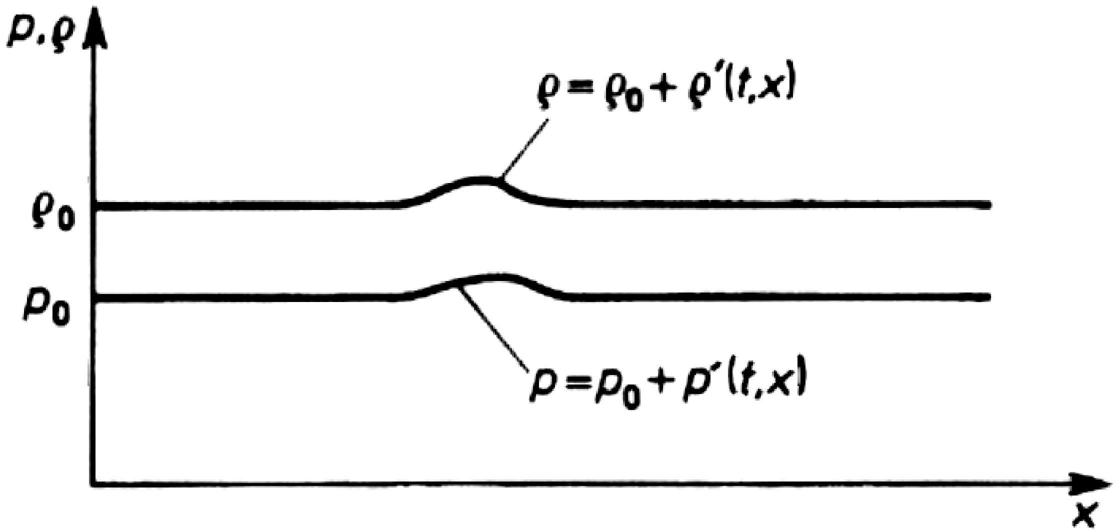
W przepływach gazu zwykle pomija się człon potencjalny. Trzeci wyraz równania może być przekształcony przy wykorzystaniu równania stanu do postaci:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot h = \frac{u^2}{2} + c_p \cdot T = C$$

Z powyższego wynika, że przy schłodzeniu płynącego gazu do zera bezwzględnego (T=0) osiągnie on prędkość maksymalną ograniczoną do wartości:

$$u_{\max} = \sqrt{2 \cdot C}$$

Propagacja małych zaburzeń w gazie idealnym.



Rozpatrujemy nieustalony przepływ jednowymiarowy, w którym występują zaburzenia ciśnienia i gęstości o amplitudach małych w stosunku do wartości średnich tych parametrów, czyli :

$$\rho'(t, x) << \rho_0 \qquad\qquad p'(x, t) << p_0$$

Równania zachowania dla tego przypadku mają postać:

równanie zachowania masy: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0$$

równanie zachowania pędu (Euler): $$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Aby zamknąć układ konieczne jest dołączenie równania adiabaty Poissona: $$\frac{p}{\rho^{\kappa}} = const$$ gdzie: $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ - wykładnik adiabaty Poissona

Teraz mamy trzy równania i trzy niewiadome: *p, u, ρ*

Linearyzacja układu równań i szereg przekształceń prowadzi do równań falowych:

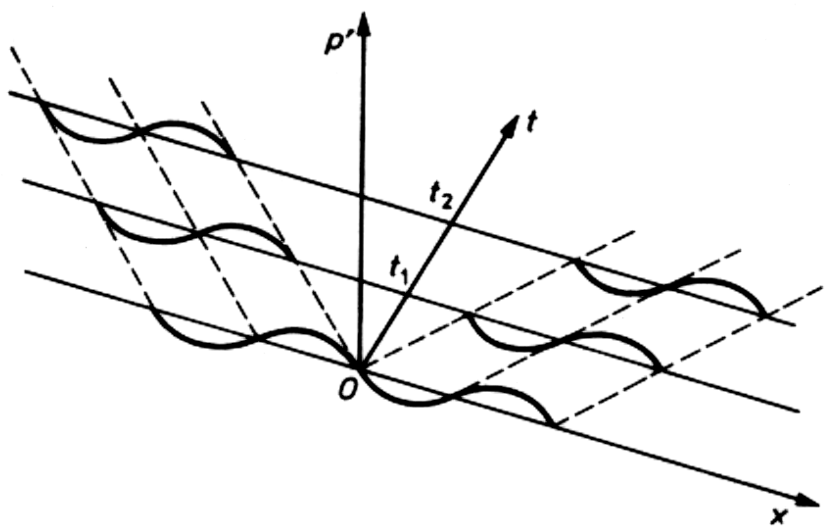
dla gęstości: $$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0$$

dla ciśnienia: $$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0$$

dla prędkości: $$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = 0$$

Rozwiązania równania falowego np. dla ciśnienia mają postać:

$$p'(x,t) = f(x - a_0 t)$$



przedstawia ono falę o początkowym profilu $p'(x,0) = f(x)$, rozprzestrzeniającą w dodatnim kierunku osi x, oraz:

$$p'(x,t) = g(x + a_0 t)$$

Przedstawia ono falę o początkowym profilu $p'(x,0) = g(x)$, rozprzestrzeniającą się w ujemnym kierunku osi x.

Niezmienność profilu rozchodzącej się fali jest konsekwencją założenia małych zaburzeń (czyli liniowości równań).

Z liniowego równania falowego wynika, że małe zaburzenia propagują się w gazie ze stałą prędkością. Ponieważ fale dźwiękowe są również małymi zaburzeniami, to prędkość ich propagacji można interpretować jako **prędkość dźwięku**:

$$a_0 = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}}$$

Lokalna prędkość dźwięku: $a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}$

Z powyższej zależności wynika, że prędkość dźwięku jest tym większa im mniej ściśliwy jest ośrodek i im wyższa jest jego temperatura. W powietrzu na poziomie morza prędkość dźwięku jest rzędu 340 [m/s], a w wodzie rzędu 1500 [m/s].

Kryterium podobieństwa dla szybkich przepływów w gazach jest liczba Macha:

$$Ma = \frac{u}{a} = \frac{predkosc\_przeplywu}{predkosc\_dzwieku}$$

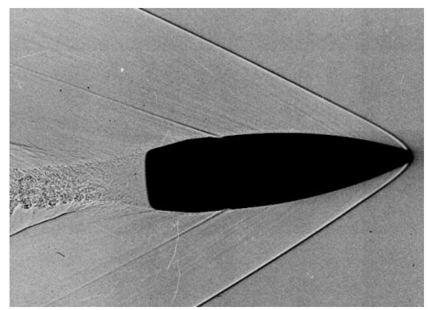
Ernst Mach
1838 - 1916

Za względu na wartość liczby Macha przepływy możemy podzielić na:

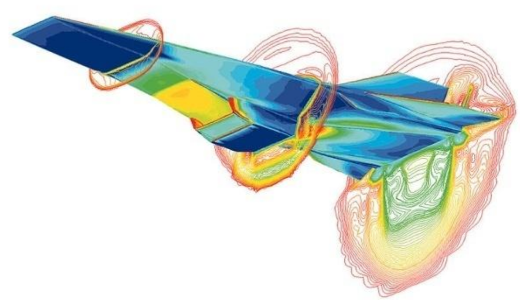
- niskie poddźwiękowe – Ma<0,3 (efekty ściśliwości są pomijalne)

- poddźwiękowe – 0,3<Ma<1,0

- okołodźwiękowe (w ograniczonych obszarach Ma>1,0)



- naddźwiękowe – 1,0<Ma<3,0

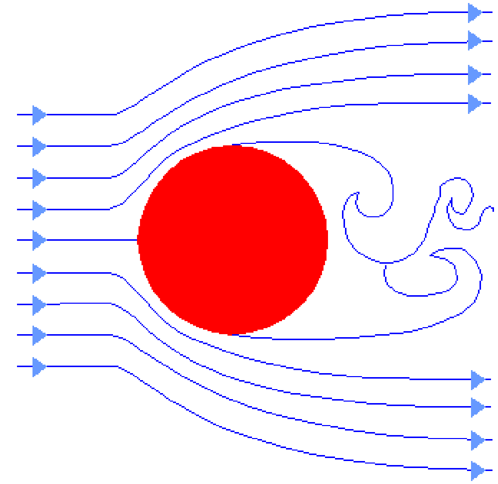


- hiperdźwiękowe – Ma>3,0

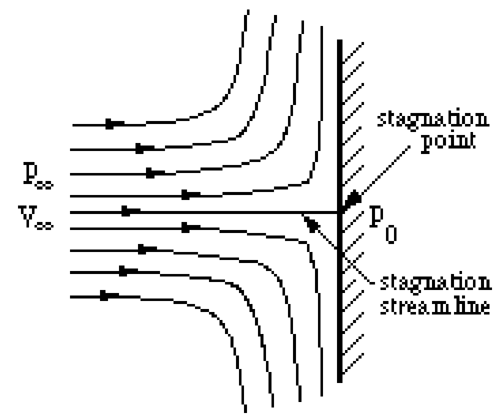
Przykładowe wartości prędkości w różnych materiałach przy ciśnieniu 1 bar i temperaturze 15 stopni Celsjusza

Materiał	Prędkość dźwięku [m/s]
Wodór	1294
Hel	1000
Powietrze	340
Dwutlenek węgla	266
Metan	185
Gliceryna	1860
Woda	1490
Rtęć	1450
Alkohol etylowy	1200
Aluminium	5150
Stal	5060
Drewno	4020
Lód	3200

Parametry spiętrzenia



Jeżeli gaz opływa ciało stałe, to punkt w którym linia prądu dochodzi prostopadle do powierzchni ciała nazywamy punktem spiętrzenia, w którym prędkość gazu wynosi zero. Parametry gazu w tym punkcie nazywamy parametrami spiętrzenia wyróżniamy je indeksem „0”. Jeżeli gaz płynie z prędkością *u* to mamy:



Entalpia spiętrzenia: $$h_0 = c_p \cdot T_0 = c_p \cdot T + \frac{u^2}{2}$$

Temperatura spiętrzenia: $$T_0 = T \cdot \left(1 + \frac{u^2}{2 \cdot c_p \cdot T}\right)$$

Nagłemu zahamowaniu przepływu towarzyszy adiabatyczne sprężanie gazu, co prowadzi do zależności:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} \cdot Ma^2$$

Wykorzystując równanie adiabaty Poissona można uzyskać zależności pomiędzy ciśnieniem i gęstością w przepływie a ciśnieniem i gęstością spiętrzenia:

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot Ma^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

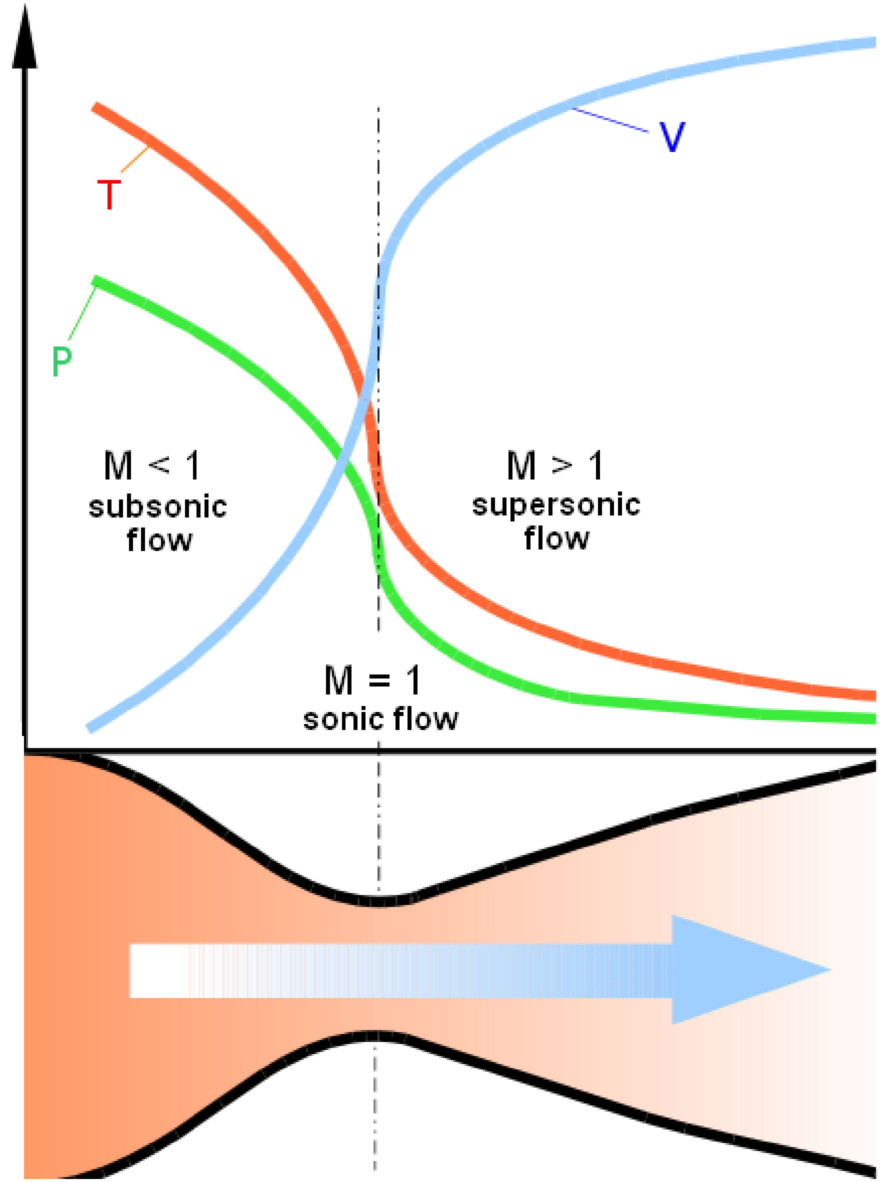
$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Uwzględniając związek pomiędzy prędkością dźwięku a temperaturą można wyprowadzić podobną do powyższych relację dla prędkości dźwięku:

$$\frac{a_0}{a} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Parametry krytyczne

Przy adiabatycznej ekspansji gazu podczas przepływu przez zbieżną część dyszy następuje obniżenie temperatury i towarzyszące mu obniżenie lokalnej prędkości dźwięku. Jednocześnie rośnie prędkość przepływu. Zrównanie się tych prędkości określa tzw. krytyczne parametry przepływu tradycyjnie opisywane symbolami z gwiazdką. Przekrój dyszy w którym zostały osiągnięte parametry krytyczne nazywa się przekrojem krytycznym.



Stosunek prędkości przepływu do prędkości krytycznej jest nazywany liczbą Lavala:

$$\frac{u}{u_*} = \lambda \qquad \text{gdzie:} \qquad u_* = \sqrt{R \cdot T_0 \cdot \frac{2 \cdot k}{k+1}}$$

Można wyprowadzić następujące zależności pomiędzy parametrami krytycznymi a parametrami spiętrzenia przepływu gazu (wartości liczbowe dla powietrza k=1,4):

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \rightarrow T_* = 0{,}831 \cdot T_0$$

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \rightarrow p_* = 0{,}636 \cdot p_0$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \rightarrow \rho_* = 0{,}528 \cdot \rho_0$$

Można również wyznaczyć strumień masy przepływu przez dyszę:

$$\frac{Q}{Q_*} = \frac{\rho \cdot u}{\rho_* \cdot u_*} = \left\langle \frac{2}{k-1} \cdot \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] \right\rangle^{\frac{1}{2}}$$

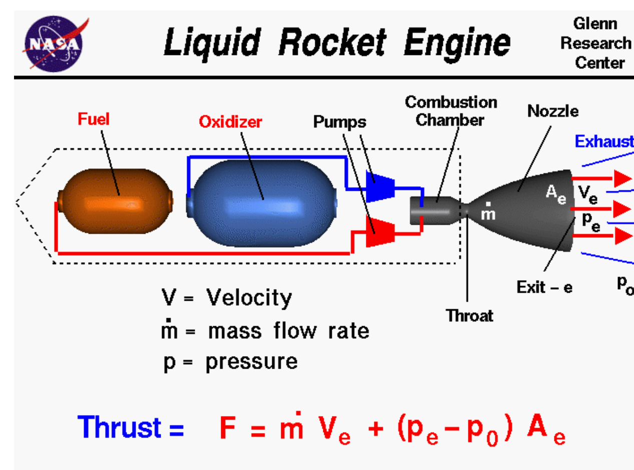
Dopóki ciśnienie na wylocie z dyszy (czyli tzw. przeciwciśnienie) jest większe od ciśnienia krytycznego strumień masy wzrasta ze zmniejszaniem przeciwciśnienia. Gdy przeciwciśnienie obniży się poniżej krytycznego, następuje zadławienie dyszy - masowe natężenie przepływu osiąga wartość maksymalną i dalej już nie rośnie:

$$Q_{\max} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k + \frac{1}{2(k-1)}} \sqrt{k \cdot p_0 \cdot \rho_0} \cdot S$$

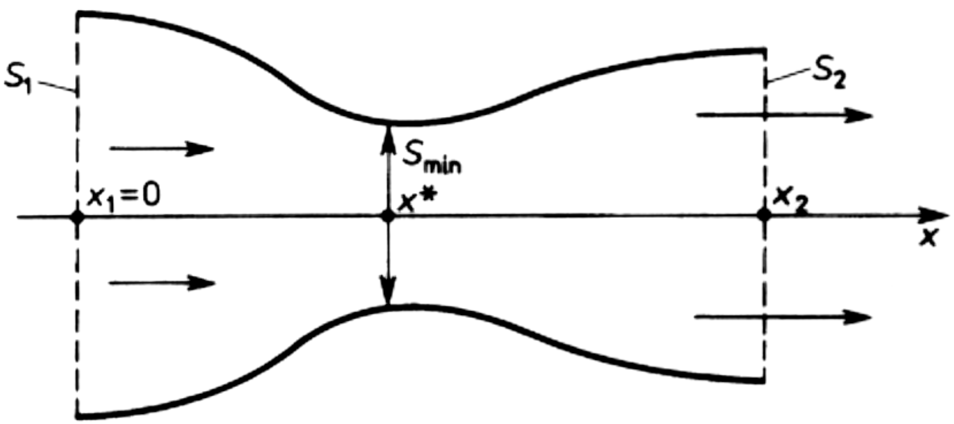
Przepływ przez dyszę de Lavala

Gustaf de Laval
1845 - 1913

Dysza de Lavala jest urządzeniem umożliwiającym rozpędzenie przepływu gazu do prędkości naddźwiękowych. Oprócz innych zastosowań jest ona częścią silników rakietowych.



Jednowymiarowy ustalony przepływ płynu ściśliwego



Dysza składa się z konfuzora (część zbieżna), gardzieli (czyli najwęższego przekroju) oraz dyfuzora (część rozbieżna).

równanie zachowania masy: $\rho(x)\cdot u(x)\cdot S(x)=const$

po zróżniczkowaniu: $$u\cdot S\cdot\frac{d\rho}{dx}+\rho\cdot S\cdot\frac{du}{dx}+\rho\cdot u\cdot\frac{dS}{dx}=0$$

po podzieleniu przez ρuS: $$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}+\frac{1}{u}\frac{du}{dx}+\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}=0$$

ponadto mamy: $\dfrac{dp}{d\rho}=a^2$ czyli: $\dfrac{d\rho}{dx}=\dfrac{d\rho}{dp}\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{dp}{dx}$

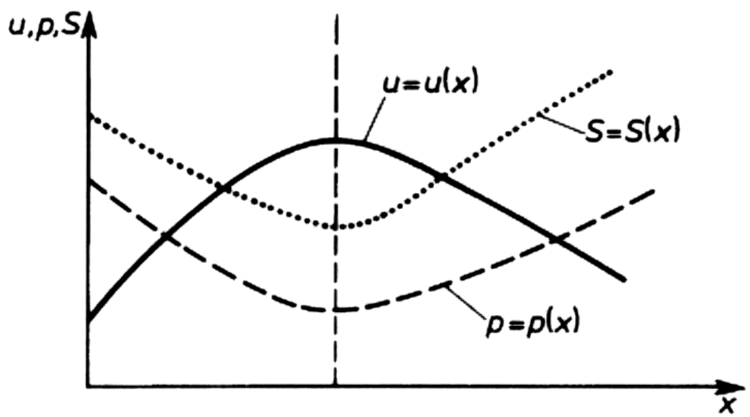
Gradient ciśnienia może być podstawiony z jednowymiarowego równania Eulera dla przepływu ustalonego:

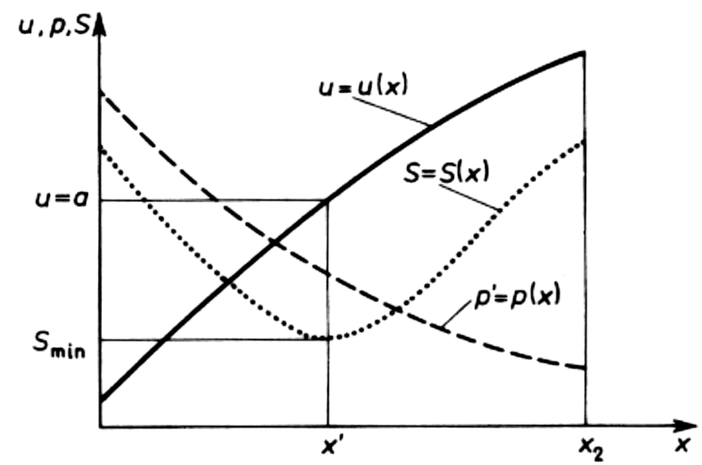
$$u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$$

czyli:

$$\frac{d\rho}{dx} = -\frac{\rho u}{a^2}\frac{du}{dx} \rightarrow \left(Ma^2 - 1\right)\frac{du}{dx} = \frac{u}{S}\frac{dS}{dx} \rightarrow \left(Ma^2 - 1\right)\frac{du}{u} = \frac{dS}{S}$$

Wynika z tego, że charakter przepływu gazu w dyszy de Lavala zależy od wartości liczby Macha:





<u>Przepływ poddźwiękowy</u> – prędkość odwrotnie proporcjonalna do zmiany pola przekroju dyszy.

<u>Przepływ naddźwiękowy</u> – prędkość rośnie ze wzrostem pola przekroju dyszy.

Przy <u>prędkości poddźwiękowej</u> zwiększenie przekroju dyszy prowadzi do zmniejszenia prędkości a zmniejszenie przekroju do wzrostu prędkości – odwrotnie przy <u>prędkości naddźwiękowej</u>. **Wniosek:** dysza de Lavala umożliwia rozpędzenie przepływu gazu do prędkości naddźwiękowej <u>pod warunkiem osiągnięcia prędkości dźwięku w najwęższym przekroju.</u>

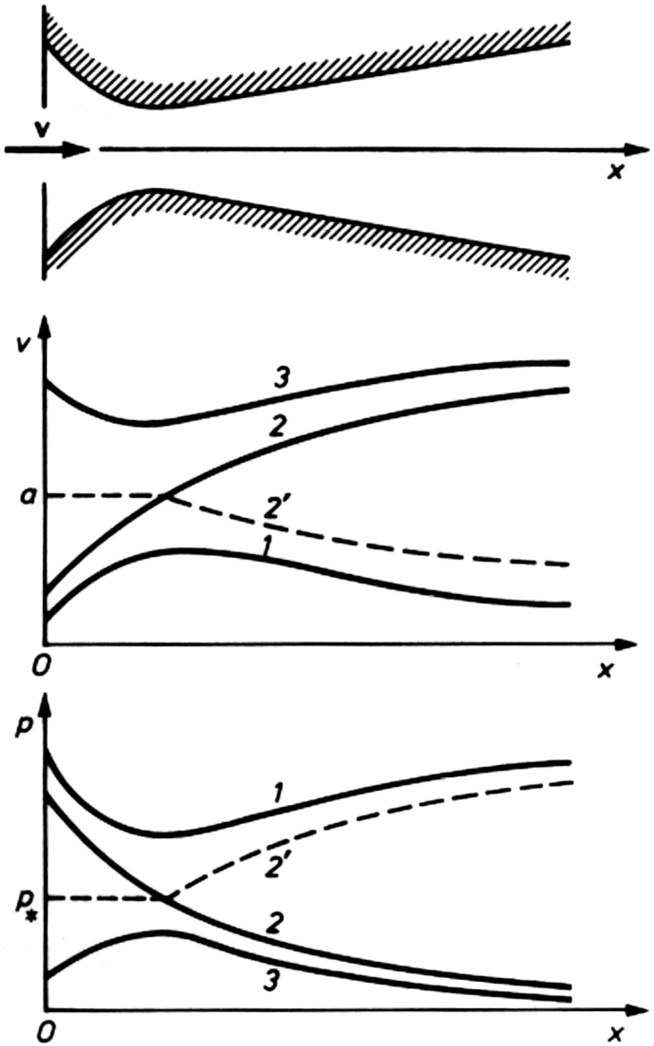
Istnieje maksymalne możliwe masowe natężenie przepływu przez dyszę de Lavala, wyrażające się następującą zależnością:

$$m_{\max} = \sqrt{\kappa \cdot p_0 \cdot \rho_0 \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}}$$

Maksymalne masowe natężenie przepływu odpowiada osiągnięciu w najwęższym przekroju dyszy prędkości dźwięku oraz ciśnienia krytycznego:

$$p_* = \rho_0 \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \qquad \text{gdzie:} \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

Możliwe przypadki przepływu przez dyszę de Lavala



1 – przepływ poddźwiękowy – można ich zrealizować nieskończenie wiele w zależności od wartości ciśnienia na wylocie (czyli tzw. przeciwciśnienia).

2 – w konfuzorze przepływ poddźwiękowy, w gardzieli prędkość dźwięku, w dyfuzorze przepływ nad- lub poddźwiękowy zależnie od wartości przeciwciśnienia.

3 – gaz wpływa do dyszy już z prędkością naddźwiękową, w konfuzorze jest lekko przyhamowany, ale w gardzieli jest nadal prędkość naddźwiękowa. W dyfuzorze przepływ nadal przyspiesza, czyli w całej dyszy mamy przepływ naddźwiękowy.

Przykład 1

Samolot leci na małej wysokości, gdzie temperatura powietrza wynosi $T_1 = 285[K]$ a następnie przechodzi w stratosferę, gdzie temperatura powietrza wynosi $T_2 = 218[K]$ Wyznaczyć procentową zmianę liczby Macha, jeżeli w obu przypadkach samolot leci z prędkością c=1500[km/godz.].

Prędkość dźwięku na małej wysokości wynosi:

$$a_1 = \sqrt{k \cdot R \cdot T_1} \approx 20{,}1 \cdot \sqrt{T_1} = 20{,}1 \cdot \sqrt{285} = 339{,}3[m/s]$$

przyjmując dla powietrza k=1,4 $R = 287\left[\dfrac{m^2}{K \cdot s^2}\right]$

Prędkość dźwięku w stratosferze wynosi:

$$a_2 = \sqrt{k \cdot R \cdot T_2} = 20{,}1 \cdot \sqrt{T_2} = 20{,}1 \cdot \sqrt{218} = 296{,}8[m/s]$$

Prędkość lotu samolotu: $c = 1500\left[km/godz.\right] = 416{,}7\left[m/s\right]$

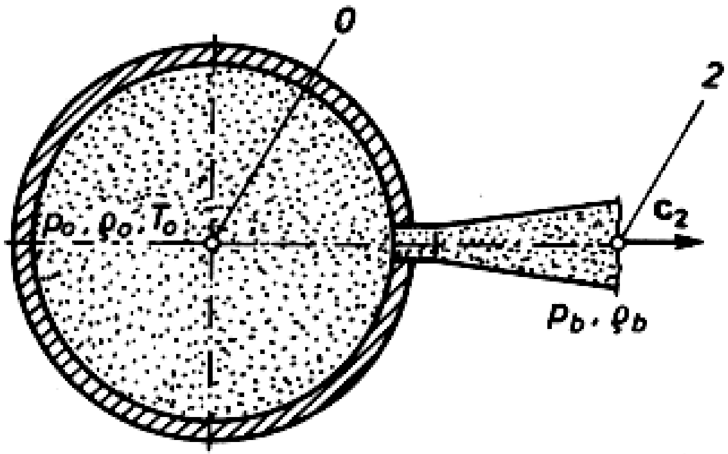
Wobec czego liczby Macha wynoszą:

$$M_1 = \frac{c}{a_1} = \frac{416{,}7}{339{,}3} = 1{,}23 \qquad M_2 = \frac{c}{a_2} = \frac{416{,}7}{296{,}8} = 1{,}40$$

Czyli procentowa zmian liczby Macha wynosi:

$$\frac{M_2 - M_1}{M_1} \cdot 100 = 13{,}8$$

Przykład 2



W butli gazowe znajduje się powietrze o temperaturze $T_0 = 288[K]$ pod ciśnieniem absolutnym $p_0 = 25[MPa]$. Jaką temperaturę osiągnie powietrze wypływając z butli do atmosfery przez dyszę de Lavala, jeżeli ciśnienie barometryczne wynosi $p_2 = p_b = 0{,}1[MPa]$ Przyjąć izentropowy przepływ gazu.

Równanie bilansu energii dla przekrojów 0 i 2:

$$\frac{c_0^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{c_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_b}{\rho_b}$$

Ponieważ mamy: $c_0 = 0$

$$\frac{\rho_0}{\rho_b} = \left(\frac{p_0}{p_b} \right)^{\frac{1}{k}}$$

Otrzymujemy: $c_2 = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_b}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}$

Podstawiając z równania stanu: $\frac{p_0}{\rho_0} = R \cdot T_0$ otrzymujemy:

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{p_b}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} = \sqrt{2 \cdot \frac{1{,}4}{1{,}4-1} \cdot 287 \cdot 288 \cdot \left[1 - \left(\frac{0{,}1}{25}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}}\right]} = 677[m/s]$$

Z równania: $\frac{c_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_2 = \frac{k}{k-1} \cdot R \cdot T_0$ można wyznaczyć:

$$T_2 = T_0 - \frac{c_2^2 \cdot (k-1)}{2 \cdot k \cdot R} = 288 - \frac{677^2 \cdot (1{,}4-1)}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 297} = 60[K]$$