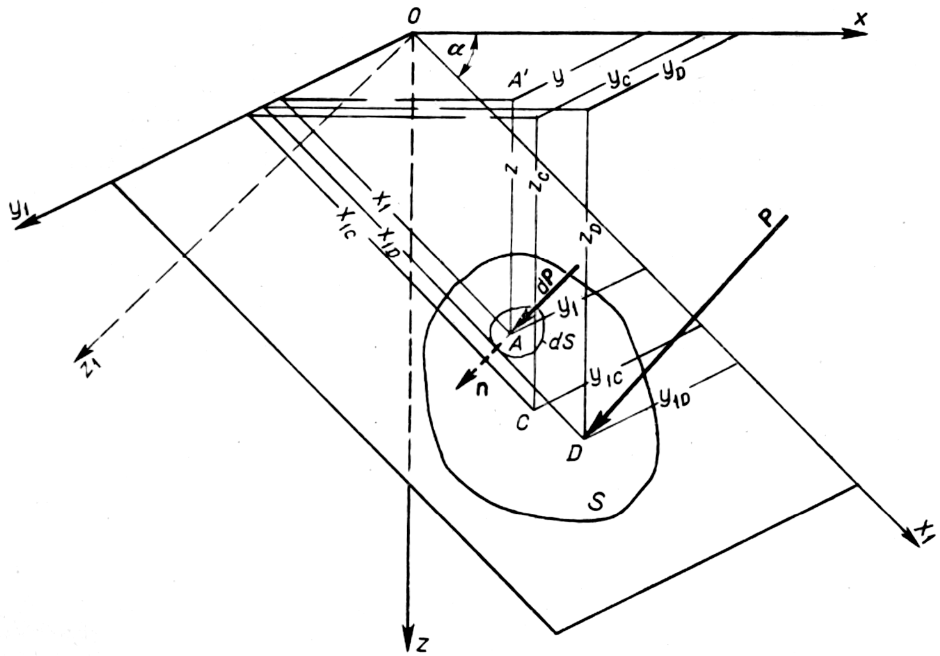
J. Szantyr - Wykład 4 – Napór hydrostatyczny

Napór hydrostatyczny na ściany płaskie



Napór hydrostatyczny na ścianę płaską przedstawia układ elementarnych sił równoległych prostopadłych do ściany. Daje się on sprowadzić do siły wypadkowej równej ich sumie i przyłożonej w środku sił równoległych.

Napór elementarny: $d\overline{P} = \overline{n}\left(p - p_a\right)dS = \overline{n}\rho g z dS$

Napór całkowity: $\overline{P} = \rho g \int_S \overline{n} z dS = \rho g \overline{n} \int_S z dS = \rho g \overline{n} z_C S$

gdzie: z_C - zanurzenie środka geometrycznego ściany S

Napór hydrostatyczny na ścianę płaską o dowolnym konturze i dowolnie nachyloną do poziomu jest równy (co do modułu) ciężarowi słupa cieczy o podstawie równej polu S i wysokości równej zanurzeniu jej środka geometrycznego pod swobodną powierzchnią.

Rzuty siły naporu na osie układu Oxyz:

$$P_x = \rho g \int_S z \cos(\bar{n}, \bar{i}) dS = -\rho g \sin\alpha \int_S z dS = -\rho g z_C S \sin\alpha$$

$$P_y = \rho g \int_S z \cos(\bar{n}, \bar{j}) dS = 0$$

$$P_Z = \rho g \int_S z \cos(\bar{n}, \bar{k}) dS = \rho g \cos\alpha \int_S z dS = \rho g z_C S \cos\alpha$$

czyli moduł siły naporu: $P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \rho g z_C S$

Wyznaczenie punktu przyłożenia wypadkowej siły naporu

Moment naporu:

$$\overline{M}_D = \overline{r}_D \times \overline{P} = \rho g \int_S \overline{r}_D \times \overline{n} z dS = \overline{i}_1 \rho g \int_S y_1 z dS + \overline{j}_1 \rho g \int_S x_1 z dS$$

Rzuty głównego wektora momentu:

$$x_{1D} P = \rho g \int_S x_1 z dS \qquad y_{1D} P = \rho g \int_S y_1 z dS$$

Współrzędne środka naporu:

$$x_{1D} = \frac{\int_S x_1 z dS}{\int_S z dS} = \frac{\int_S x_1^2 dS}{\int_S x_1 dS} = \frac{\int_S x_1^2 dS}{x_{1C} S} = \frac{I_{y_1}}{x_{1C} S} \qquad y_{1D} = \frac{\int_S y_1 z dS}{\int_S z dS} = \frac{\int_S x_1 y_1 dS}{\int_S x_1 dS} = \frac{\int_S x_1 y_1 dS}{x_{1C} S} = \frac{D_{z_1}}{x_{1C} S}$$

gdzie wykonano podstawienie: $z = x_1 \cos \alpha$

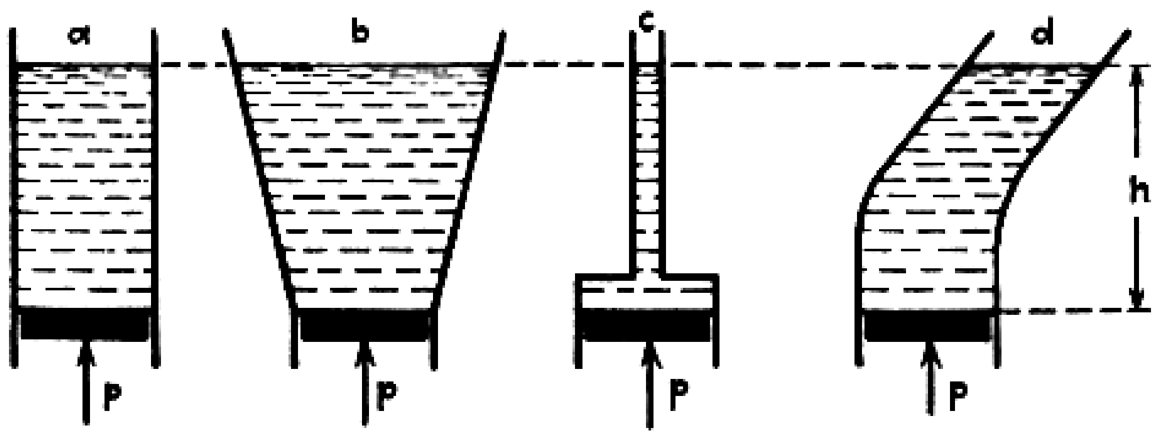
Wyznaczenie środka naporu wymaga obliczenia momentu bezwładności ściany S oraz wyznaczenia jej środka ciężkości.

Wnioski

Położenie środka naporu w układzie związanym ze ścianą nie zależy od kąta nachylenia ściany.

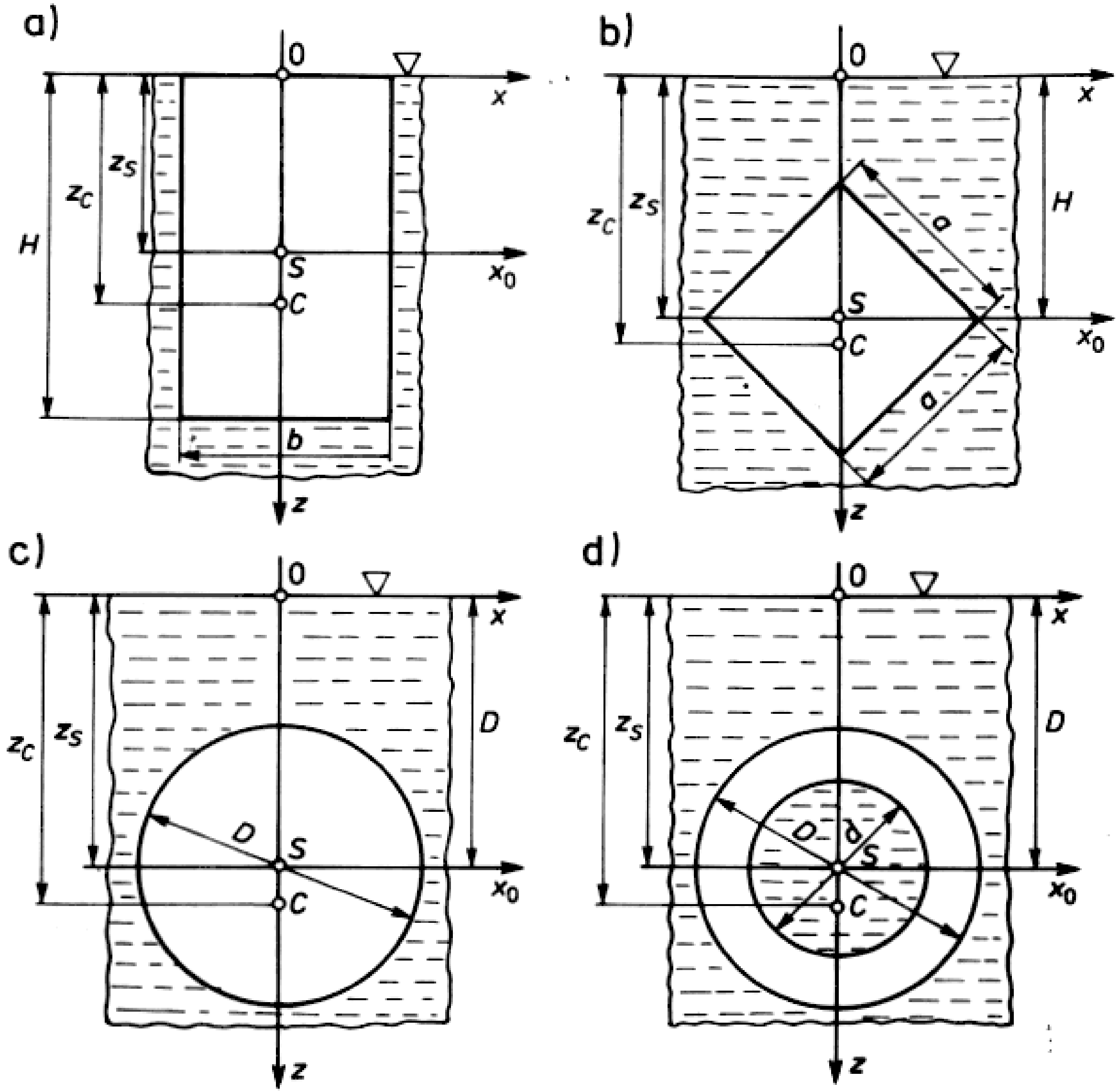
Na ścianach pionowych i nachylonych środek naporu leży niżej od środka geometrycznego ściany.

Wielkość naporu nie zależy od kształtu naczynia.



We wszystkich naczyniach powyżej napór na dno jest taki sam.

Przykład 1: wyznaczyć napór hydrostatyczny oraz określić położenie środka naporu C dla ścian pionowych pokazanych na rysunku.



Rozwiązanie dla ściany a

Zanurzenie środka geometrycznego ściany: $$z_S = \frac{H}{2}$$

Pole powierzchni ściany: $$S = bH$$

Moment bezwładności ściany względem osi przechodzącej przez jej środek geometryczny: $$I_{x0} = \frac{bH^3}{12}$$

Moment bezwładności ściany względem osi x (tw. Steinera): $$I_x = I_{x0} + z_S^2 S = \frac{bH^3}{12} + \frac{H^2}{4} bH$$

Położenie środka naporu: $$z_C = \frac{I_x}{z_S S} = \frac{H}{2} + \frac{H}{6} = \frac{2}{3} H$$

Moduł siły naporu hydrostatycznego: $$P = \rho g z_S S = \rho g \frac{H}{2} bH = \frac{\rho g b H^2}{2}$$

Rozwiązanie dla ściany b

Zanurzenie środka geometrycznego ściany: $z_S = H$

Pole powierzchni ściany: $S = a^2$

Moment bezwładności ściany względem osi przechodzącej przez jej środek geometryczny:

$$I_{x0} = \frac{a^4}{12}$$

Moment bezwładności ściany względem osi x (tw. Steinera):

$$I_x = I_{x0} + z_S^2 S = \frac{a^4}{12} + H^2 a^2$$

Położenie środka naporu:

$$z_C = \frac{I_x}{z_S S} = H + \frac{a^4}{12a^2 H} = H + \frac{a^2}{12H}$$

Moduł siły naporu hydrostatycznego: $P = \rho g z_S S = \rho g H a^2$

Rozwiązanie dla ściany c

Zanurzenie środka geometrycznego ściany: $z_S = D$

Pole powierzchni ściany: $$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

Moment bezwładności ściany względem osi przechodzącej przez jej środek geometryczny: $$I_{x0} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Moment bezwładności ściany względem osi x (tw. Steinera): $$I_x = I_{x0} + z_S^2 S = \frac{\pi D^4}{64} + D^2 \frac{\pi D^2}{4}$$

Położenie środka naporu: $$z_C = \frac{I_x}{z_S S} = D + \frac{D}{16} = \frac{17}{16} D$$

Moduł siły naporu hydrostatycznego: $$P = \rho g z_S S = \rho g D \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \rho g D^3}{4}$$

Rozwiązanie dla ściany d

Zanurzenie środka geometrycznego ściany: $z_S = D$

Pole powierzchni ściany: $$S = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4}$$

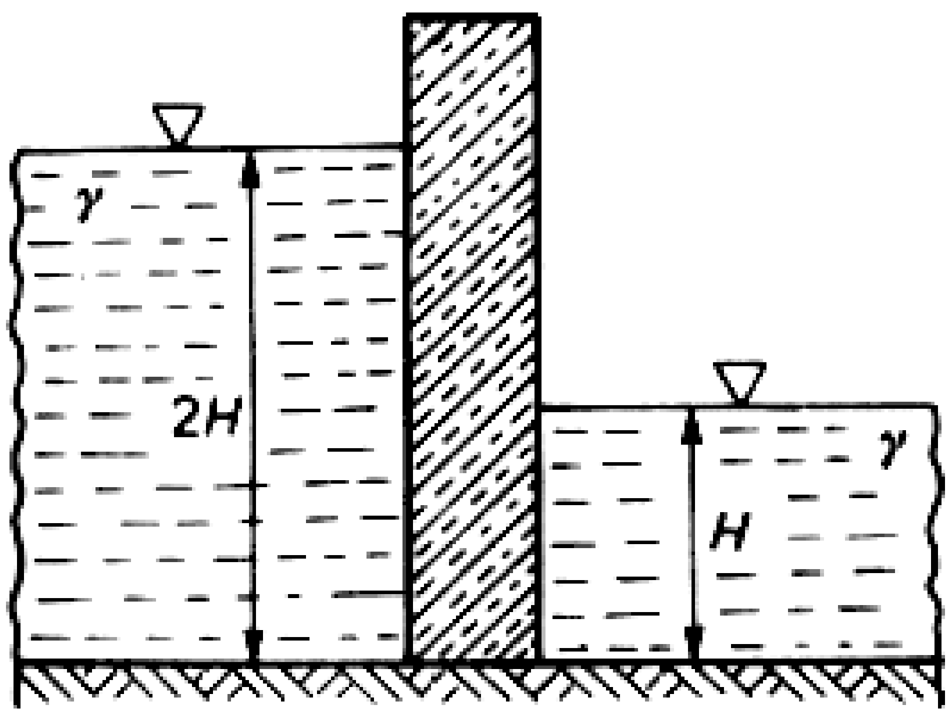
Moment bezwładności ściany względem osi przechodzącej przez jej środek geometryczny: $$I_{x0} = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64}$$

Moment bezwładności ściany względem osi x : $$I_x = I_{x0} + z_S^2 S = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64} + \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4} D^2$$

Położenie środka naporu: $$z_C = \frac{I_x}{z_S S} = D + \frac{D^2 + d^2}{16D}$$

Moduł siły naporu hydrostatycznego: $$P = \rho g z_S S = \rho g \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4} D$$

Przykład 2: Wyznaczyć moment względem podstawy działający na pionową ścianę jazu o szerokości L, dzielącą kanał o przekroju prostokątnym. Po lewej stronie zwierciadło cieczy znajduje się na wysokości 2H, a po prawej – na wysokości H.



Rozwiązanie

Siły naporu po lewej i prawej stronie wynoszą odpowiednio:

$$P_L = \rho g A_L z_{SL} \qquad P_P = \rho g A_P z_{SP}$$

Przyjmując szerokość L oraz wiedząc, że:

$$z_{SL} = H \qquad z_{SP} = \frac{H}{2}$$

Otrzymujemy:

$$P_L = 2\rho g L H^2 \qquad P_P = \frac{1}{2}\rho g L H^2$$

Punkty przyłożenia sił naporu można wyznaczyć w oparciu o poprzedni przykład (a) dla ściany prostokątnej:

$$z_{CL} = \frac{4}{3}H \qquad z_{CP} = \frac{2}{3}H$$

Moment działający na ścianę jazu wynosi: $M = P_L z_L - P_P z_P$

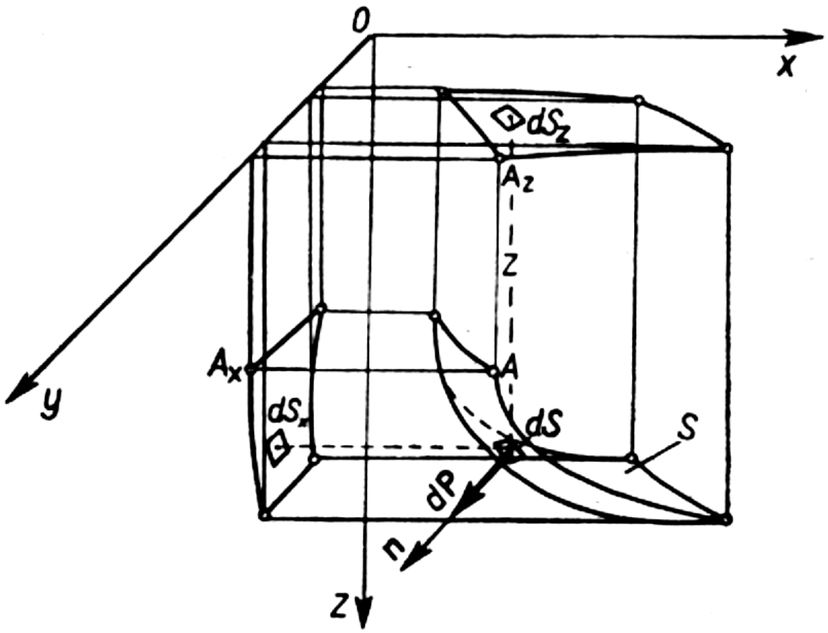
Gdzie: $$z_L = 2H - z_{CL} = 2H - \frac{4}{3}H = \frac{2}{3}H$$

$$z_P = H - z_{CP} = H - \frac{2}{3}H = \frac{1}{3}H$$

Po podstawieniu otrzymujemy ostatecznie:

$$M = 2\rho gLH^2 \cdot \frac{2}{3}H - \frac{1}{2}\rho gLH^2 \cdot \frac{1}{3}H = \frac{7}{6}\rho gLH^3$$

Napór hydrostatyczny na ściany zakrzywione.



Wszystkie siły elementarne działające na ścianę S tworzą przestrzenny układ sił, który można sprowadzić do głównego wektora siły i głównego wektora momentu.

Siła elementarna:

$$d\overline{P} = \overline{n}\left(p - p_a\right)dS = \overline{n}\rho g z dS$$

Główny wektor siły: $\overline{P} = \rho g \int_S \overline{n} z dS$

Główny wektor momentu: $\overline{M} = \rho g \int_S \overline{r} \times \overline{n} z dS$

Rzuty głównych wektorów siły i momentu na osie układu:

$$P_x = \rho g \int_S z \cos(\bar{n}, \bar{i}) dS = \rho g \int_S z dS_x = \rho g z_{Cx} S_x$$

$$P_y = \rho g \int_S z \cos(\bar{n}, \bar{j}) dS = \rho g \int_S z dS_y = \rho g z_{Cy} S_y$$

$$P_z = \rho g \int_S z \cos(\bar{n}, \bar{k}) dS = \rho g \int_S z dS_z = \rho g V$$

$$M_x = \rho g \int_S z \left[y \cos(\bar{n}, \bar{k}) - z \cos(\bar{n}, \bar{j}) \right] dS = \rho g \int_S z \left(y dS_z - z dS_y \right)$$

$$M_y = \rho g \int_S z \left[z \cos(\bar{n}, \bar{i}) - x \cos(\bar{n}, \bar{k}) \right] dS = \rho g \int_S z \left(z dS_x - x dS_z \right)$$

$$M_z = \rho g \int_S z \left[x \cos(\bar{n}, \bar{j}) - y \cos(\bar{n}, \bar{i}) \right] dS = \rho g \int_S z \left(z dS_y - y dS_x \right)$$

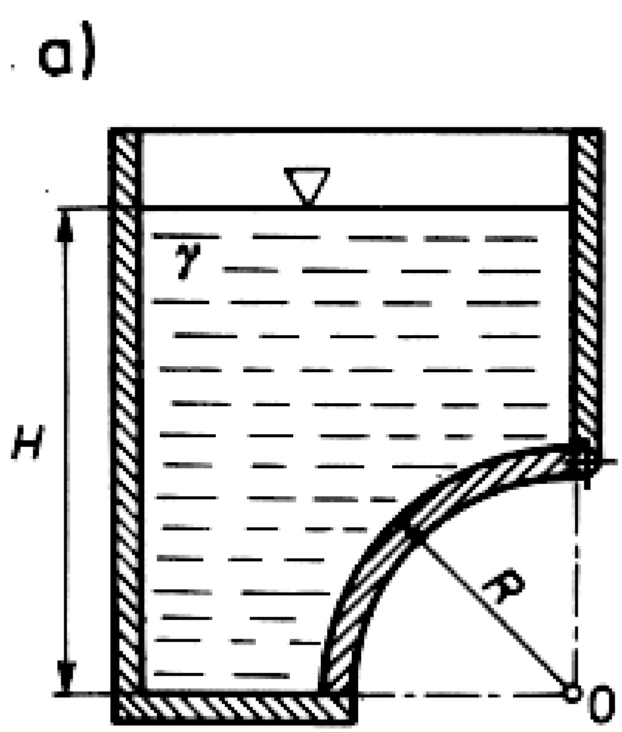
Wnioski

Rzut naporu na dowolny kierunek poziomy jest równy naporowi całkowitemu wywieranemu na ścianę płaską której pole jest równe rzutowi pola ściany zakrzywionej na płaszczyznę pionową prostopadłą do danego kierunku.

Ponieważ pola rzutów poziomych nie zależą od kształtu ściany *S* a jedynie od kształtu konturu ograniczającego, podobnie rzuty poziome naporu zależą tylko od konturu ograniczającego.

Rzut naporu na kierunek pionowy jest równy ciężarowi słupa cieczy zawartego pomiędzy ścianą S a jej rzutem na swobodną powierzchnię.

Przykład 3: Zbiornik wodny zamknięto klapą obrotową w kształcie ćwiartki walca o promieniu R i długości L. Wyznaczyć wielkość naporu hydrostatycznego wywieranego na klapę dla dwóch przypadków a) i b). Przyjąć gęstość wody równą ρ.



Rozwiązanie

Składowe poziome naporu są w obu przypadkach równe i wynoszą:

$$P_{Xa} = P_{Xb} = \rho g R L \left(H - \frac{R}{2} \right)$$

Składowe pionowe wynoszą odpowiednio:

$$P_{Za} = \rho g H R L - \rho g L \frac{\pi R^2}{4} = \rho g L R \left(H - \frac{\pi R}{4} \right)$$

$$P_{Zb} = \rho g H R L - \left(\rho g L R^2 - \rho g L \frac{\pi R^2}{4} \right) = \rho g R L \left(H - R + \frac{\pi R}{4} \right)$$

Napory wypadkowe wynoszą odpowiednio:

$$P_a = \sqrt{P_{Xa}^2 + P_{Za}^2} \qquad\qquad P_b = \sqrt{P_{Xb}^2 + P_{Zb}^2}$$

Tworzą one z poziomem kąt: $\alpha = arctg \dfrac{P_X}{P_Z}$