# J. Szantyr - Wykład 5 – Pływanie ciał

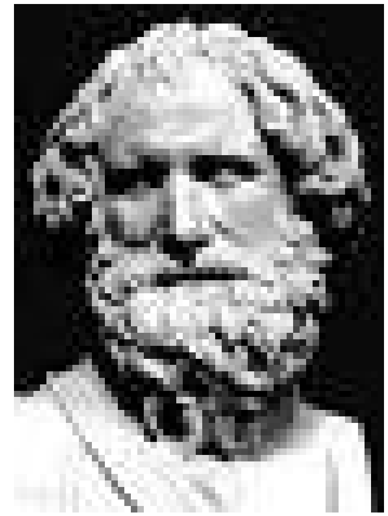
## Prawo Archimedesa

Na każdy element pola *dS* działa elementarny napór $d\overline{P} = \overline{n}\rho g z dS$

Napór całkowity $\overline{P} = \rho g \int_S \overline{n} z dS$

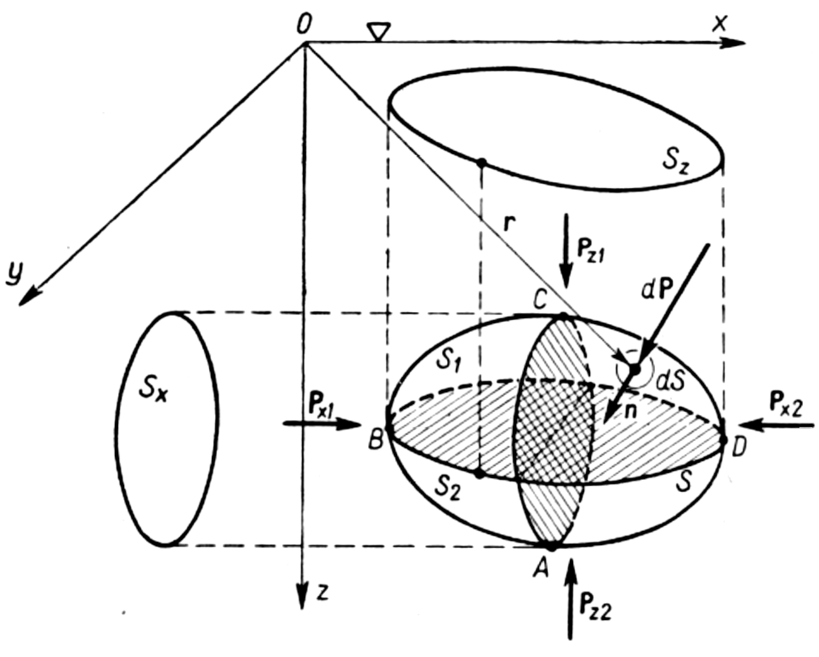
Główny wektor momentu siły naporu

$$\overline{M} = \rho g \int_S \overline{r} \times \overline{n} z dS$$



**Αρχίμηδης ο Συράκοσιος**

**Archimedes z Syrakuz**
**297 – 212 pne**




Rzuty poziome naporu na osie Ox i Oy są równe zeru. Całkowity napór sprowadza się do siły pionowej działającej na dwie części powierzchni o wspólnym konturze: dolną BAD i górną BCD.

Napór na dolną powierzchnię $P_{z1} = \rho g \int_{S_1} z dS = \rho g V_1$

Napór na górną powierzchnię $P_{z2} = \rho g \int_{S_2} z dS = \rho g V_2$

Napór wypadkowy $P_z = P_{z1} - P_{z2} = -\rho g \left( V_2 - V_1 \right) = -\rho g V$

Ostatecznie wypór hydrostatyczny $W = -P_z = \rho g V$

**Siła wyporu hydrostatycznego działająca na ciało zanurzone w płynie jest równa ciężarowi płynu wypartego przez to ciało. Linia działania siły wyporu przechodzi przez środek masy płynu wypartego przez ciało, zwany środkiem wyporu**.

Wyznaczenie linii działania siły wyporu.

Składowe głównego momentu siły wyporu

$$M_x = \rho g \int_S z\left(y dS_z - z dS_y\right) = \rho g \int_V \frac{\partial (yz)}{\partial z} dV - \rho g \int_V \frac{\partial z^2}{\partial y} dV = \rho g \int_V y dV = \rho g y_C V = y_C P_z$$

gdzie $y_C = \frac{1}{V}\int_V y dV$ współrzędna *y* środka objętości *V*

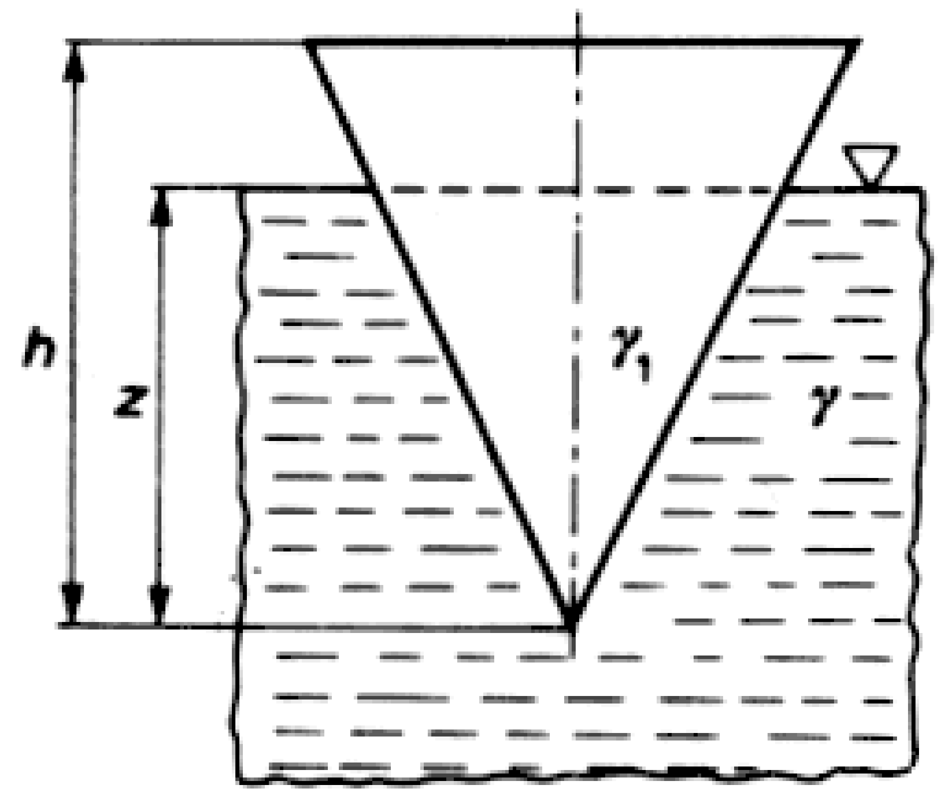
$$M_y = \rho g \int_S z\left(z dS_x - x dS_z\right) = \rho g \int_V \frac{\partial z^2}{\partial z} dV - \rho g \int_V \frac{\partial (xz)}{\partial z} dV = -\rho g \int_V x dV =$$

$$= -\rho g x_C V = -x_C P_z$$

gdzie: $x_C = \frac{1}{V}\int_V x dV$ współrzędna *x* środka objętości *V*

**Linia działania siły wyporu hydrostatycznego jest skierowana pionowo i przechodzi przez punkt o współrzędnych** $x_C, y_C$

**Przykład 1: Stożek o wysokości h wykonany z materiału o ciężarze właściwym $\gamma_1$ pływa w cieczy wierzchołkiem w dół. Obliczyć zanurzenie stożka jeżeli ciężar właściwy cieczy wynosi $\gamma$.**



## Rozwiązanie

Jeżeli oznaczymy pole podstawy stożka $A_h$ , a pole wodnicy pływania $A_z$ , to siła ciężkości wynosi:

$$G = \frac{1}{3} A_h h \gamma_1$$

a siła wyporu:

$$W = \frac{1}{3} A_z z \gamma$$

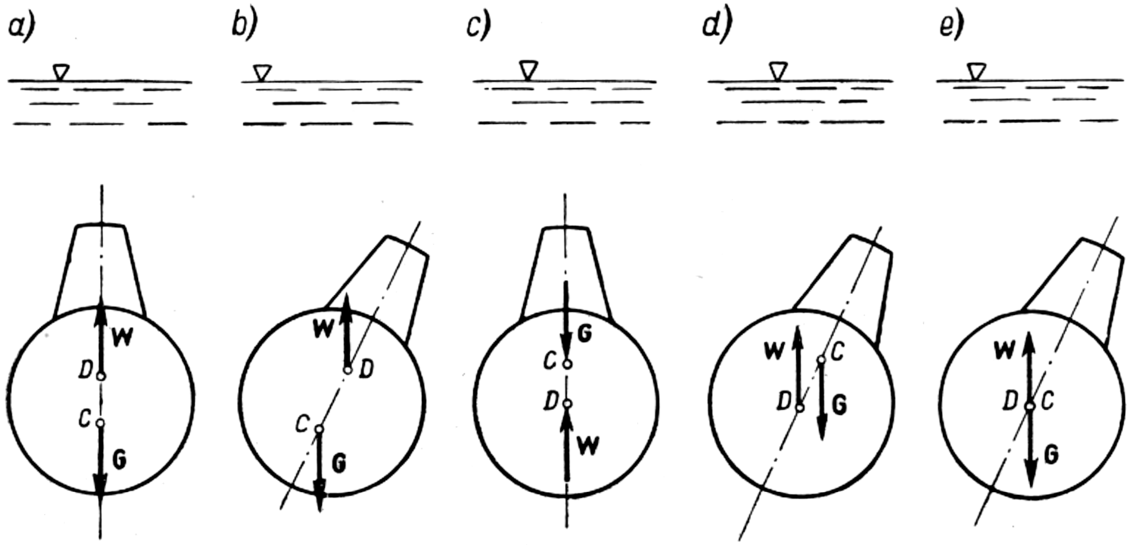
Z warunku równowagi wynika: $G = W \rightarrow \gamma_1 A_h h = \gamma A_z z \rightarrow z = h \frac{A_h}{A_z} \frac{\gamma_1}{\gamma}$

Ponieważ: $\frac{A_h}{A_z} = \frac{h^2}{z^2}$ to ostatecznie:

$$z = h \sqrt[3]{\frac{\gamma_1}{\gamma}}$$

## Stateczność ciał pływających

Stateczność ciała całkowicie zanurzonego



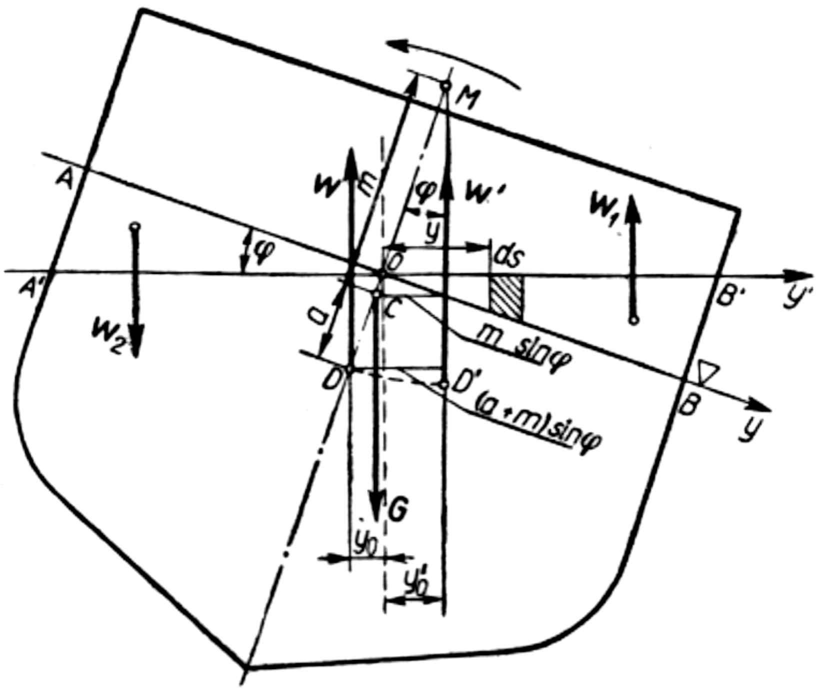

**Równowaga trwała** – środek wyporu znajduje się powyżej środka ciężkości – rysunek a) i b). Przy wychyleniu z położenia równowagi powstaje moment pary sił przywracający poprzednie położenie.

**Równowaga nietrwała** (chwiejna) – środek wyporu znajduje się poniżej środka ciężkości – rysunki c) i d). Przy wychyleniu z położenia równowagi powstaje moment pary sił powiększający wychylenie.

**Równowaga obojętna** – rysunek e) – w dowolnym położeniu ciała siły wyporu i ciężkości równoważą się nie dając momentu wpływającego na położenie ciała

**Wniosek: w przypadku ciała całkowicie zanurzonego dla zapewnienia równowagi trwałej konieczne jest umieszczenie środka wyporu powyżej środka ciężkości.**

Stateczność ciała częściowo zanurzonego




Założenie: kąt przechyłu jest mały

W przypadku ciała częściowo zanurzonego przy przechyle środek wyporu zmienia swoje położenie. Analiza stateczności polega na określeniu położenia środka wyporu po przechyleniu ciała o kąt φ

Moment przechylający: $M_0 = Ga \sin\varphi$

$G = \rho g V$ - ciężar ciała

$M_0 = \rho g a V \sin\varphi$

Moment prostujący (przywracający)

$dM_1 = ydW_1$ po prawej stronie przechylonego obiektu

$$dW_1 = \rho gydS\sin\varphi$$

$$dM_1 = \rho gy^2 dS\sin\varphi$$

$$M_1 = \rho g\sin\varphi\int_{S_1} y^2 dS \qquad M_2 = \rho g\sin\varphi\int_{S_2} y^2 dS$$

$$M = M_1 + M_2 = \rho g\sin\varphi\int_S y^2 dS = \rho g I_x\sin\varphi$$

Definiuje się wysokość metacentryczną *m* (patrz rysunek):

$$M - M_0 = \rho g I_x\sin\varphi - \rho g a V\sin\varphi$$

$$m = \frac{I_x}{V} - a$$

$I_x$ - moment bezwładności wodnicy

$S = S_1 + S_2$ - pole wodnicy

$V$ – objętość części zanurzonej

**Możliwe są trzy przypadki**:

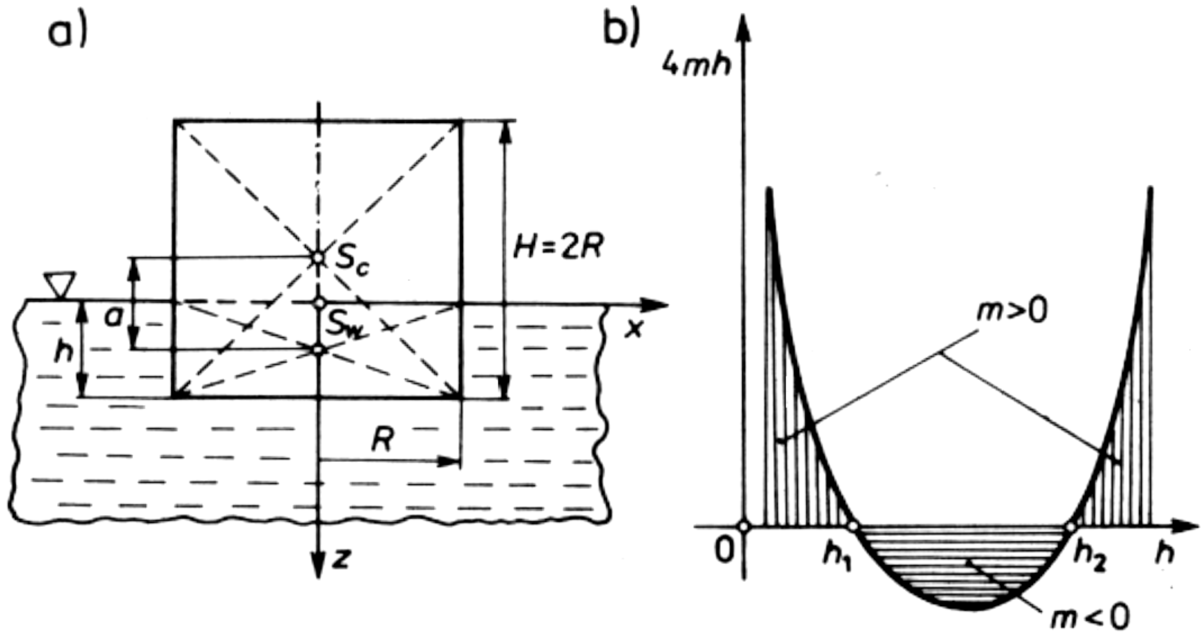
Wysokość metacentryczna jest dodatnia – **równowaga trwała -** przy wychyleniu z położenia równowagi powstaje przywracający moment pary sił.

Wysokość metacentryczna jest równa zeru – **równowaga obojętna**

Wysokość metacentryczna jest ujemna – **równowaga nietrwała (chwiejna) –** przy wychyleniu z położenia równowagi powstaje moment pary sił pogłębiający wychylenie.

**Wniosek: ciało częściowo zanurzone może znajdować się w równowadze trwałej nawet jeśli środek ciężkości znajduje się powyżej środka wyporu. Środek ciężkości może znajdować się tym wyżej im większy jest moment bezwładności wodnicy (czyli im „szersze” jest ciało).**

## Przykład 2




Walec kołowy o promieniu podstawy *R* i wysokości *H=2R* pływa w położeniu pionowym (rysunek a). Środek ciężkości walca pokrywa się z jego srodkiem geometrycznym. Dla jakiej głębokości zanurzenia *h* równowaga walca będzie trwała?

Przekrój pływania (wodnica) walca jest kołem, którego moment bezwładności wynosi:

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}$$

Objętość wypartej przez walec cieczy wynosi:

$$V = \pi R^2 h$$

Odległość pomiędzy środkiem ciężkości walca a środkiem wyporu wynosi:

$$a = \frac{H}{2} - \frac{h}{2} = R - \frac{h}{2}$$

Podstawienie powyższych zależności do wzoru na wysokość metacentryczną prowadzi do:

$$m = \frac{I_x}{V} - a = \frac{R^2}{4h} - R + \frac{h}{2}$$

Co można przekształcić do postaci:

$$4mh = R^2 - 4Rh + 2h^2$$

Wykresem tej funkcji jest parabola (rysunek b), której miejsca zerowe można wyznaczyć przyrównując prawą stronę do zera.

$$2h^2 - 4Rh + R^2 = 0$$

Powyższe równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki:

$$h_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} R \approx 0{,}29R \qquad h_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} R \approx 1{,}7R$$

Z wykresu na rysunku b wynika, że równowaga trwała walca występuje przy płytkim zanurzeniu spełniającym warunek:

$$h < 0{,}29R$$

oraz przy zanurzeniu głębokim:

$$h > 1{,}7R$$

**Dla pośrednich zanurzeń walca równowaga jego jest nietrwała (chwiejna).**