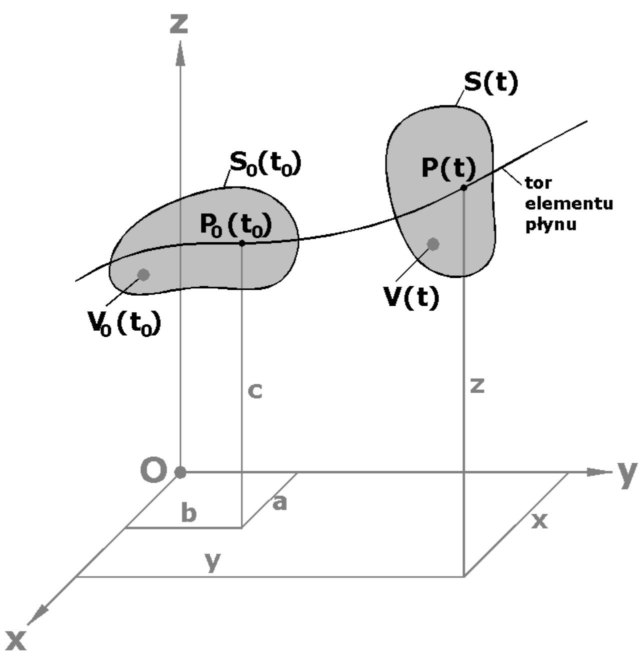
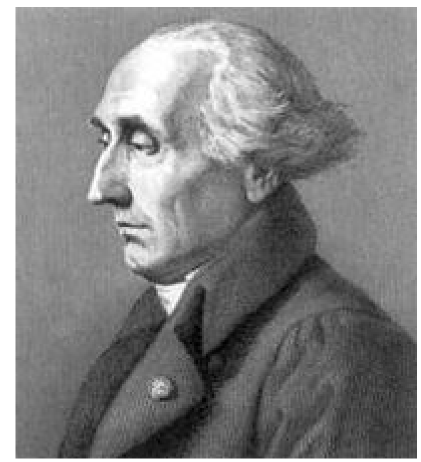
J. Szantyr - Wykład 6: Kinematyka płynów – Podejście Lagrange'a i Euler'a – Linie prądu – Tory elementów płynu

Podejście Lagrange'a (inaczej metoda wędrowna) polega na opisywaniu ruchu w przestrzeni pewnej wydzielonej masy płynu składającej się zawsze z tych samych molekuł.



V - objętość pewnej masy płynu (objętość płynna) otoczona powierzchnią S, która jest nieprzenikliwa dla elementów płynu

Masa płynu przemieszcza się od położenia V_0 w t_0 chwili do położenia V w chwili t.



Joseph Lagrange
1736 - 1813

Element płynu *P* stanowiący część objętości *V* przemieszcza zakreślając w przestrzeni tor elementu, który może być opisany równaniami parametrycznymi z czasem *t* jako parametrem:

$$x = x(a,b,c,t)$$

$$y = y(a,b,c,t)$$

$$z = z(a,b,c,t)$$

<u>Zmieniając w równaniach wielkości *a, b* i *c* opisujemy coraz to inne elementy płynu</u>

Wielkości opisujące ruch płynu są w taki sam sposób zależne od *a, b, c, t*:

$$\overline{u} = \overline{u}(a,b,c,t)$$

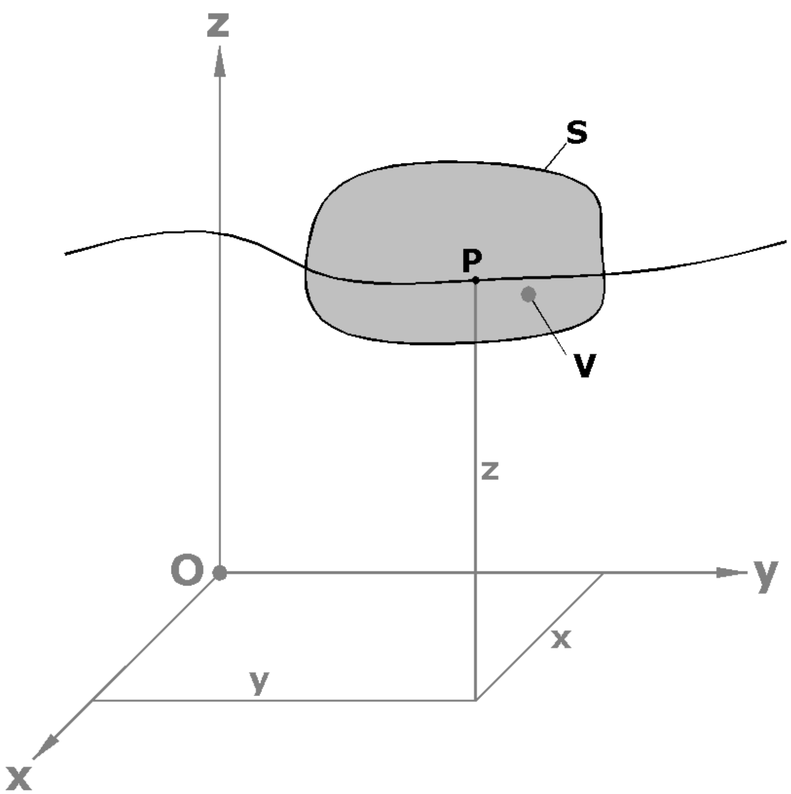
$$p = p(a,b,c,t)$$

$$\rho = \rho(a,b,c,t)$$

gdzie: $\overline{u} = \overline{i}u + \overline{j}v + \overline{k}w$

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt} \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

Metoda Euler'a (metoda lokalna) polega na wybraniu w przestrzeni nieruchomej objętości kontrolnej *V* ograniczonej powierzchnią kontrolną *S*. Przez tę objętość przepływają kolejno <u>różne elementy płynu</u> z różnymi wartościami takich wielkości jak prędkość, ciśnienie, gęstość itd. Przedmiotem opisu są wartości tych wielkości w wybranych punktach objętości kontrolnej.



$$\bar{u} = \bar{u}(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

Leonhard Euler
1707 - 1783

gdzie:

$$\bar{u} = \bar{i}\, u_x(x, y, z, t) + \bar{j}\, u_y(x, y, z, t) + \bar{k}\, u_z(x, y, z, t)$$

Pochodna materialna (substancjalna)

Pochodna materialna jest szczególną interpretacją pochodnej funkcji wielu zmiennych, związaną z eulerowskim sposobem opisu ruchu płynu. Pokazuje ona, w jaki sposób zmienia się w czasie dowolny parametr charakteryzujący element płynu poruszający się w polu tego parametru. Wyjaśnimy to na przykładzie dowolnego parametru skalarnego H, będącego jawną i złożoną funkcją czasu. Jeżeli H jest funkcja zmiennych Eulera to mamy:

$$H = H\left(t, x(t), y(t), z(t)\right)$$

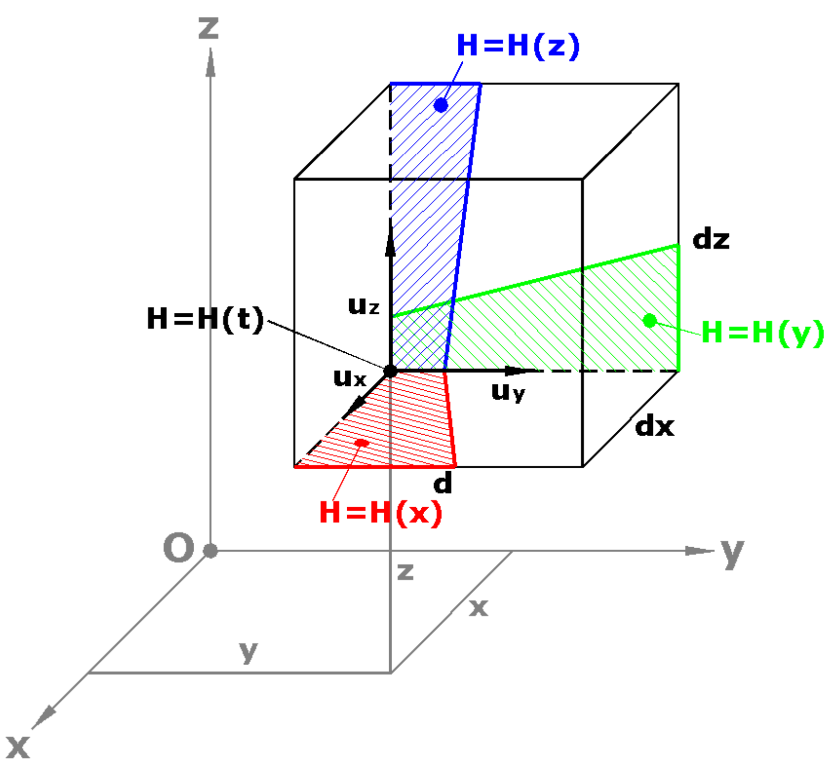
Zgodnie z definicją różniczki zupełnej funkcji wielu zmiennych mamy:

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Ale mamy: $\dfrac{dx}{dt} = u_x \quad \dfrac{dy}{dt} = u_y \quad \dfrac{dz}{dt} = u_z$ co prowadzi do:

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}u_x + \frac{\partial H}{\partial y}u_y + \frac{\partial H}{\partial z}u_z = \frac{\partial H}{\partial t} + \bar{u} \bullet \nabla H = \frac{\partial H}{\partial t} + \bar{u} \bullet gradH$$

Pochodna materialna=pochodna lokalna+pochodna unoszenia



Pochodna lokalna pokazuje zmianę parametru *H* w czasie w punkcie *(x, y, z)* wynikającą z niestacjonarności pola *H*.

Pochodna unoszenia pokazuje zmianę parametru *H* w czasie na skutek przemieszczenia się elementu płynu z prędkością $\bar{u}$ z punktu o jednej wartości *H* do punktu o innej wartości *H*.

Zastosowanie operatora pochodnej materialnej do składowych pola prędkości pozwala obliczyć przyspieszenie materialne, czyli przyspieszenie elementu płynu poruszającego się w niestacjonarnym i niejednorodnym polu prędkości.

$$\frac{Du_x}{Dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = a_x$$

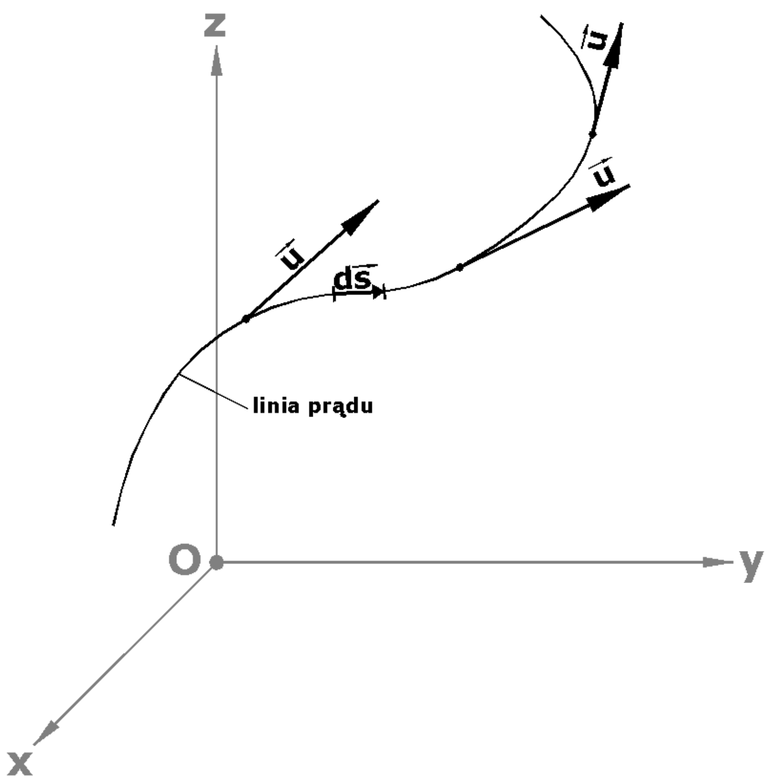
$$\frac{Du_y}{Dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = a_y$$

$$\frac{Du_z}{Dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = a_z$$

lub w zapisie wektorowym:

$$\frac{D\overline{u}}{Dt} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u} \bullet grad\overline{u} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \left(\overline{u}\nabla\right)\overline{u}$$

Linia prądu jest to linia pola wektorowego prędkości, czyli linia styczna do wektora prędkości w każdym punkcie pola w danej chwili czasu. Jeżeli *ds* jest elementem linii prądu, a *u* – wektorem prędkości, to mamy:



$$d\overline{s} \times \overline{u} = 0$$ warunek styczności

czyli:

$$u_z dy - u_y dz = 0$$

$$u_x dz - u_z dx = 0$$

$$u_y dx - u_x dy = 0$$

co prowadzi do równania linii prądu:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$$

Na ogół przez każdy punkt pola prędkości przechodzi jedna linia prądu dająca się wyznaczyć w sposób jednoznaczny. Jeżeli w jakimś punkcie pola zbiega się więcej linii prądu, to jest to **punkt osobliwy**. Jeżeli przez krzywą nie będącą linią prądu poprowadzimy linie prądu, to uzyskamy **powierzchnię prądu**. Jeżeli jest to krzywa zamknięta, to uzyskamy **rurkę prądu**. Jeżeli przekrój tej rurki jest infinitezymalny, to uzyskamy **włókno prądu**. Rurka prądu jest dobrym modelem rurociągu, dla którego można wyznaczyć:

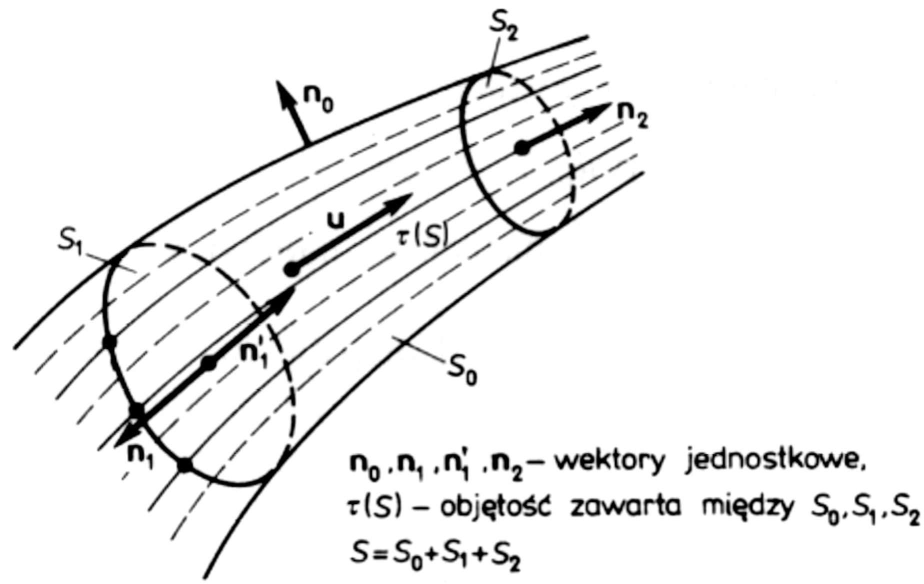
objętościowe natężenie przepływu: $Q = \int_S u_n dS$

objętościową prędkość średnią: $\tilde{u} = \frac{1}{S}\int_S u_n dS$

masowe natężenie przepływu: $M = \int_S \rho u_n dS$

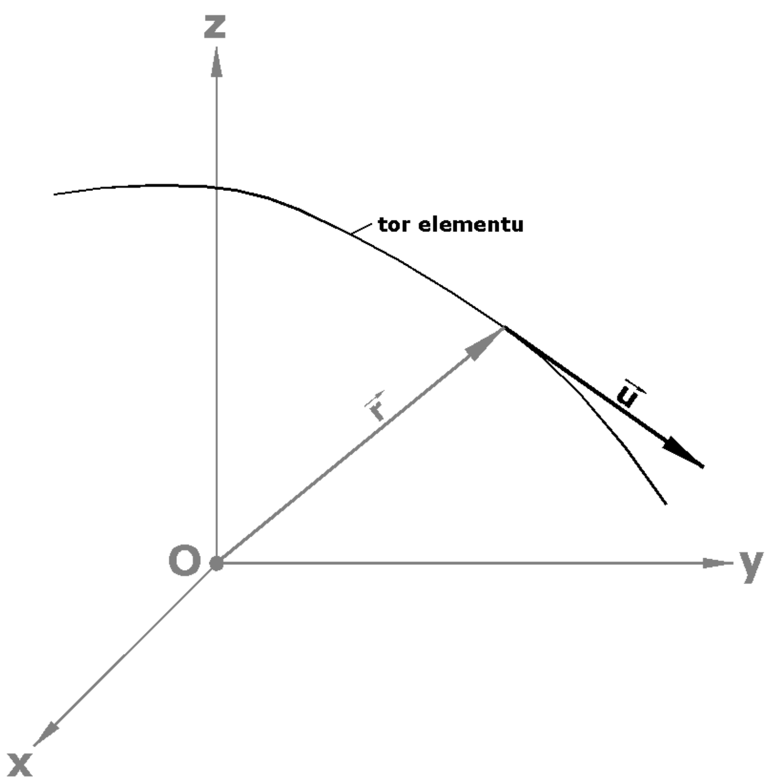
masową prędkość średnią: $\tilde{u} = \dfrac{\int_S \rho u_n dS}{\int_S \rho dS}$

rurka prądu



gdzie: u_n jest składowa prędkości normalną do przekroju rurki S

Tor elementu płynu lub **trajektoria** jest to miejsce geometryczne punktów w polu przepływu przez które przechodzi element w kolejnych chwilach czasu.



Wektorowe równanie toru:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{u}\left(\bar{r}, t\right)$$

W postaci skalarnej:

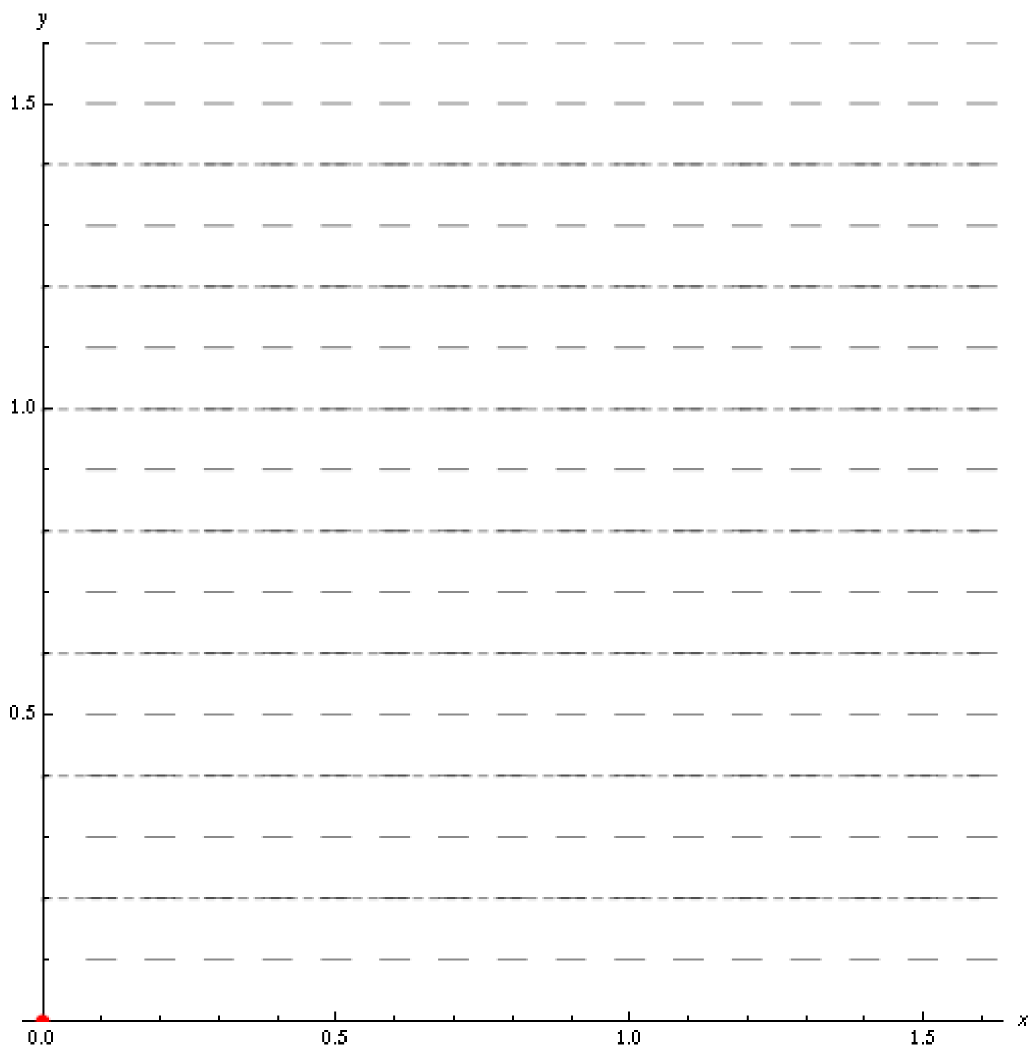
$$\frac{dx}{dt} = u_x\left(x, y, z, t\right) \qquad \frac{dy}{dt} = u_y\left(x, y, z, t\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = u_z\left(x, y, z, t\right)$$

Rozwiązanie wymaga uwzględnienia warunków początkowych dla $t = t_0$

$$x(t) = x_0 \qquad y(t) = y_0 \qquad z(t) = z_0$$

W przepływie niestacjonarnym linie prądu, tory elementów płynu i linie wysnute **nie pokrywają się.**



Linie prądu – kolor szary

Tor elementu – kolor czerwony

Linia wysnuta – kolor niebieski

Linia wysnuta jest to ślad ruchu elementu płynu „znoszony" przez zmieniające się pole prędkości.