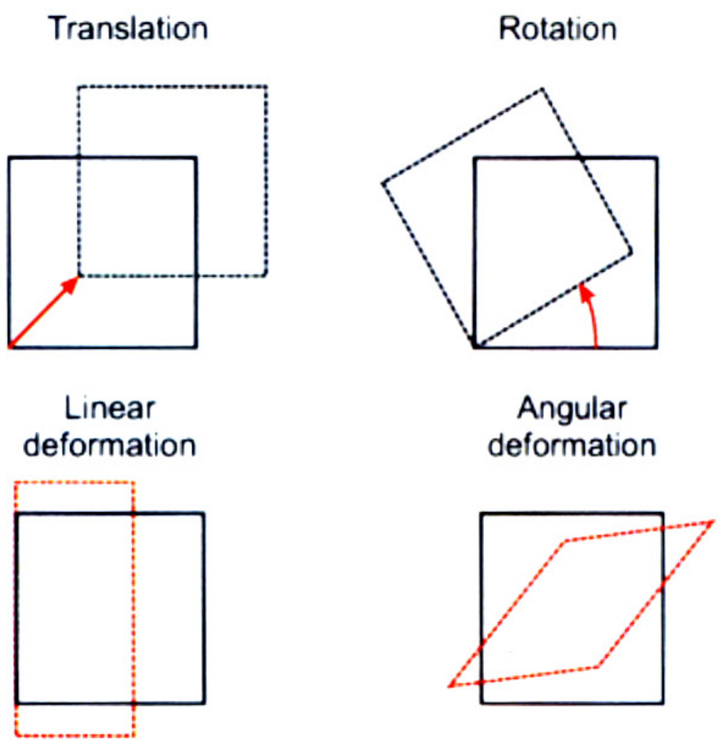
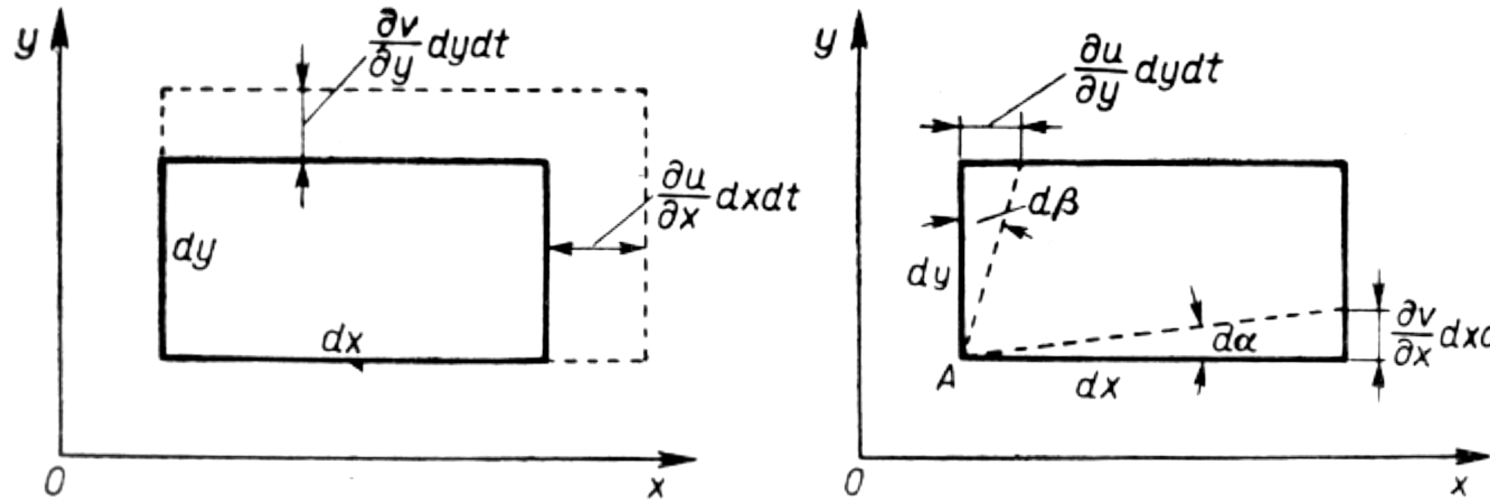
J. Szantyr - Wykład 7 – Ruch ogólny elementu płynu

Ruch ogólny ciała sztywnego można przedstawić jako sumę przemieszczenia liniowego i obrotu. Ponieważ płyny nie mają sztywności postaciowej, w ruchu płynu dochodzi dodatkowo do odkształcenia elementu płynu.



Ruch ogólny elementu płynu można więc traktować jako superpozycję przemieszczenia liniowego (translacji), obrotu względem chwilowego bieguna oraz odkształcenia (deformacji), które z kolei można podzielić na liniowe (objętościowe) i kątowe (postaciowe).

Odkształcenia w przypadku dwuwymiarowym



Prędkość ruchu płynu zapisujemy jako: $\overline{u} = \overline{i}\,u + \overline{j}v$

Do odkształcenia liniowego elementu płynu dochodzi gdy składowa prędkości *u* zmienia się w kierunku *x* i/lub składowa prędkości *v* zmienia się w kierunku *y* (lewa strona rysunku). Prowadzi to do przyrostu objętości elementu w czasie *dt* o wartość:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdydt$$

gdzie wielkości w nawiasie są prędkościami odkształcenia liniowego

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Do odkształcenia postaciowego elementu płynu dochodzi gdy składowa prędkości u zmienia się w kierunku y i/lub składowa prędkości v zmienia się w kierunku x (prawa strona rysunku). Prowadzi to do obrotu ścianek elementu płynu o kąty:

$$d\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} dt \qquad\qquad d\beta = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

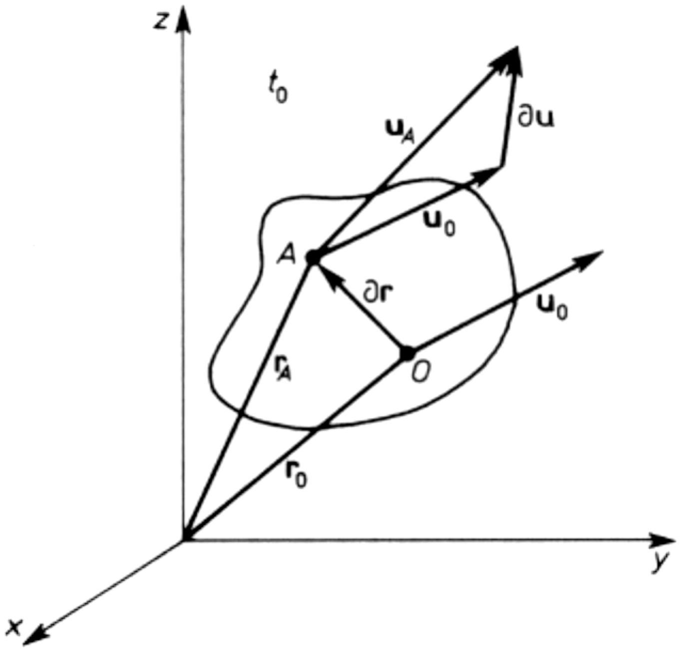
Miarą prędkości łącznego odkształcenia postaciowego jest wyrażenie:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Sztywny obrót elementu płynu można traktować jako sumę dwóch odkształceń postaciowych tak dobranych, że kąty pomiędzy bokami elementu pozostają proste. Prędkość kątową takiego obrotu można zapisać jako:

$$\Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Odkształcenia w przypadku trójwymiarowym



Element płynu wykonuje ruch ogólny złożony z translacji z prędkością $\overline{u}_0$ oraz obrotu względem bieguna O i deformacji. Na skutek obrotu i deformacji ulega zmianie wektor $\partial\overline{r}$ łączący punkt A z biegunem. W ogólnym przypadku wektor ten doznaje obrotu i zmiany długości. Można napisać:

$$d\left(\partial\overline{r}\right)=\left(\overline{u}_A-\overline{u}_0\right)dt$$

Przy założeniu małej odległości pomiędzy punktami *O* i *A* można różnicę ich prędkości rozwinąć w szereg Taylora i wziąć po uwagę tylko pierwszy wyraz:

$$\overline{u}_A=\overline{u}_0+\nabla\overline{u}_0\cdot\left(\overline{r}_A-\overline{r}_0\right)+\frac{1}{2}\nabla^2 u_0\cdot\left(\overline{r}_A-\overline{r}_0\right)^2......$$

czyli:
$$\partial\overline{u} = \overline{u}_A - \overline{u}_0 = \frac{\partial\left(\delta\overline{r}\right)}{\partial t} = \nabla\overline{u}_0 \cdot \partial\overline{r}$$

gdzie: $\nabla\overline{u}_0$ jest tensorem prędkości względnej punktu *A* względem bieguna *O*

$$\nabla\overline{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Gdzie wektor prędkości ma postać:

$$\overline{u} = \overline{i}\,u + \overline{j}v + \overline{k}w$$

Tensor prędkości względnej może być przedstawiony jako suma dwóch tensorów: antysymetrycznego i symetrycznego. Tensor antysymetryczny opisuje obrót elementu płynu jako ciała sztywnego. Jego wyrazy są składowymi prędkości kątowej obrotu ω.

$$[\Omega] = \begin{vmatrix} 0, -\omega_z, \omega_y \\ \omega_z, 0, -\omega_x \\ -\omega_y, \omega_x, 0 \end{vmatrix}$$

gdzie:

$$\overline{\omega} = \overline{i}\,\omega_x + \overline{j}\omega_y + \overline{k}\,\omega_z$$

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2} rot\overline{u}$$

Poszczególne składowe tensora wyrażają się zależnościami:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Tensor symetryczny opisuje deformację elementu płynu i nosi nazwę tensora prędkości deformacji:

$$[D] = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

gdzie poszczególne składowe wyrażają się zależnościami:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Ostatecznie ogólny ruch elementu płynu można opisać następującą zależnością:

$$\overline{u}_A = \overline{u}_0 + \overline{\omega}_0 \times \partial \overline{r} + \left[D\right]_0 \cdot \partial \overline{r}$$

Pierwsze twierdzenie Helmholtza

Prędkość dowolnego punktu elementu płynu składa się z:

-prędkości postępowej punktu obranego za biegun

-prędkości obrotowej wokół osi przechodzącej przez biegun (wektor tej prędkości wyznacza oś obrotu)

Hermann von Helmholtz
1821 - 1894

-prędkości deformacji elementu płynu.

W porównaniu z analogicznym ruchem ciała sztywnego można stwierdzić następujące różnice:

-wzór dla płynu jest ważny tylko w bliskim otoczeniu bieguna

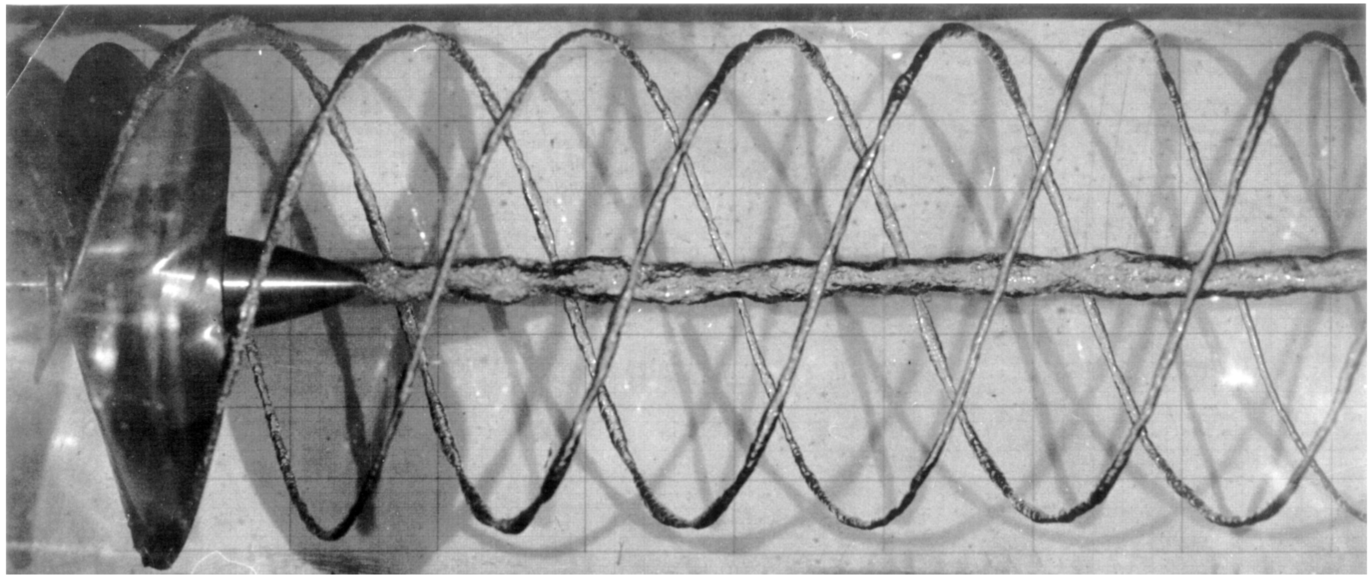
-w płynie dodatkowo występuje prędkość deformacji

Przepływy wirowe

W przyrodzie i w technice spotykamy bardzo liczne przepływy zdominowane przez ruch wirowy płynu. Oto kilka przykładów:

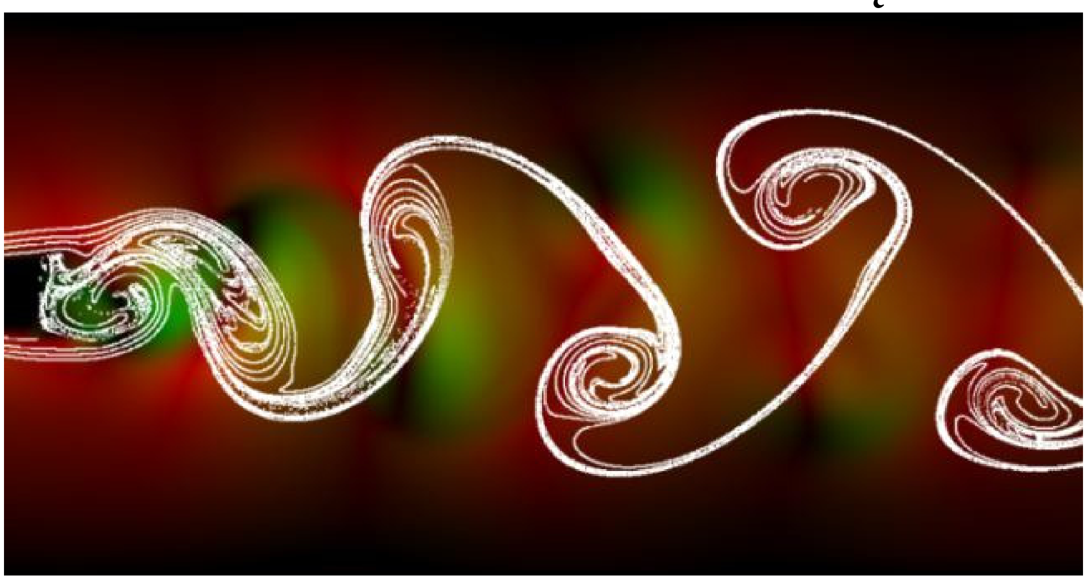
Ślad wirowy za skrzydłami samolotu

Układ wirów generowany przez śrubę okrętową



Ścieżka wirowa za obiektem

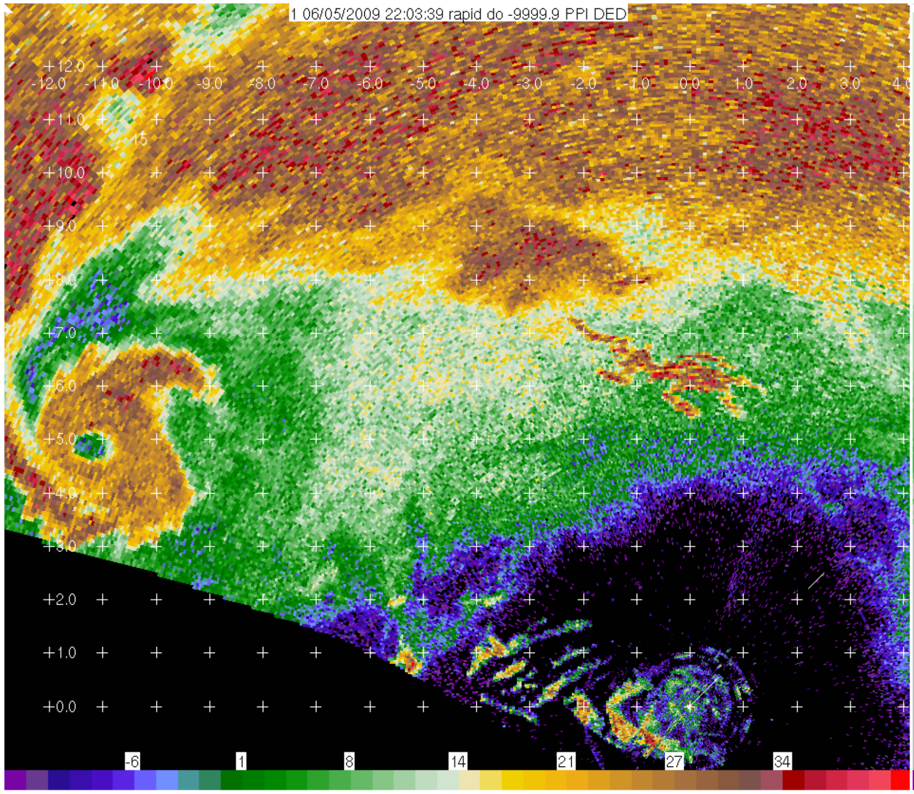
Ślad wirowy za okrętem >

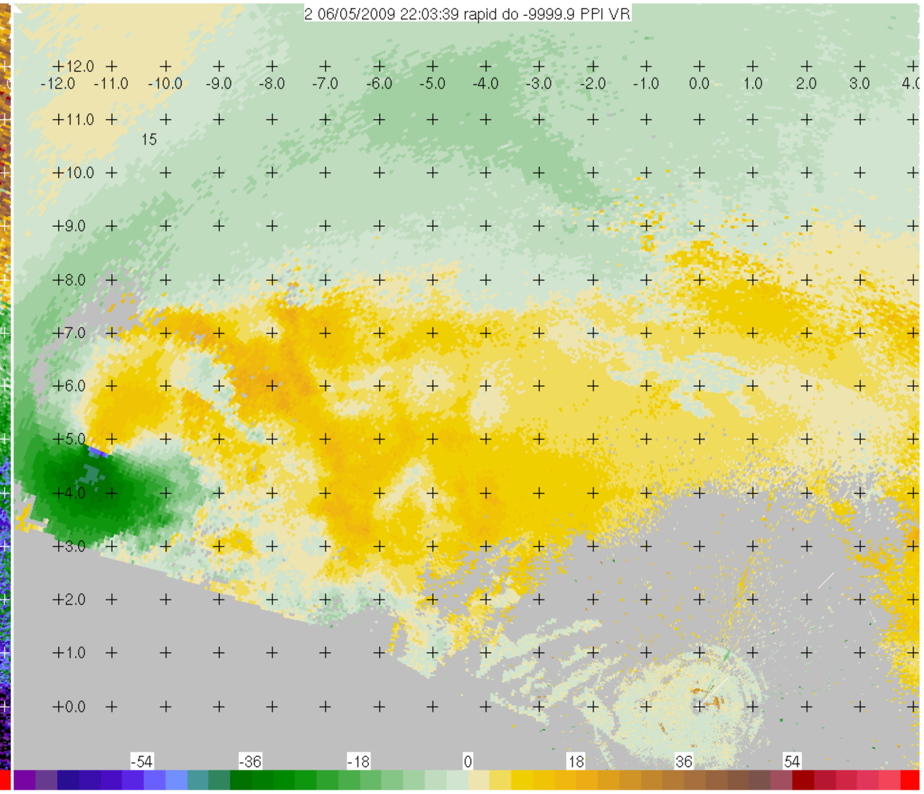


Tornado nad morzem>

Tornado nad pustynią

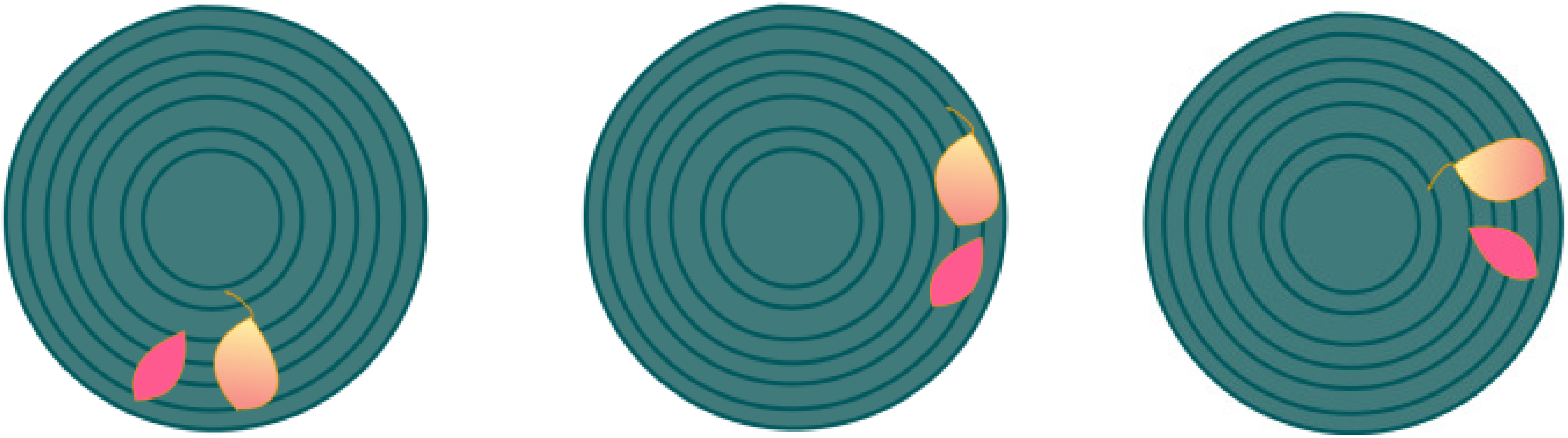
Wir powietrzny w stratosferze >





Rozwój tornado obserwowany przez radar dopplerowski

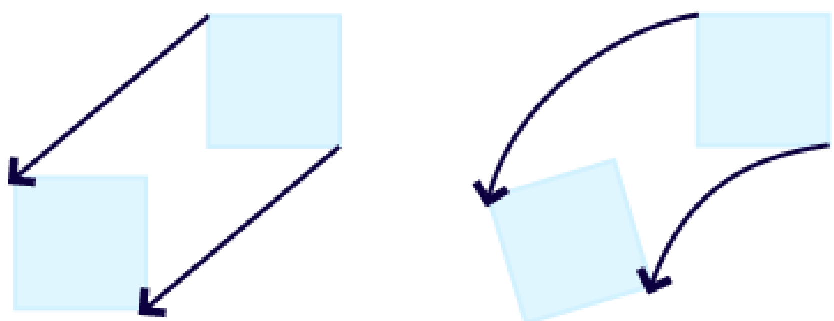
Jesienne listki jako znaczniki przepływu wirowego



Położenie wyjściowe

Przepływ bezwirowy

Przepływ wirowy



< Ruch wirowy charakteryzuje się obrotem elementów płynu

Opis matematyczny ruchu wirowego płynu

Wirowym nazywamy przepływ, w którym wszędzie lub prawie wszędzie (czyli z wyjątkiem skończonej liczby punktów, linii i powierzchni) rotacja pola prędkości jest różna od zera. Wtedy każdemu lub prawie każdemu punktowi przestrzeni można przypisać wektor wirowości:

$$\overline{\Omega} = rot\overline{u} = 2\overline{\omega}$$

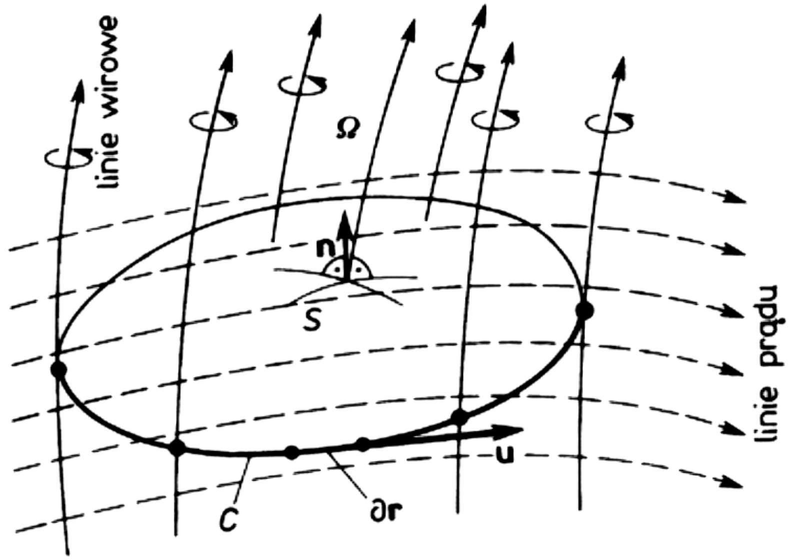
Składowe wektora wirowości wyrażają się zależnościami:

$$\Omega_x = 2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\Omega_y = 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

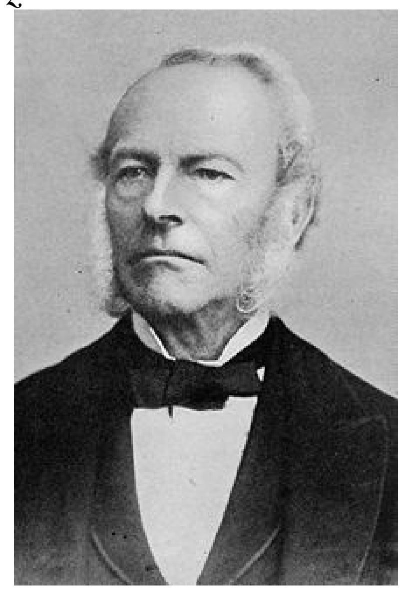
$$\Omega_z = 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Przez analogię do linii prądu można określić linie wirowe jako linie pola wektorowego wirowości, czyli linie styczne w każdym punkcie pola do wektorów wirowości.



Równanie linii wirowej:

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}$$



George Stokes
1819 - 1903

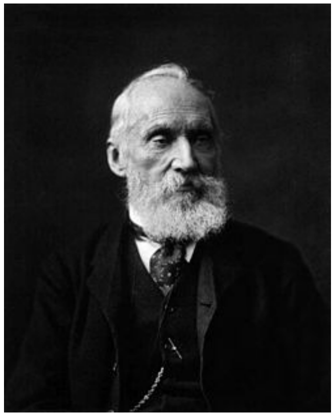
Cyrkulacja wektora prędkości jest definiowana jako:

$$\Gamma = \oint_C \overline{u} \bullet d\overline{r} = \oint_C \left(udx + vdy + wdz\right) = \int_S rot\overline{u} \bullet dS$$

Twierdzenie Stokesa: cyrkulacja prędkości wzdłuż dowolnego konturu C jest równa strumieniowi wirowości przez dowolną powierzchnię objętą tym konturem.

Linie wirowe przechodzące przez krzywą nie będącą linią wirową tworzą **powierzchnię wirową**. Jeżeli ta krzywa jest krzywą zamkniętą to powstaje **rurka wirowa**. Rurka wirowa o infinitezymalnej średnicy to **włókno wirowe.**

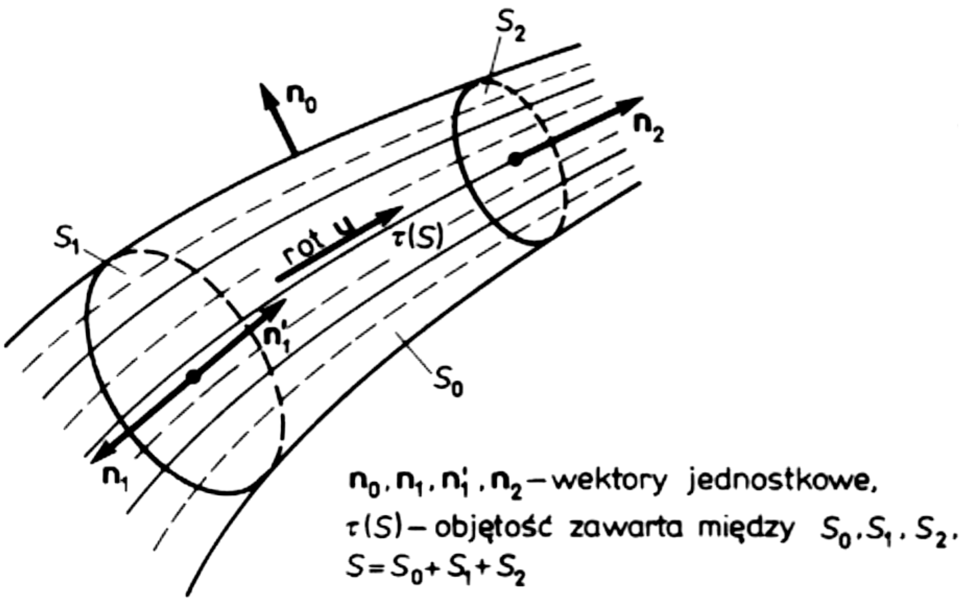
Twierdzenie Thomsona: w przepływie idealnego płynu barotropowego znajdującego się pod działaniem potencjalnego pola sił masowych cyrkulacja prędkości wzdłuż dowolnej zamkniętej linii płynnej nie zmienia się w czasie



Wiliam Thomson lord Kelvin
1824 - 1907

Drugie twierdzenia Helmholtza: w przepływie idealnego płynu barotropowego znajdującego się pod działaniem potencjalnego pola sił masowych natężenie włókna wirowego nie zmienia się wzdłuż jego długości i jest stałe w czasie.

Hermann von Helmholtz
1821 - 1894



Wnioski:

-włókno wirowe nie może zanikać ani powstawać w płynie,

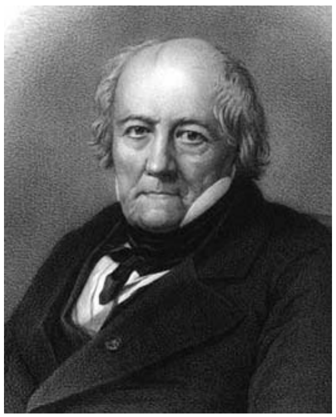
-włókno wirowe może tworzyć krzywą zamkniętą,

-włókno wirowe może się kończyć na swobodnej powierzchni lub na ścianach sztywnych,

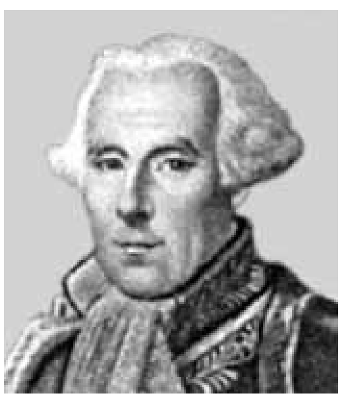
-w ruchu wirowym biorą udział cały czas te same elementy płynu.

W praktycznym modelowaniu przepływ można podzielić na obszar o ruchu wirowym i obszar o ruchu bezwirowym. Oba te obszary są wzajemnie współzależne. Obszar o ruchu wirowym może być modelowany włóknami wirowymi. Istotne staje się wtedy wyznaczanie pola prędkości generowanego przez pole wirowości, czyli operacja odwrotna do obliczania rotacji pola prędkości.

Wzór Biota-Savarta



Jean Baptiste Biot
1774 - 1862



Felix Savart
1791 - 1841

$$d\overline{V} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\overline{s}\times\overline{r}}{r^3}$$

$$\overline{V} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\overline{s}\times\overline{r}}{r^3}$$