J. Szantyr - Wykład 8 – Równanie zachowania masy

Prawo zachowania masy: w zamkniętym układzie fizycznym masa nie może powstać ani nie może ulec anihilacji.

Założenia:

-rozpatrujemy nieustalony trójwymiarowy przepływ płynu ściśliwego,

-płyn w całości wypełnia przestrzeń (brak nieciągłości, pęcherzy itp.),

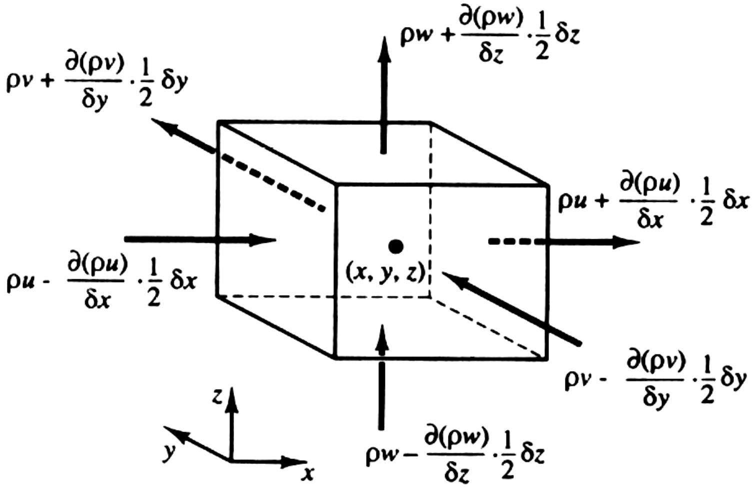
-stosujemy opis Eulera – nieruchoma objętość kontrolna ograniczona powierzchnią kontrolną.

Przy tych założeniach prawo zachowania masy brzmi:

przyrost masy w objętości = przepływ masy przez powierzchnię

Przyrost masy w objętości kontrolnej wynosi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \delta x \delta y \delta z\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$$



Z kolei przepływ przez powierzchnię kontrolną wynosi:

$$\left(\rho u-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\delta y\,\delta z-\left(\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\delta y\,\delta z+$$

$$+\left(\rho v-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\,\delta z-\left(\rho v+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\,\delta z+$$

$$+\left(\rho w-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\,\delta y-\left(\rho w+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\,\delta y$$

Porównanie obu wyrażeń i podzielenie stronami przez objętość kontrolną prowadzi do wzoru:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+div(\rho\overline{u})=0$$

W przypadku <u>ustalonego</u> przepływu płynu <u>ściśliwego</u> równanie zachowania masy przybiera postać:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=div(\rho\overline{u})=0$$

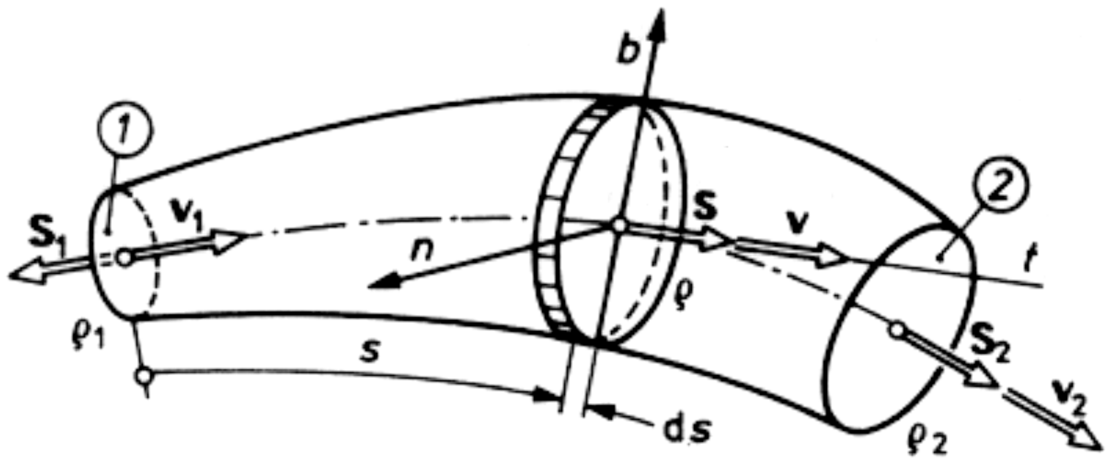
W przypadku ustalonego przepływu płynu <u>nieściśliwego</u> równanie zachowania masy przybiera postać:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=div\overline{u}=0$$

W przypadku poruszającego się elementu płynu (opis Lagrange'a) równanie zachowania masy przybiera postać:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+div(\rho\overline{u})=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\overline{u}\cdot grad\rho+\rho div\overline{u}=\frac{D\rho}{Dt}+\rho div\overline{u}$$

Równanie zachowania masy dla rurki prądu



Różnica natężeń przepływu masy pomiędzy przekrojami 1 i 2

$$\int_{S_1} \rho(s,t)u(s,t)dS - \int_{S_2} \rho(s,t)u(s,t)dS = \int_2^1 \frac{\partial}{\partial s}(\tilde{\rho}\tilde{u}S)ds$$

Odpowiednie wartości średnie są zdefiniowane następująco:

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{1}{S_1}\int_{S_1} \rho_1 dS_1 \qquad \tilde{\rho}_2 = \frac{1}{S_2}\int_{S_2} \rho_2 dS_2$$

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{S_1\tilde{\rho}_1}\int_{S_1} \rho_1 u_1 dS_1 \qquad \tilde{u}_2 = \frac{1}{S_2\tilde{\rho}_2}\int_{S_2} \rho_2 u_2 dS_2$$

Różnica ta może powstać w wyniku kompresji lub ekspansji płynu w obszarze kontrolnym ograniczonym przekrojami 1 i 2. W takim przypadku masa w obszarze kontrolnym zmienia się z prędkością:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_1^2 \tilde{\rho}(s,t)S(s,t)ds$$

Zgodnie z zasadą zachowania masy zmiana masy w objętości musi być równa strumieniowi masy przez powierzchnię ograniczającą.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_1^2 \tilde{\rho}Sds = -\int_1^2 \frac{\partial\left(\tilde{\rho}\tilde{u}S\right)}{\partial s}ds \qquad \text{czyli:} \qquad \int_1^2\left[\frac{\partial\left(\tilde{\rho}S\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\tilde{\rho}\tilde{u}S\right)}{\partial s}\right]ds = 0$$

Ponieważ powyższa równość zachodzi dla dowolnie wybranych przekrojów 1 i 2, to funkcja podcałkowa powinna być równa zero. Prowadzi to do następującego równania zachowania masy:

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}S)}{\partial t}+\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u}S)}{\partial s}=0$$

Dla płynu nieściśliwego (o stałej gęstości) otrzymujemy:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial(\tilde{u}S)}{\partial s}=0$$

Z kolei dla przepływu ustalonego otrzymujemy:

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u}S)}{\partial s}=0 \qquad \text{czyli:} \qquad \tilde{\rho}\tilde{u}S=const$$

Wnioski:

-w ustalonym przepływie płynu ściśliwego natężenie przepływu masy (strumień masy) przez każdy poprzeczny przekrój rurki prądu jest stałe,

-w ustalonym przepływie płynu nieściśliwego objętościowe natężenie przepływu (strumień objętości) jest stałe, czyli prędkość przepływu jest odwrotnie proporcjonalna do pola przekroju rurki prądu.