Studia magisterskie ENERGETYKA

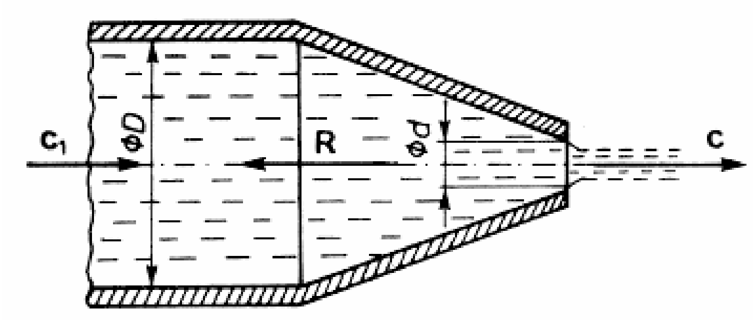
Jan A. Szantyr

Wybrane zagadnienia z mechaniki płynów

Ćwiczenia 2

Wyznaczanie reakcji hydrodynamicznych I

Przykład 1



Z dyszy o średnicach D=80 [mm] i d=20 [mm] wypływa woda ze średnią prędkością c=15 [m/s]. Pomijając różnicę ciśnień obliczyć reakcję hydrodynamiczną wywieraną przez strumień wody na dyszę.

Reakcja R w ruchu ustalonym wynosi:

$$R = \rho \cdot Q \cdot \left(c - c_1\right)$$

Natężenie przepływu Q oraz prędkość c1 obliczamy z równania ciągłości:

$$Q = c \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = c_1 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

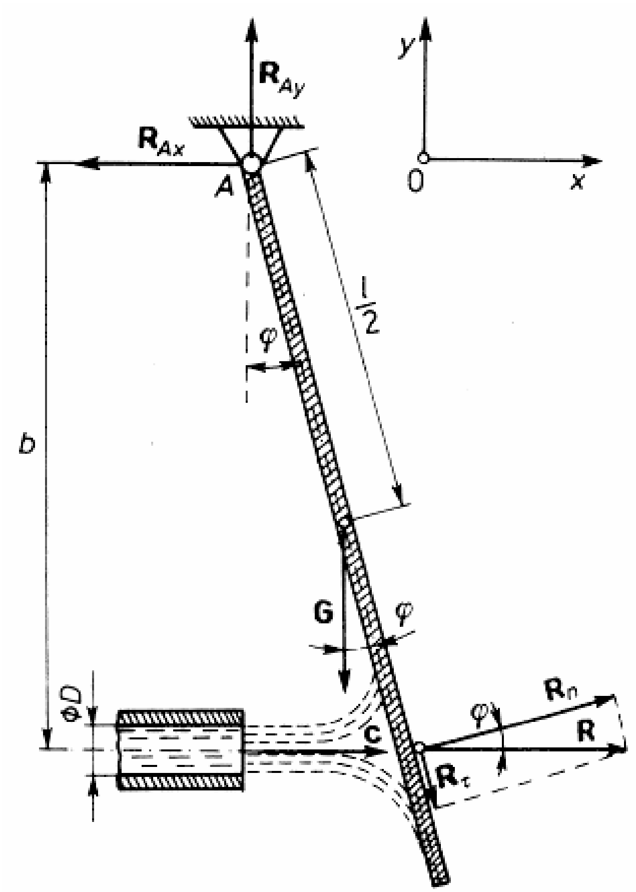
Wobec tego mamy:

$$Q = c \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \qquad c_1 = c \cdot \frac{d^2}{D^2} \qquad R = \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$$

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$R = 1000 \cdot 15^2 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}02^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{0{,}02^2}{0{,}08^2}\right) = 66{,}25 [N]$$

Przykład 2



Strumień cieczy doskonałej o gęstości ρ wypływa z dyszy i uderza w idealnie gładką płytę o ciężarze G i długości l. Płyta może obracać się wokół łożyska A oddalonego o b od osi dyszy. Wiedząc, że natężenie wypływającego strumienia wynosi Q, a średnica dyszy D, wyznaczyć składowe reakcji w łożysku oraz kąt φ o jaki wychyli się płyta w stanie równowagi.

Napór hydrodynamiczny R rozkładamy na składową normalną i składową styczną do płaszczyzny płyty:

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_\tau$$

W cieczy doskonałej składowa styczna jest równa zero, wobec czego całkowity napór reprezentuje tylko składowa normalna:

$$R_n = R \cdot \cos\varphi$$

Dalej mamy:

$$R = \rho \cdot c \cdot Q$$

$$c = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} \qquad R_n = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot \cos\varphi$$

Składowe reakcji w łożysku wyznaczamy z równań rzutów sił na osie x i y:

$$\sum P_{ix} = R_n \cdot \cos\varphi - R_{Ax} = 0$$

$$\sum P_{iy} = R_{Ay} - G + R_n \cdot \sin\varphi = 0$$

Skąd otrzymujemy:

$$R_{Ax} = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot \cos^2\varphi$$

$$R_{Ay} = G - \frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi = G - \frac{2 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot \sin 2\varphi$$

Kąt nachylenia płyty w stanie równowagi wyznaczamy z równania momentów względem punktu A:

$$\sum M_A = R_n \cdot \frac{b}{\cos\varphi} - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin\varphi = 0$$

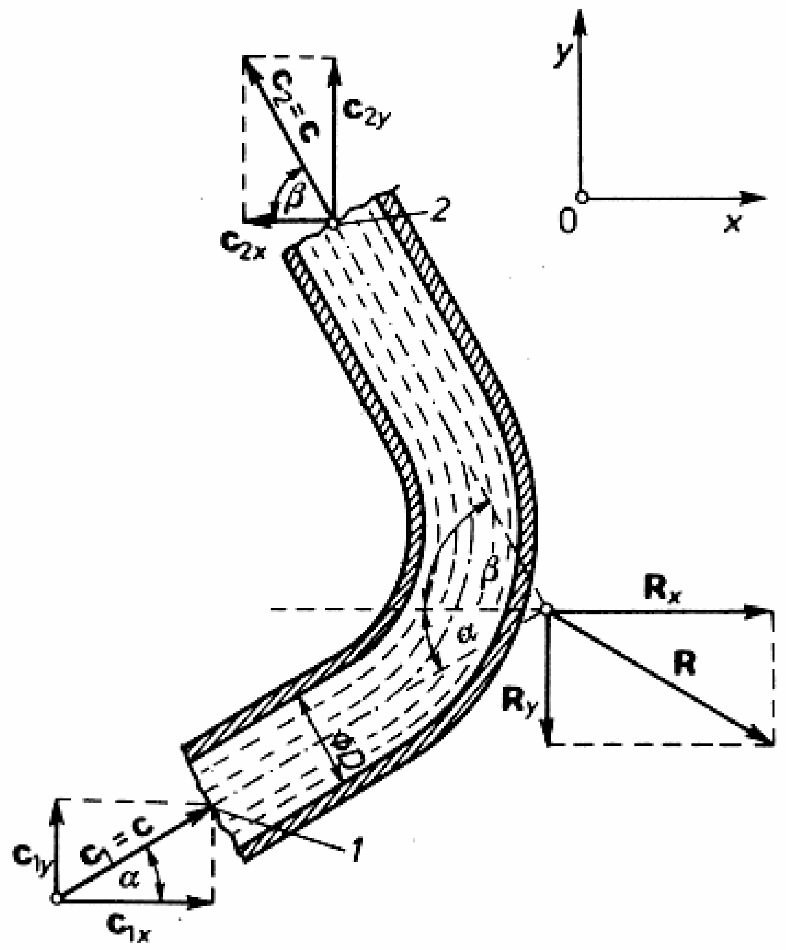
Otrzymujemy:

$$\sin\varphi = \frac{2 \cdot R_n \cdot b}{G \cdot l \cdot \cos\varphi}$$

Po podstawieniu zależności na reakcję mamy ostatecznie:

$$\varphi = \arcsin \frac{8 \cdot \rho \cdot Q^2 \cdot b}{\pi \cdot G \cdot l \cdot D^2}$$

Przykład 3



Przez krzywak o średnicy D=80 [mm] przepływa woda z natężeniem Q=0,08 [m3/s]. Pomijając straty obliczyć napór strumienia wody na krzywak. Część dopływowa krzywaka usytuowana jest pod kątem α=π/6 do poziomu, a część odpływowa pod kątem π/3. W przekroju dopływowym i odpływowym panuje jednakowe ciśnienie otoczenia p_b.**

Składowe naporu hydrodynamicznego wynoszą odpowiednio:

$$R_x = \rho \cdot Q \cdot \left(c_{1x} - c_{2x}\right)$$

$$R_y = \rho \cdot Q \cdot \left(c_{1y} - c_{2y}\right)$$

Gdzie:

$$c_{1x} = c \cdot \cos\alpha \qquad c_{2x} = -c \cdot \cos\beta$$

$$c_{1y} = c \cdot \sin\alpha \qquad c_{2y} = c \cdot \sin\beta$$

Co daje:

$$R_x = \rho \cdot Q \cdot c \cdot \left(\cos\alpha + \cos\beta\right)$$

$$R_y = \rho \cdot Q \cdot c \cdot \left(\sin\alpha - \sin\beta\right)$$

Po podstawieniu:

$$c = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$$

Otrzymujemy:

$$R_x = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot (\cos\alpha + \cos\beta)$$

$$R_y = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot (\sin\alpha - \sin\beta)$$

Napór wypadkowy wynosi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q^2}{\pi \cdot D^2} \cdot \sqrt{2 \cdot [1 + \cos(\alpha + \beta)]}$$

Suma kątów wynosi: $$\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$$

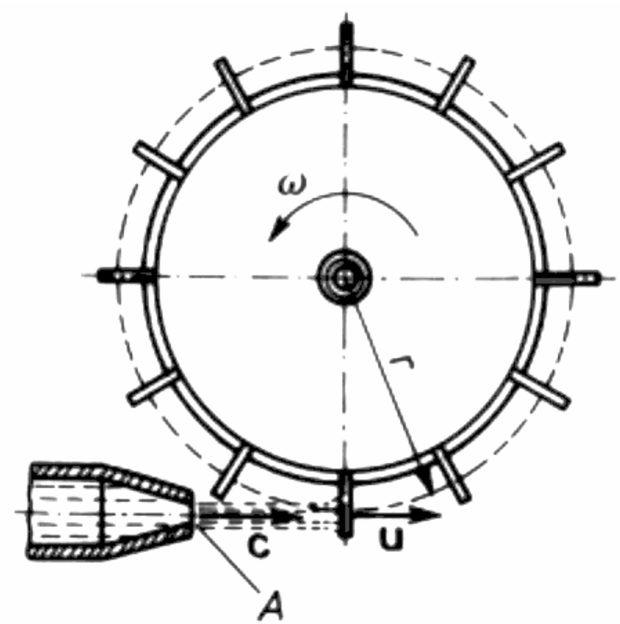
Wobec czego mamy:

$$R=\frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot\rho\cdot Q^2}{\pi\cdot D^2}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$R=\frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot 1000\cdot 0{,}08^2}{3{,}1415\cdot 0{,}08^2}=1802[N]$$

Przykład 4



Strumień wody o natężeniu q=0,01 [m3/s] wypływa z dyszy i uderza w płaskie łopatki koła wodnego o promieniu podziałowym r=1,0 [m]. Pomijając straty, obliczyć moc użyteczną oraz sprawność koła, jeżeli jego prędkość kątowa wynosi ω=5,0 [1/s], a pole przekroju poprzecznego dyszy A=500 [mm**2]. Dla jakiej prędkości obrotowej ω koło osiągnie moc maksymalną?**

Moc użyteczną koła wodnego określa zależność:

$$N_u = M \cdot \omega$$

Gdzie moment M wynika z zasady krętu:

$$M = \rho \cdot Q \cdot (c - u) \cdot r$$

Czyli: $$N_u = \rho \cdot Q \cdot (c - u) \cdot \omega \cdot r$$

Gdzie z kolei mamy: $u = \omega \cdot r$ $\qquad c = {}^{Q}\!/_{A}$

Co daje: $$N_u = \rho \cdot Q \cdot \left(\frac{Q}{A} - \omega \cdot r \right) \cdot \omega \cdot r$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$N_u = 1000 \cdot 0{,}01 \cdot \left(\frac{0{,}01}{0{,}0005} - 5 \cdot 1 \right) \cdot 5 \cdot 1 = 750 [W]$$

Z kolei moc doprowadzona do koła wyraża się wzorem:

$$N_d = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H$$

Gdzie wysokość rozporządzalna H wynosi: $H = \frac{c^2}{2 \cdot g}$

A ponadto: $c = Q / A$

Co daje:

$$N_d = \frac{\rho \cdot Q^3}{2 \cdot A^2} = \frac{1000 \cdot 0{,}01^3}{2 \cdot 0{,}0005^2} = 2000 [W]$$

Sprawność koła wynosi więc: $$\eta = \frac{N_u}{N_d} = \frac{750}{2000} = 0,375$$

W celu wyznaczenia prędkości kątowej odpowiadającej maksymalnej mocy koła należy równanie na moc użyteczną przekształcić i zróżniczkować względem prędkości kątowej

$$N_u = \rho \cdot c \cdot A \cdot \left(c - \omega \cdot r\right) \cdot \omega \cdot r = \rho \cdot A \cdot r \cdot \left(c^2 \cdot \omega - c \cdot \omega^2 \cdot r\right)$$

$$\frac{\partial N_u}{\partial \omega} = \rho \cdot A \cdot r \cdot \left(c^2 - 2 \cdot c \cdot \omega \cdot r\right) = 0$$ **Warunek ekstremum**

Po wstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$\omega = \frac{c}{2 \cdot r} = \frac{Q}{2 \cdot r \cdot A} = \frac{0,01}{2 \cdot 1 \cdot 0,0005} = 10 \left[{}^{1}\!/\!{}_{s} \right]$$